УДК 621.3.01

В. Я. Жуйков, докт. техн. наук, **В. Я. Ромашко**, канд. техн. наук, **Є. В. Вербицький**
(Національний технічний університет України „КПІ", Київ)

ЧИСЕЛЬНО-АНАЛІТИЧНИЙ МЕТОД РОЗРАХУНКУ ФУНКЦІЙ ВІЛЬНОГО РЕЖИМУ

У статті розглянуто чисельно-аналітичний метод розрахунку функцій вільного режиму та виведено аналітичну формулу для їхнього розрахунку. Розроблено алгоритм розрахунку функцій вільного режиму цим методом та проведено порівняння ефективності цього алгоритму з чисельними методами розрахунку функцій вільного режиму.

В статье рассмотрен численно-аналитический метод расчета функций свободного режима и выведена аналитическая формула для их расчета. Разработан алгоритм расчета функций свободного режима и проведено сравнение эффективности этого алгоритма с численными методами расчета функций свободного режима.

Пристрої силової електроніки широко застосовуються для комутації електричних кіл, регулювання та перетворення параметрів електричної енергії. Оскільки для таких пристроїв одним з найважливіших параметрів є коефіцієнт корисної дії, силові напівпровідникові прилади в них найчастіше працюють у ключовому режимі. У ввімкненому стані опір цих приладів є значно меншим опору інших елементів, а у вимкненому – значно більшим. Тому при аналізі електромагнітних процесів в таких пристроях найчастіше їх замінюють ідеальними ключами. В результаті одержують електричні ланцюги, параметри або структура яких дискретно змінюється в моменти комутацій. У [2] такі ланцюги названо дискретно-лінійними. Основним методом розрахунку перехідних процесів у цих ланцюгах є метод припасовування [3]. Головним недоліком цього методу є його висока трудомісткість. При аналітичних розрахунках це пов'язано з необхідністю розв'язувати диференційні рівняння на кожному інтервалі між комутаціями і „припасовувати" результати, одержані в кінці попереднього інтервалу до розрахунку наступного інтервалу. Складність розрахунків в значній мірі залежить від того, яким методом одержано рішення на інтервалах.

При використанні чисельних методів для розрахунку квазіусталеного режиму доводиться розглядати весь багатоступінчатий перехідний процес (БПП). При цьому крок інтегрування диференційних рівнянь обмежується умовами стійкості і точності процесу інтегрування.

Для зменшення трудомісткості метода припасовування в [2] запропоновано описувати процеси на інтервалах між комутаціями за допомогою функцій вільного режиму (ФВР) електричного ланцюга. При використанні ФВР розрахунок БПП зводиться до використання рекурентних формул, що значно спрощує розрахунки та зменшує їх трудомісткість. В [1] запропоновано алгоритм прискореного чисельно-аналітичного розрахунку перехідного процесу, при якому процеси на 1-му періоді, зокрема ФВР, розраховуються чисельними методами, а всі інші періоди – аналітичним методом з використанням рекурентних формул. Це дало можливість значно пришвидшити розрахунок БПП, особливо в тих випадках, коли ці процеси тривають значну кількість періодів. При невеликій кількості періодів переваги запропонованого алгоритму стають незначними. Це пов'язано з необхідністю розрахунку числових значень ФВР для 1-го періоду. Оскільки це обчислення здійснюється чисельними методами з невеликим кроком інтегрування, воно складає до 90% часу, необхідного для розрахунку всього БПП [1]. Тому для підвищення ефективності розрахунку БПП за допомогою ФВР необхідно, в першу чергу, знайти метод, за допомогою якого розрахунок ФВР займатиме менше часу.

Для зменшення часу розрахунку ФВР доцільно застосовувати чисельно-аналітичні методи, які поєднують простоту розрахунків чисельних і ефективність аналітичних методів, що спрощує аналітичні формули розрахунку ФВР та дає змогу розраховувати ФВР ланцюгів вищих порядків. При цьому час розрахунку перехідних процесів збільшиться не значно в порівнянні з аналітичними методами.

Спочатку розглянемо найпростіший випадок – *RL*-ланцюг першого порядку. Як відомо, ФВР такого ланцюга $f_{LL}(t)$ виражається експонентою [2]

$$f_{LL}(t) = e^{-\alpha t}, \tag{1}$$

де α – коефіцієнт затухання; t – час.

