УДК 519.85

О.А. ЕМЕЦ, Т.Н. БАРБОЛИНА

О СВОЙСТВАХ ЛИНЕЙНОЙ БЕЗУСЛОВНОЙ ЗАДАЧИ КОМБИНАТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ НА РАЗМЕЩЕНИЯХ С ВЕРОЯТНОСТНОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬЮ

Аннотация. Установлено необходимое условие решения линейной безусловной евклидовой задачи комбинаторной оптимизации на размещениях при условии положительности коэффициентов целевой функции. Полученные результаты использованы для установления свойств решения линейной безусловной задачи оптимизации на размещениях для случая, когда в задании допустимого множества имеет место вероятностная неопределенность и минимум определяется в соответствии с линейным порядком, введенным на множестве дискретных случайных величин: сформулировано и обосновано условие, которое может быть положено в основу поиска решениия, и рассмотрены способы построения решения в некоторых частных случаях.

Ключевые слова: вероятностная неопределенность, дискретная случайная величина, евклидова задача комбинаторной оптимизации, задача оптимизации на размещениях.

ВВЕДЕНИЕ

Актуальным направлением современной теории оптимизации является исследование задач комбинаторной природы — как общих свойств задач комбинаторной оптимизации, так и методов решения отдельных классов задач, в частности евклидовых задач комбинаторной оптимизации (например, [1–7]). Однако широкая библиография посвящена решению оптимизационных задач с учетом различных видов неопределенности, в том числе вероятностной [8–13]. Объединение указанных направлений представлено в работах, например [14–17], в которых рассматривается решение задач комбинаторной оптимизации с интервальной или нечеткой неопределенностью.

При этом отметим, что оптимизационные задачи комбинаторной природы с вероятностной неопределенностью исследованы мало. При построении моделей задач стохастической оптимизации возникает вопрос: какое решение можно считать допустимым и каким образом определять лучшее решение? Существуют различные подходы к формированию как условий, так и критериев: жесткие постановки [9, 10], вероятностные ограничения и квантильная оптимизация [11, 12], модели со статистическими условиями [10], поиск экстремума математического ожидания значения функции, минимизация отклонения целевой функции от заданного значения и др.

Следует отметить, что достаточно широкий класс стохастических моделей может быть записан в однообразной форме минимизации математического ожидания целевой функции в некоторой области [10]. При этом такой подход не дает возможности сравнивать различные решения, для которых значения математического ожидания целевой функции одинаковы. Такие ситуации нередко возникают, например, в задачах комбинаторной оптимизации. Поэтому целесообразно ставить вопрос об уточнении критерия.

Для оптимизационных задач интервальной и нечеткой оптимизации был предложен подход, основанный на введении отношения порядка [14, 15]. В настоящей статье рассматривается решение одного класса оптимизационных задач с комбинаторными условиями и вероятностной неопределенностью, постановка которого основывается на введении порядка на множестве дискретных случайных величин.

СВОЙСТВА ЛИНЕЙНОЙ БЕЗУСЛОВНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ НА РАЗМЕЩЕНИЯХ

Рассмотрим необходимые понятия и определения евклидовой комбинаторной оптимизации, основываясь преимущественно на результатах из [1]. В частности, под мультимножеством G понимаем совокупность элементов, среди которых могут быть и одинаковые. Любое мультимножество $G=\{g_1, \ldots, g_\eta\}$ можно задать, используя его основу $S(G)$, т.е кортеж всех его различных элементов, и кратность — число повторов каждого элемента основы. Кортеж кратностей называют первичной спецификацией и обозначают $[G]$. Евклидовым комбинаторным множеством называют множество, элементы которого представляют различные упорядоченные k-выборки из G вида

$$(g_{i_1}, g_{i_2}, \ldots, g_{i_k}), \tag{1}$$

$g_{i_j} \in G$, $i_j \neq i_t$ $\forall i_j, i_t \in J_\eta$, $\forall j, t \in J_k$ (здесь и далее J_n обозначено множество n первых натуральных чисел). Примерами евклидовых комбинаторных множеств являются:

- общее множество размещений $E_\eta^k(G)$, представляющее множество всех k-выборок вида (1) из мультимножества G;
- общее множество перестановок $E_k(G)$, представляющее множество всех выборок вида (1) из мультимножества G при условии $k=\eta$.

Введение понятия евклидового комбинаторного множества позволяет выделить из задач комбинаторной природы класс задач, в которых допустимое множество является евклидовым комбинаторным множеством. В частности, евклидова безусловная задача оптимизации на размещениях с линейной целевой функцией состоит в нахождении экстремума $L(x^*)$ и экстремали x^* функции $L(x)=\sum_{j=1}^{k} c_j x_j$, т.е. пары $\langle L(x^*), x^*\rangle$ такой, что

$$L(x^*)=\operatorname*{extr}_{x\in E_\eta^k(G)} \sum_{j=1}^{k} c_j x_j, \quad x^* = \operatorname*{argextr}_{x\in E_\eta^k(G)} \sum_{j=1}^{k} c_j x_j, \tag{2}$$

где $x=(x_1, \ldots, x_k)\in R^k$, $c_j \in R^1$, $c_j>0$ $\forall j\in J_k$. Будем полагать, что элементы мультимножества $G=\{g_1, \ldots, g_\eta\}$ являются неотрицательными действительными числами и упорядочены по неубыванию:

$$0\le g_1 \le \ldots \le g_\eta, \tag{3}$$

коэффициенты целевой функции упорядочены по невозрастанию, причем мультимножество $\{c_1, c_2, \ldots, c_k\}$ имеет основу $(\bar{c}_1, \ldots, \bar{c}_s)$ и первичную спецификацию $(\bar{q}_1, \ldots, \bar{q}_s)$ (т.е. число разных коэффициентов целевой функции составляет s, причем $\bar{q}_i$ коэффициентов равны $\bar{c}_i$). Обозначим $q_1=1$, $q_i=q_{i-1}+\bar{q}_i=1+\sum_{j=1}^{i} q_j$ для $2\le i< s+1$; тогда

$$c_{q_1}=\ldots=c_{q_2-1}>c_{q_2}=\ldots=c_{q_3-1}>\ldots>c_{q_s}=\ldots=c_k>0. \tag{4}$$

Рассмотрим задачу (2) на размещениях и эквивалентную ей задачу на перестановках: найти пару $\langle \bar{L}(y^*), y^*\rangle$ такую, что

$$\bar{L}(y^*)=\operatorname*{extr}_{y\in E_\eta(G)} \sum_{j=1}^{\eta} c_j y_j, \quad y^* = \operatorname*{argextr}_{y\in E_\eta(G)} \sum_{j=1}^{\eta} c_j y_j, \tag{5}$$

где $y=(y_1, \ldots, y_\eta)\in R^\eta$, $c_{k+1}=\ldots=c_\eta=0$. Поскольку коэффициенты функции $\bar{L}(y)$ упорядочены по невозрастанию, согласно теореме 368 [18, с. 314–315] функция $\bar{L}(y)$ принимает минимальное значение при $y_1\le\ldots\le y_\eta$, а максимальное — при $y_1\ge\ldots\ge y_\eta$. Учитывая, что $y\in E_\eta(G)$, причем элементы мультимножества G удовлетворяют условию (3), минималью функции $\bar{L}(y)$ является точка $y_i^*=g_i$ $\forall i\in J_\eta$, а максималью — точка $\tilde{y}_i=g_{\eta-i+1}$ $\forall i\in J_\eta$.

Тогда минималью функции $L(x)$ на множестве $E_\eta^k(G)$ является точка

$$x_i^* = g_i \quad \forall i \in J_k, \tag{6}$$

а максималью — точка

$$\tilde{x}_i = g_{\eta-i+1} \quad \forall i \in J_k. \tag{7}$$

Ранее не рассматривался вопрос о наличии экстремалей функции $L(x)$ на множестве $E_\eta^k(G)$, отличных от точек (6) и (7). Как известно [1], множество вершин выпуклой оболочки множества $E_\eta^k(G)$ — общего многогранника размещений $\Pi_\eta^k(G)$, является подмножеством множества $E_\eta^k(G)$. В [1] также приведен критерий вершины: точка $x \in \Pi_\eta^k(G)$ является вершиной общего многогранника размещений тогда и только тогда, когда ее компоненты являются перестановками чисел $g_1, \ldots, g_p, g_{\eta-r+1}, \ldots, g_\eta$, где $0 \le p \le k$, $0 \le r \le k$, $p+r=k$.