Припустимо, що за допомогою розв'язання диференційного рівняння чисельним методом знайдено значення цієї ФВР в момент часу t_1:

$$f_{LL}(t_1) = x. \tag{2}$$

Прирівнявши (1) і (2) при t=t_1, отримаємо

$$e^{-\alpha \cdot t_1} = x. \tag{3}$$

Піднесемо праву і ліву частину рівняння (3) до степеня z. Тоді отримаємо

$$e^{-\alpha (z \cdot t_1)} = x^z. \tag{4}$$

З рівняння (4) видно, що аргументом аналітичного виразу ФВР стало значення $z \cdot t_1$, тобто операцією піднесення до степеня z обчислюється значення ФВР в точці $z \cdot t_1$

$$f_{LL}(z \cdot t_1) = x^z. \tag{5}$$

Таким чином, в ланцюгу першого порядку, визначивши одне числове значення ФВР, усі кратні значення знаходять аналітично.

Розглянемо можливість розрахунку ФВР чисельно-аналітичним методом в ланцюгах вищих порядків. Для наочності візьмемо LC-ланцюг другого порядку.

Вільний процес у такому ланцюгу описується формулами [2]:

$$\begin{cases} i_L(t) = I_0 \cdot f_{LL}(t) + U_0 \cdot f_{LC}(t); \\ u_C(t) = I_0 \cdot f_{CL}(t) + U_0 \cdot f_{CC}(t), \end{cases} \tag{6}$$

де I_0, U_0 – початкові умови.

Для розрахунку ФВР f_{LL} і f_{CL} в такому ланцюгу задається початковий струм I_0=1 А і початкова напруга U_0=0 В, тоді виконується рівність:

$$\begin{cases} i_{L1}(t) = f_{LL}(t); \\ u_{C1}(t) = f_{CL}(t). \end{cases} \tag{7}$$

Для розрахунку ФВР f_{CC} і f_{LC} в LC-ланцюгу задається початковий струм I_0=0 А і початкова напруга U_0=1 В. За цих початкових умов справедлива рівність

$$\begin{cases} i_{L2}(t) = f_{LC}(t); \\ u_{C2}(t) = f_{CC}(t). \end{cases} \tag{8}$$

Уявимо, що є два ідентичні LC-ланцюги. В першому ланцюгу ми задали початкові умови I_0=1 А і U_0=0 В для розрахунку ФВР f_{LL} і f_{CL}. В другому – I_0=0 А і U_0=1 В для розрахунку ФВР f_{CC} і f_{LC}.

Припустимо, що в цих ланцюгах у момент часу t=0 одночасно почався вільний процес. Розрахуємо числові значення ФВР у момент часу $2t_1$ через відомі числові значення ФВР в момент часу t_1. Через те, що в ланцюгах були задані одиничні початкові умови, то числові значення ФВР тотожньо рівні відповідним змінним стану.

Позначимо числові значення ФВР в момент часу t_1 таким чином:

$$f_{LL}(t_1) = i_{L1}(t_1) = a_1; \qquad f_{CL}(t_1) = u_{C1}(t_1) = b_1; \tag{9,10}$$

$$f_{LC}(t_1) = i_{L2}(t_1) = a_2; \qquad f_{CC}(t_1) = u_{C2}(t_1) = b_2. \tag{11,12}$$

Зафіксуємо момент часу t_1 і припустимо, що вільний процес починається саме з цього моменту часу при ненульових початкових умовах a_1, b_1, a_2, b_2. Тоді перехідний процес у першому ланцюгу описується формулами

$$\begin{cases} i_{L1}(t+t_1) = a_1 \cdot f_{LL}(t) + b_1 \cdot f_{LC}(t); \\ u_{C1}(t+t_1) = a_1 \cdot f_{CL}(t) + b_1 \cdot f_{CC}(t), \end{cases} \tag{13}$$

а у другому –

$$\begin{cases} i_{L2}(t+t_1) = a_2 \cdot f_{LL}(t) + b_2 \cdot f_{LC}(t); \\ u_{C2}(t+t_1) = a_2 \cdot f_{CL}(t) + b_2 \cdot f_{CC}(t). \end{cases} \tag{14}$$