Пусть для смежных вершин x и $\bar{x}$ общего многогранника размещений выполняется условие $L(x) = L(\bar{x})$. Согласно критерию смежности вершин общего многогранника размещений [1] вершина x смежна с вершиной $\bar{x}$, если она получена из вершины $\bar{x}$ перестановкой компонент, равных элементам g_t, g_{t+1} ($g_t \ne g_{t+1}$, $t \in J_{p-1}$, $i \in J_{\eta-1} \setminus J_{\eta-r}$), или заменой g_p ($g_{\eta-r+1}$) на $g_{\eta-r}$ (g_{p+1}) при условии $g_p \ne g_{\eta-r}$ ($g_{\eta-r+1} \ne g_{p+1}$), $0 \le p \le k$, $0 \le r \le k$, $p+r=k$. Если вершина x получена из $\bar{x}$ заменой $\bar{x}_i = g_p$ на $x_i = g_{\eta-r}$, то

$$L(\bar{x}) - L(x) = \sum_{j=1}^{k} c_j(\bar{x}_j - x_j) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{k} c_j(\bar{x}_j - x_j) + c_i(g_p - g_{\eta-r}) \ne 0,$$

так как $\bar{x}_j = x_j$ $\forall j \ne i$, $\forall j \in J_k$, $g_p \ne g_{\eta-r}$, $c_j > 0$ $\forall j \in J_k$. Тот же результат имеем при замене $\bar{x}_i = g_{\eta-r+1}$ на $x_i = g_{p+1}$. В случае, когда вершина x получена из $\bar{x}$ перестановкой компонент $\bar{x}_i = g_t$ и $\bar{x}_q = g_{t+1}$ ($g_t \ne g_{t+1}$), получаем

$$L(\bar{x}) - L(x) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne i;\, j \ne q}}^{k} c_j(\bar{x}_j - x_j) + c_i(\bar{x}_i - x_i) + c_q(\bar{x}_q - x_q) = c_i(\bar{x}_i - x_i) + c_q(\bar{x}_q - x_q).$$

Так как $\bar{x}_i = x_q, \bar{x}_q = x_i$, то $L(\bar{x}) = L(x)$, если $(\bar{x}_i - x_i)(c_i - c_q) = 0$. Учитывая, что $\bar{x}_i \ne x_i$, получаем $c_i = c_q$.

Таким образом, если для смежных вершин x и $\bar{x}$ общего многогранника размещений выполняется условие $L(x) = L(\bar{x})$, то коэффициенты целевой функции, соответствующие неодинаковым по значениям элементам $x_i \ne \bar{x}_i$, $x_q \ne \bar{x}_q$, равны: $c_i = c_q$.

Пусть точки $\bar{x}$ и x^* являются экстремалями функции $L(x)$. Это означает, что найдется последовательность вершин $x^1, \ldots, x^r$ таких, что x^i, x^{i+1}, $i \in J_{r-1}$, являются смежными вершинами и $L(x^1) = \ldots = L(x^r)$. Тогда для каждого индекса l такого, что $\bar{x}_l \ne x_l^*$, найдется такое множество индексов $I = \{i_1, \ldots, i_p\}$, что $c_{i_1} = \ldots = c_{i_p}$ и мультимножества $\{\bar{x}_{i_1}, \ldots, \bar{x}_{i_p}\}$ и $\{x_{i_1}^*, \ldots, x_{i_p}^*\}$ равны. Тогда также равны мультимножества $\{\bar{x}_{q_w}, \ldots, \bar{x}_{q_{w+1}-1}\}$ и $\{x_{q_w}^*, \ldots, x_{q_{w+1}-1}^*\}$, где $I \subset \{q_w, \ldots, q_{w+1}-1\}$. Иными словами, $(\bar{x}_{q_w}, \ldots, \bar{x}_{q_{w+1}-1}) \in E_{m_w}(G^w)$, где $G^w = \{x_{q_w}^*, \ldots, x_{q_{w+1}-1}^*\}$, $m_w = |G^w|$. Учитывая, что точки (6) и (7) являются экстремалями в задаче (2), получаем $G^w = \{g_{q_w}, \ldots, g_{q_{w+1}-1}\}$ для задач минимизации и $G^w = \{g_{\eta-q_{w+1}+2}, \ldots, g_{\eta-q_w+1}\}$ — для задач максимизации.