Підставимо до (13) і (14) замість числових значень початкових умов другого періоду ФВР з формул (9)–(12).Тоді перший і другий ланцюг відповідно:

$$\begin{cases} i_{L1}(t+t_1) = f_{LL}(t_1) \cdot f_{LL}(t) + f_{CL}(t_1) \cdot f_{LC}(t); \\ u_{C1}(t+t_1) = f_{LL}(t_1) \cdot f_{CL}(t) + f_{CL}(t_1) \cdot f_{CC}(t). \end{cases} \quad \begin{cases} i_{L2}(t+t_1) = f_{LC}(t_1) \cdot f_{LL}(t) + f_{CC}(t_1) \cdot f_{LC}(t); \\ u_{C2}(t+t_1) = f_{LC}(t_1) \cdot f_{CL}(t) + f_{CC}(t_1) \cdot f_{CC}(t). \end{cases} \tag{15,16}$$

Через те, що перехідній процес у цих ланцюгах починався з ненульових початкових умов, то за своїм фізичним змістом змінні стану ланцюгів i_{L1}, u_{C1}, i_{L2}, u_{C2} є відповідними ФВР (7, 8), тому, замінивши змінні стану на відповідні ФВР, будемо мати:

$$\begin{cases} f_{LL}(t+t_1) = f_{LL}(t_1)\cdot f_{LL}(t) + f_{CL}(t_1)\cdot f_{LC}(t); \\ f_{CL}(t+t_1) = f_{LL}(t_1)\cdot f_{CL}(t) + f_{CL}(t_1)\cdot f_{CC}(t); \\ f_{LC}(t+t_1) = f_{LC}(t_1)\cdot f_{LL}(t) + f_{CC}(t_1)\cdot f_{LC}(t); \\ f_{CC}(t+t_1) = f_{LC}(t_1)\cdot f_{CL}(t) + f_{CC}(t_1)\cdot f_{CC}(t). \end{cases} \tag{17}$$

За допомогою формул (17) значення ФВР у момент часу t+t_1 знаходяться через значення ФВР у моменти часу t і t_1, тобто ця формула дає можливість отримати величину ФВР в деякий на-ступний момент часу, знаючи величини ФВР у попередні моменти часу. Але в формулі (17) є не тіль-ки числові, а й аналітичні вирази ФВР. Для того, щоб їх позбутися, потрібно підставити замість аналітичних виразів ФВР їхні числові значення. Вони відомі лише в момент часу t_1, тому підставляємо їх:

$$\begin{cases} f_{LL}(2\cdot t_1) = f_{LL}(t_1)\cdot f_{LL}(t_1) + f_{CL}(t_1)\cdot f_{LC}(t_1); \\ f_{CL}(2\cdot t_1) = f_{LL}(t_1)\cdot f_{CL}(t_1) + f_{CL}(t_1)\cdot f_{CC}(t_1); \\ f_{LC}(2\cdot t_1) = f_{LC}(t_1)\cdot f_{LL}(t_1) + f_{CC}(t_1)\cdot f_{LC}(t_1); \\ f_{CC}(2\cdot t_1) = f_{LC}(t_1)\cdot f_{CL}(t_1) + f_{CC}(t_1)\cdot f_{CC}(t_1). \end{cases} \tag{18}$$

При розрахунках за формулою (18) отримано числові значення ФВР в момент часу $2t_1$. Для знаходження значень ФВР в момент часу zt_1, де z – будь-яке натуральне число, в формулу (17) необхідно підставити $t=(z-1)\cdot t_1$.

Узагальнимо чисельно-аналітичний метод на ланцюги будь-якого порядку. Візьмемо ланцюг n-ого порядку з i індуктивностями та j ємностями ($n=i+j$). Для наочності введемо наскрізну нумерацію реактивних елементів: порядковий номер індуктивностей буде співпадати з їхнім позначенням на електричній схемі ланцюга, а нумерація ємностей зміщена на кількість індуктивностей i.