Таким образом, получено необходимое и достаточное условие того, что точка x дает решение задачи (2).

Теорема 1. Точка x^* дает решение задачи (2), в которой для коэффициентов целевой функции и элементов мультимножества выполняются неравенства (4) и (3) соответственно, тогда и только тогда, когда она удовлетворяет условиям

$$(x^*_{q_w}, \ldots, x^*_{q_{w+1}-1}) \in E_{m_w}(G^w) \ \ \forall w \in J_s ,$$

где $m_w = |G^w|$, $G^w = \{g_{q_w}, \ldots, g_{q_{w+1}-1}\}$ для задач минимизации и $G^w = \{g_{\eta - q_{w+1}+2}, \ldots, g_{\eta - q_w + 1}\}$ для задач максимизации.

Замечание. Если элементы мультимножества G упорядочены по невозрастанию, то в теореме 1 $G^w = \{g_{q_w}, \ldots, g_{q_{w+1}-1}\}$ для задач максимизации и $G^w = \{g_{\eta - q_{w+1}+2}, \ldots, g_{\eta - q_w+1}\}$ для задач минимизации.

Если среди коэффициентов целевой функции нет равных, то G^w являются одноэлементными множествами, а значит, каждая координата решения определяется однозначно и имеет место такое утверждение.

Следствие 1. Если для коэффициентов целевой функции выполняется условие

$$c_1 > \ldots > c_k > 0 , \tag{8}$$

то задача (2) имеет единственную экстремаль — точку (6) в случае минимизации и точку (7) в случае максимизации.

ПОСТАНОВКА ОПТИМИЗАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ С ВЕРОЯТНОСТНОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬЮ НА РАЗМЕЩЕНИЯХ

Рассмотрим возможный подход к формулированию евклидовых задач комбинаторной оптимизации, если некоторые исходные данные являются дискретными случайными величинами. Последние будем обозначать прописными латинскими буквами $(A, B, \ldots)$, их возможные значения — строчными $(a^i, b^i, \ldots)$. В данной статье полагаем, что для каждой из рассматриваемых дискретных случайных величин существует наименьшее возможное значение. Полагаем также, что возможные значения случайной величины упорядочены по возрастанию, причем наименьшее значение имеет индекс 1.

Пусть $P(\cdot)$ — вероятность случайного события, а $M(A)$ и $D(A)$ — соответственно математическое ожидание и дисперсия случайной величины A. Пусть также на множестве дискретных случайных величин установлен порядок следующим определением.

Определение 1. Будем называть две дискретные случайные величины A и B упорядоченными в возрастающем (величина A предшествует B) порядке $\prec$ (и обозначать как $A \prec B$), если выполняется одно из таких условий:

1) $M(A) < M(B)$;

2) $M(A) = M(B)$ и $D(A) > D(B)$;

3) $M(A) = M(B)$, $D(A) = D(B)$ и найдется такое t, что $a^i = b^i$, $P(A = a^i) = P(B = b^i)$ для всех $1 \le i < t$, при этом:

3.1) $a^t < b^t$

или

3.2) $a^t = b^t$ и $P(A = a^i) > P(B = b^i)$.

Для дискретной случайной величины A сформируем характеристический вектор $H(A) = (M(A); -D(A))$. Будем обозначать $<_l$ лексикографическое упорядочение в m-мерном евклидовом пространстве: для любых $u, u' \in R^m$ имеем $u <_l u'$, если первая ненулевая компонента разности $u - u'$ отрицательна. Если $u <_l u'$ или $u = u'$, то будем записывать $u \le_l u'$. Таким образом, для двух дискретных случайных величин A, B выполняется соотношение $H(A) <_l H(B)$, если $M(A) < M(B)$, или при $M(A) = M(B)$ имеет место неравенство $-D(A) < -D(B)$ (т.е. $D(A) > D(B)$).

С использованием введенного обозначения определение порядка на множестве дискретных случайных величин может быть сформулировано следующим образом.

Определение 2. Назовем две дискретные случайные величины A и B упорядоченными в возрастающем (A предшествует величине B) порядке $\prec$ (и обозначать как $A \prec B$), если $H(A) <_l H(B)$ или при $H(A) = H(B)$ найдется такое t, что $a^i = b^i$, $P(A = a^i) = P(B = b^i)$ для всех $1 \le i < t$, и при этом либо $a^t < b^t$, либо $a^t = b^t$ и $P(A = a^i) > P(B = b^i)$.

Пример 1. Рассмотрим дискретные случайные величины, заданные рядами распределения в соответствии с табл. 1.

Поскольку $M(A_1) = M(A_2) = M(A_3) = 7$, $D(A_1) = 6$, $D(A_2) = D(A_3) = 4$, то характеристические векторы рассматриваемых дискретных случайных величин имеют вид $H(A_1) = (7; -6)$, $H(A_2) = H(A_3) = (7; -4)$. Так как $H(A_1) <_l H(A_2) = H(A_3)$, то в соответствии с определением 2 имеем $A_1 \prec A_2$, $A_1 \prec A_3$. Для величин A_2 и A_3 соответствующие характеристические векторы равны между собой, но $a_2^1 = 4 < a_3^1 = 5$, поэтому $A_2 \prec A_3$.

Определение 3. Будем называть две дискретные случайные величины A, B упорядоченными в неубывающем порядке $\preceq$ (и обозначать как $A \preceq B$), если $A \prec B$ или $A = B$.

Аналогично как и в [16], можно показать, что отношение, введенное в определении 3, является линейным порядком на множестве дискретных случайных величин, причем, как показано в [19], справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. Если для попарно независимых случайных величин $A_1, \ldots, A_n$ и $B_1, \ldots, B_n$ выполняются условия $A_i \preceq B_i$ $\forall i \in J_n$, то $\sum_{i=1}^{n} A_i \preceq \sum_{i=1}^{n} B_i$.

Используя введенный в определении 3 линейный порядок, упорядочим элементы заданного конечного подмножества Ω множества дискретных случайных величин: $X_1 \preceq X_2 \preceq \ldots \preceq X_s$. Максимумом является величина X_s, а минимумом — величина X_1. Определение минимума и максимума дает возможность ставить задачи оптимизации для нахождения экстремальных элементов при заданных условиях. Пусть $X = (X_1, X_2, \ldots, X_k)$ — многомерная случайная величина. Рассмотрим линейную функцию $C(X) = \sum_{j=1}^{k} c_j X_j$, где $c_j \in R^1$, $X_j \in \Omega$ $\forall j \in J_k$, причем значения функции также принадлежат множеству Ω при любых $X_j \in \Omega$ $\forall j \in J_k$. Тогда линейная задача оптимизации на некоторой области Q может быть сформулирована следующим образом: найти пару $\langle C(X^*), X^* \rangle$ такую, что

$$C(X^*) = \min_{X \in Q} \sum_{j=1}^{k} c_j X_j, \quad X^* = \arg\min_{X \in Q} \sum_{j=1}^{k} c_j X_j. \tag{9}$$

Таблица 1

Величина	Ряды распределения случайных величин A_n						
	$i = 1$		$i = 2$			$i = 3$	
Значения A_i	4	9	4	6	9	5	9
Вероятности значений A_i	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

В частности, область Q может быть евклидовым комбинаторным множеством. Далее рассматривается решение задачи (9) в случае, когда Q — общее множество размещений из элементов мультимножества, являющимися независимыми дискретными случайными величинами.

РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ БЕЗУСЛОВНЫХ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ В УСЛОВИЯХ СТОХАСТИЧЕСКОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Пусть элементы мультимножества $\Gamma = \{G_1, \ldots, G_\eta\}$ являются независимыми дискретными случайными величинами с неотрицательным математическим ожиданием, $E_\eta^k(\Gamma)$ — общее множество размещений из элементов мультимножества Γ, $C(X) = \sum_{j=1}^{k} c_j X_j$. Рассмотрим задачу вида (9) при $Q = E_\eta^k(\Gamma)$:

найти пару $\langle C(X^*), X^* \rangle$ такую, что

$$C(X^*) = \min_{X \in E_\eta^k(\Gamma)} \sum_{j=1}^{k} c_j X_j, \quad X^* = \arg\min_{X \in E_\eta^k(\Gamma)} \sum_{j=1}^{k} c_j X_j, \tag{10}$$

где $C(X^*)$ — минимум, а X^* — минималь в задаче (10).