В формулі (17) значення ФВР в точці t_1 – це відповідні значення змінних стану ланцюга ((9)-(12)). Тому для узагальнення формул чисельно-аналітичного методу потрібно записати рекуренті формули вільного процесу, а потім струми та напруги реактивних елементів у цих формулах замінити на відповідні значення ФВР. Зробивши цю заміну, отримаємо узагальнену формулу розрахунку ФВР:

$$f_{ab}(t+t_1) = \sum_{l=1}^{n} f_{al}(t)\cdot f_{lb}(t_1)\,. \tag{19}$$

Аналіз формул (20) і (21) показав, що їх можна записати у матричному вигляді. Кожна з матриць складається з усіх ФВР ланцюга. Структура і порядок запису ФВР у матрицях будь-якого порядку однакова. Загальний вигляд цієї матриці:

$$F(t) = \left(\begin{array}{cc|cc} f_{11}(t) & f_{12}(t) & f_{1(n-1)}(t) & f_{1n}(t) \\ f_{21}(t) & f_{22}(t) & f_{2(n-1)}(t) & f_{2n}(t) \\ \hline f_{(n-1)1}(t) & f_{(n-1)2}(t) & f_{(n-1)(n-1)}(t) & f_{(n-1)n}(t) \\ f_{n1}(t) & f_{n2}(t) & f_{n(n-1)}(t) & f_{nn}(t) \end{array}\right). \tag{20}$$

Матрична форма рівнняння (19) має такий вигляд:

$$F(t+t_1) = F(t)\cdot F(t_1)\,. \tag{21}$$

З аналізу формули (21) видно, що для знаходження значень ФВР у точці t+t_1, потрібно матрицю значень ФВР $F(t)$ домножити на матрицю значень ФВР $F(t_1)$. Тобто матриця $F(t_1)$ виконує функцію зміщення числових значень ФВР на час t_1.

Для практичних розрахунків замість невизначеного часу t підставляється час, кратний t_1.

$$F(z\cdot t_1) = F(t_1)^z\,. \tag{22}$$

Формула (22) показує можливість знаходження числових значень ФВР в точках, кратних t_1, піднесенням до відповідного степеня матриці $F(t_1)$.

Порівняємо формули (5) і (22), які отримані для розрахунку ФВР в ланцюгах першого і вищих порядків відповідно. Аналіз показує, що вони аналогічні, але записані в різній формі: формула (5) – у скалярній, формула (22) – у матричній. Це свідчить про універсальність застосування формул (21), (22) для ланцюгів будь-якого порядку, тому задача знаходження чисельно-аналітичного методу для розрахунку ФВР вирішена.

Проаналізуємо фізичний смисл отриманих формул. У формулі (21) привертає увагу те, що для розрахунку ФВР потрібно мати лише значення цих же ФВР у деякий попередній момент часу. Цей факт потребує пояснення. Справа в тому, що формули чисельно-аналітичного методу базуються на рекурентних формулах розрахунку вільного процесу з одиничними початковими умовами. Причому розглядається n (n – кількість реактивних елементів) вільних процесів одночасно, в кожному з яких одиничні початкові умови має один із реактивних елементів, а всі інші реактивні елементи мають нульові початкові умови. Тому лише матриця $F(t)$ має фізичний смисл ФВР, а матриця $F(t_1)$ має фізичний смисл числових значень струмів і напруг в моменти комутації. Але за даних умов ці струми і напруги тотожні з відповідними ФВР. Слід зауважити, що тотожність у значеннях ФВР і струмів та напруг перемикання спостерігається лише за одиничних початкових умов, при будь-яких інших початкових умовах ці значення відрізняються. Це свідчить про те, що ФВР повністю описують перерозподіл струмів і напруг в електричному ланцюзі.

Формула (22) цілком може використовуватися для розрахунків. Але для її ефективного використання слід застосовувати алгоритми швидкого піднесення матриць до степеня. Для більш глибокого розуміння шляхів підвищення ефективності розрахунків за формулою (22) проаналізуємо вади чисельних методів, що знижують ефективність розахунку ФВР.

Основним недоліком чисельних методів є великий обсяг проміжних розрахунків. Припустимо, що для аналізу перехідного процесу необхідно розрахувати числові значення ФВР в k точках t_1, $t_2 ... t_k$ з постійним кроком $\Delta t_P = t_m - t_{m-1}$, а крок інтегрування диференційних рівнянь – Δt_i. На практиці $\Delta t_P >> \Delta t_i$, тому обсяг проміжних обчислень при використанні чисельних методів дуже великий. Для його оцінки розрахуємо ефективність чисельних методів. Під ефективністю будемо розуміти співвідношення кількості точок N_P, в яких потрібно розрахувати числові значення ФВР, до загальної кількості точок $N_Ч$, в яких виконувались розрахунки. Чим більша ефективність, тим менша кількість проміжних розрахунків. В ідеальному випадку, коли числові значення ФВР розраховуються лише в потрібних точках, ефективність розрахунку дорівнювала б одиниці – $e_{ІД}=1$. Ідеальну ефективність мають аналітичні методи розрахунку. У даному випадку ефективність розрахунку ФВР чисельним методом складає

$$e_{ЧМ} = \frac{N_P}{N_Ч} = \frac{k}{k \cdot \Delta t_P / \Delta t_I} = \frac{\Delta t_i}{\Delta t_P}. \tag{23}$$

Збільшення кроку інтегрування призводить до збільшення ефективності, але точність розрахунків при цьому зменшується. Якщо при розрахунках числових значень ФВР чисельно-аналітичним методом формулу (22) використовувати безпосередньо, то ефективність розрахунку ФВР буде такою самою, як і при використанні чисельних методів, бо кількість проміжних точок при розрахунках не зменшиться. Для збільшення ефективності розрахунків використаємо одну з переваг чисельно-аналітичних методів – скорочення проміжних обчислень.

Справді, використовуючи формулу (22), значення ФВР можна обчислювати не послідовно, а в точках по степені числа два: $t_{i(1)}$, $t_{i(2)}$, $t_{i(4)}$, $t_{i8} ... t_{i(2^z)}$. При використанні цього підходу для зменшення проміжних розрахунків потрібно, щоб перша точка, в якій потрібно розрахувати ФВР, співпадала з рядом точок по степені числа два:

$$t_1 = t_{i\,(2^z)}, \tag{24}$$

де z – будь-яке натуральне число.

При використанні цього підходу застосовується такий алгоритм знаходження числових значень ФВР: – обчислення чисельним методом значень ФВР в точці $t_{i(1)}$; – обчислення значень ФВР у проміжних точках по степеням числа два $t_{i(2)}$, $t_{i(4)}$, $t_{i8} ... t_{i(2^z)}$ та знаходження значень ФВР в першій точці $t_{i(2^z)} = t_1$, числові значення в якій потрібні для подальших розрахунків; – обчислення значень ФВР у потрібних точках: t_2, $t_3 ... t_k$.

Використання такого алгоритму значно зменшує обсяг проміжних обчислень. Проміжні обчислення будуть лише до обчислення значень ФВР в першій потрібній точці t_1. До того ж їхній обсяг значно менший, ніж при використанні чисельних методів. При обчисленні значень ФВР у всіх наступних точках проміжних обчислень взагалі не буде.

Розглянемо ефективність цього алгоритму у порівнянні з чисельним методом першого порядку. На етапах 1 і 2 числові значення ФВР розраховуються в z+1 точці. При цьому z перших точок є проміжними і лише числові значення ФВР останньої точки будуть використовуватись. Тому ефективність розрахунку ФВР чисельно-аналітичним методом на етапах 1 і 2 складає

$$e_{ЧА1,2} = \left(z+1\right)^{-1}, \tag{25}$$

де z – показник степеня у формулі (24).

Збільшення ефективності розрахунку ФВР на цих етапах у порівнянні з чисельними методами обчислюється за формулою

$$\frac{e_{ЧА1,2}}{e_{Ч}} = \frac{\Delta t_P}{\Delta t_i} \cdot \frac{1}{z+1} = \frac{2^Z}{z+1}. \tag{26}$$

На третьому етапі ФВР розраховується тільки в потрібних точках, тобто ефективність на цьому етапі дорівнює 1. Зважаючи на це, сумарна ефективність цього алгоритму:

$$e_H = k/(z+k+1), \tag{27}$$

де k – кількість точок, в яких необхідно розрахувати ФВР.

З формули (27) видно, що даний алгоритм дозволяє значно ефективніше знаходити числові значення ФВР, а при великій кількості точок, в яких необхідно розрахувати значення ФВР, ефективність цього алгоритму наближається до ідеальної.