Теорема 3. Если выполняются условия (4) и

$$H(G_1) \le_l \ldots \le_l H(G_\eta), \tag{11}$$

то для одной из минималей X^* в задаче (10) выполняются соотношения

$$H(X_j^*) = H(G_j) \quad \forall j \in J_k. \tag{12}$$

Доказательство проведем по приведенной ниже схеме. Обозначив C^* минимум в задаче (10), покажем:

1) справедливость равенства $M(C(X^*)) = M(C^*)$, где X^* удовлетворяет (12);

2) существование такой точки X', что $C(X') = C^*$, и при этом

$$M(X'_j) = M(G_j) \quad \forall j \in J_k; \tag{13}$$

3) выполнение равенства $D(C(X^*)) = D(C^*)$;

4) существование такой точки X'', удовлетворяющей (13), что $C(X'') = C^*$ и $D(X''_j) = D(G_j) \ \forall j \in J_k$.

Тогда очевидно, что точка X'' удовлетворяет также (12) и является минималью в задаче (10).

Рассмотрим реализацию этой схемы более детально.

1. Для точки $X = (X_1, \ldots, X_k) \in E_\eta^k(\Gamma)$ обозначим $\mu(X) = (M(X_1), \ldots, M(X_k))$. Пусть также $\Gamma^M = \{M(G_1), \ldots, M(G_\eta)\}$. Так как для элементов мультимножества Γ выполняется условие (11), то имеют место неравенства $M(G_1) \le \ldots \le M(G_\eta)$. Тогда согласно теореме 1 точка $\mu(X^*)$, где X^* удовлетворяет (12), дает решение задачи поиска пары $\langle L(\mu(X^*)), \mu(X^*) \rangle$ такой, что

$$L(\mu(X^*)) = \min_{\mu(X) \in E_\eta^k(\Gamma^M)} \sum_{j=1}^{k} c_j M(X_j), \quad \mu(X^*) = \operatorname*{argmin}_{\mu(X) \in E_\eta^k(\Gamma^M)} \sum_{j=1}^{k} c_j M(X_j). \tag{14}$$

Это означает, что для любой точки $\mu(X) \in E_\eta^k(\Gamma^M)$ выполняется неравенство $L(\mu(X^*)) \le L(\mu(X))$, где $L(\mu(X)) = \sum_{j=1}^{k} c_j M(X_j)$.

Учитывая, что $L(\mu(X))=\sum_{j=1}^{k} c_j M(X_j)=M(\sum_{j=1}^{k} c_j X_j)=M(C(X))$, получаем справедливость неравенства $M(C(X^*))\le M(C(X))$ для любой точки $X\in E_\eta^k(\Gamma)$. Однако поскольку C^* — минимум в задаче (10), то $C^*\preceq C(X^*)$, откуда $M(C^*)\le M(C(X^*))$. Таким образом, $M(C(X^*))=M(C^*)$.

2. Покажем теперь существование точки X', для которой выполняются условия $C(X')=C^*$ и равенство (13). Пусть точка $\widetilde{X}$ удовлетворяет условию $C(\widetilde{X})=C^*$ и не удовлетворяет условию (13). Так как $C(\widetilde{X})=C^*$, то также $M(C(\widetilde{X}))=M(C^*)=M(C(X^*))$ и $\mu(\widetilde{X})$ является минималью в задаче (14). Тогда согласно теореме 1 при всех $w\in J_s$ выполняется условие: $(M(\widetilde{X}_{q_w}),\ldots,M(\widetilde{X}_{q_{w+1}-1}))$ есть элемент множества перестановок из элементов мультимножества $\{M(G_{q_w}),\ldots,M(G_{q_{w+1}-1})\}$ (отметим, что индексы q_w таковы, что $c_{q_w}=\ldots$ $\ldots=c_{q_{w+1}-1}$). Следовательно, ряд распределения дискретной случайной величины $\sum_{j=q_w}^{q_{w+1}-1} c_j X_j=\sum_{j=q_w}^{q_{w+1}-1} cX_j$ (где $c=c_{q_w}=\ldots=c_{q_{w+1}-1}$) не зависит от порядка величин X_j, т.е. $\sum_{j=q_w}^{q_{w+1}-1} c\widetilde{X}_j=\sum_{j=q_w}^{q_{w+1}-1} cX'_j$, где $(X'_{q_w},\ldots,X'_{q_{w+1}-1})$ является такой перестановкой элементов мультимножества $\{\widetilde{X}_{q_w},\ldots,\widetilde{X}_{q_{w+1}-1}\}$, для которой $M(X'_{q_w})=M(G_{q_w})$, ..., $M(X'_{q_{w+1}-1})=M(G_{q_{w+1}-1})$. Таким образом, для точки $X'=(X'_1,\ldots,X'_k)$, удовлетворяющей (13), имеем

$$C(X')=\sum_{j=1}^{k} c_j X'_j=\sum_{w=1}^{s}\sum_{j=q_w}^{q_{w+1}-1} c_j X'_j=\sum_{w=1}^{s}\sum_{j=q_w}^{q_{w+1}-1} c_j \widetilde{X}_j=C(\widetilde{X})=C^*.$$

3. Так как элементы мультимножества Γ являются независимыми дискретными случайными величинами, то на допустимом множестве выполняются равенства

$$D(C(X))=D(\sum_{j=1}^{k} c_j X_j)=\sum_{j=1}^{k} c_j^2 D(X_j).$$

Обозначим $\widetilde{L}(x)=\sum_{j=1}^{k} c_j^2 x_j$, $\delta(X)=(D(X_1),\ldots,D(X_k))$. Тогда $D(C(X))=$ $=\widetilde{L}(\delta(X))$. Таким образом, необходимо показать, что $\widetilde{L}(\delta(X^*))=\widetilde{L}(\delta(X'))=$ $=D(C^*)$.

Пусть основа мультимножества Γ^M — кортеж $S(\Gamma^M)=(\overline{M}_1,\ldots,\overline{M}_\sigma,\ldots$ $\ldots,\overline{M}_r)$ (элементы множества $S(\Gamma^M)$ будем считать упорядоченными по возрастанию), первичная спецификация — кортеж $[\Gamma^M]=(n_1,\ldots,n_r)$. Пусть также

$$\eta_1=1,\ \eta_{i+1}=\eta_i+n_i=1+\sum_{j=1}^{i} n_j \ \text{ для } i\in J_r. \tag{15}$$

Так как элементы мультимножества Γ^M упорядочены по неубыванию, то

$$M(G_{\eta_i})=\ldots=M(G_{\eta_i+n_i-1})=\overline{M}_i,\ i\in J_r. \tag{16}$$

Для всех $i\in J_r$ сформируем мультимножества

$$\Gamma_i=\{G_{\eta_i},\ldots,G_{\eta_i+n_i-1}\}. \tag{17}$$

Очевидно, что $|\Gamma_i|=n_i$. Так как точка X' удовлетворяет (13), то $M(X'_{\eta_i})=\ldots=M(X'_{\eta_i+k_i-1})=\overline{M}_i$ для всех $i\in J_\sigma$, где σ определяется из условия $\eta_{\sigma+1}>k$; $k_i=n_i$ для $i\in J_{\sigma-1}$; $k_\sigma=k-\eta_\sigma+1$. Следовательно, $(X'_{\eta_i},\ldots,X'_{\eta_i+k_i-1})\in E_{n_i}^{k_i}(\Gamma_i)$.

Представим целевую функцию следующим образом: $C(X)=\sum_{i=1}^{\sigma}C_i(X)$, где $C_i(X)=\sum_{j=\eta_i}^{\eta_i+k_i-1}c_jX_j$. Обозначим также $\delta_i(X)=(D(X_{\eta_i}),\ldots,D(X_{\eta_i+k_i-1}))$.