Оцінимо збільшення ефективності розрахунку БПП (багатоступінчатого перехідного процесу) за допомогою ФВР при використанні чисельно- аналітичного методу. При розрахунку БПП із знаходженням значень ФВР чисельним інтегруванням найтрудомісткішою операцією є обчислення числових значень ФВР. На це витрачається більше 90% часу [1]. Змінні стану обчислюються за рекурентними формулами лише в потрібних точках, ефективність цього етапу дорівнює одиниці. Тому ефективність методики розрахунку БПП визначається етапом розрахунку ФВР. Ефективність розрахунку ФВР така ж, як при розрахунку перехідних процесів методом чисельного інтегрування і визначається формулою (23). Тобто при використанні чисельно-аналітичного методу підвищено ефективність найтрудомісткішого етапу розрахунку БПП. Тому, в першому наближенні, можна вважати, що ефективність розрахунку БПП збільшилася пропорційно збільшенню ефективності розрахунку ФВР. Це свідчить про значне скорочення часу розрахунку БПП у дискретно-лінійних ланцюгах.

Алгоритм розрахунку перехідних процесів чисельно-аналітичним методом доцільно використовувати і для лінійних ланцюгів. До застосування чисельно-аналітичного методу розрахунку ФВР цей підхід був неефективним у порівнянні з чисельними методами, бо кожну ФВР необхідно було розрахувати чисельним методом, на що витрачалося стільки ж часу як і на розрахунок перехідного процесу в цьому лінійному ланцюгу.

Перевіримо доцільність застосування методики з використанням ФВР для розрахунку перехідних процесів в лінійних ланцюгах при використанні чисельно-аналітичного методу розрахунку ФВР. Для цього розглянемо ланцюг порядку n. Нехай перехідний процес для нього треба розрахувати в k точках. Співвідношення часового інтервалу між сусідніми точками і кроку інтегрування $\Delta t_P / \Delta t_i = 2^Z$. Тоді кожна ФВР обчислюється в $z+k$ точках.

Для розрахунку числових значень усіх ФВР потрібно провести обчислення в $n^2 \cdot (z+k)$ точках. Рекурентні формули застосовують в k точках. Будемо вважати трудомісткість обчислення рекурентних формул і числових значень ФВР однаковими. Тоді загалом потрібно провести обчислення в такій кількості точок:

$$N_{ЧА} = n^2 \cdot (z+k) + k. \tag{28}$$

При використанні чисельного методу обчислення необхідно провести у кількості точок

$$N_Ч = k \cdot n \cdot \Delta t_P / \Delta t_i. \tag{29}$$

Для прикладу розглянемо ланцюг порядку n=6. Нехай перехідний процес для нього потрібно розрахувати в k=1000 точках. Співвідношення часового інтервалу між сусідніми точками і кроку інтегрування $\Delta t_P / \Delta t_i = 2^{10} = 1024$, ($z$=10).

Підставивши ці числові значення до формул (28) і (29) і поділивши їх одна на одну, отримаємо приріст швидкості розрахунку перехідного процесу чисельно-аналітичним методом. За таких умов швидкість розрахунку перехідного процесу зростає в 164 рази.

Завдяки високій ефективності розрахунку ФВР чисельно-аналітичним методом розрахунок перехідних процесів в лінійних та дискретно-лінійних ланцюгах займає значно менше часу, тому цей метод розрахунку потребує подальших досліджень, зокрема, стосовно точності отриманих результатів та факторів, які на неї впливають.

1. *Жуйков В.Я., Ромашко В.Я., Вербицький Є.В.* Ефективніть розрахунку багатоступінчатого перехідного процесу з використанням функцій вільного режиму в середовищі MatLab. // Техн. електродинаміка. Тем. вип. „Силова електроніка та енергоефективність". – 2009. – Ч. 2. – С. 78–81.

2. *Ромашко В.Я.* Дискретно-лінійні електричні ланцюги. Теорія та розрахунок. – К.:Аверс, 2005. – 175с.

3. *Тонкаль В.Е., Руденко В.С., Жуйков В.Я.* Вентильные преобразователи переменной структуры. – К.: Наукова думка, 1989. – 336 с.

Надійшла 21.10.2009