Из (4) следует, что $c_1^2\geq\ldots\geq c_k^2\geq 0$. Тогда в соответствии с теоремой 1 $\delta_i(X^*)$ является максималью функции $\widetilde{L}_i(\delta_i(X))=\sum_{j=\eta_i}^{\eta_i+k_i-1}c_j^2D(X_j)$ на множестве $E_{n_i}^{k_i}(\Gamma_i^D)$, где $\Gamma_i^D=\{D(G_{\eta_i}),\ldots,D(G_{\eta_i+n_i-1})\}$ (из условий (11) и (16) следует, что элементы этого мультимножества упорядочены по невозрастанию). Таким образом, $\widetilde{L}_i(\delta_i(X^*))\geq\widetilde{L}_i(\delta_i(X))$ для любой точки $\delta_i(X)\in E_{n_i}(\Gamma_i^D)$, в частности $\widetilde{L}_i(\delta_i(X^*))\geq\widetilde{L}_i(\delta_i(X'))$. Тогда

$$\widetilde{L}(\delta(X^*))=$$
$$=\sum_{j=1}^{k}c_j^2D(X_j^*)=\sum_{i=1}^{\sigma}\sum_{j=\eta_i}^{\eta_i+k_i-1}c_j^2D(X_j^*)=\sum_{i=1}^{\sigma}\widetilde{L}_i(\delta_i(X^*))\geq\sum_{i=1}^{\sigma}\widetilde{L}_i(\delta_i(X'))=\widetilde{L}(\delta(X')),$$

причем равенство имеет место лишь в случае, когда $\widetilde{L}_i(\delta_i(X^*))=\widetilde{L}_i(\delta_i(X'))$ для всех $i\in J_\sigma$. Однако из выражений $M(C(X'))=M(C(X^*))$ и $C(X')=C^*\preceq C(X^*)$ следует выполнение неравенства $D(C(X'))\geq D(C(X^*))$, т.е. $\widetilde{L}(\delta(X'))\geq\widetilde{L}(\delta(X^*))$. Значит, $\widetilde{L}(\delta(X'))=\widetilde{L}(\delta(X^*))$.

4. Так как для точки X^* имеют место равенства $D(X_j^*)=D(G_j)\ \forall j\in J_k$, то остается показать, что найдется точка X'', удовлетворяющая (13), для которой выполняются соотношения $C(X'')=C^*$ и $\delta(X'')=\delta(X^*)$. Из $\widetilde{L}(\delta(X'))=$ $=\widetilde{L}(\delta(X^*))$, как отмечено выше, следует, что $\widetilde{L}_i(\delta_i(X^*))=\widetilde{L}_i(\delta_i(X'))$ для всех $i\in J_\sigma$, т.е. $\widetilde{L}_i(\delta_i(X'))$ является максималью функции $\widetilde{L}_i(\delta_i(X))$ на множестве $E_{n_i}^{k_i}(\Gamma_i^D)$. Предположим, что $\delta_i(X')\neq\delta_i(X^*)$. Рассуждая аналогично п. 2 доказательства, найдется точка X'', удовлетворяющая (13), такая, что $\delta_i(X'')=\delta_i(X^*)$ и $C_i(X')=C_i(X'')$. Тогда также $\delta(X'')=\delta(X^*)$ и $C(X'')=C^*$. Таким образом, минималь X'' в задаче (10) удовлетворяет условиям $H(X''_j)=H(X_j^*)=H(G_j)\ \ \forall j\in J_k$. Теорема доказана.

Пример 2. Рассмотрим задачу (10), если $C(X)=2X_1+X_2+X_3$, мультимножество $\Gamma=\{A_1,A_1,A_2,A_3\}$, где случайные величины A_1,A_2,A_3 заданы рядами распределения в соответствии с табл. 1. Общее множество размещений $E_\eta^k(\Gamma)$ $(k=3,\ \eta=4)$ содержит следующие элементы:

$$X^1=(A_1,A_1,A_2),\ X^2=(A_1,A_1,A_3),\ X^3=(A_1,A_2,A_1),$$
$$X^4=(A_1,A_2,A_3),\ X^5=(A_1,A_3,A_1),\ X^6=(A_1,A_3,A_2),$$
$$X^7=(A_2,A_1,A_1),\ X^8=(A_2,A_1,A_3),\ X^9=(A_2,A_3,A_1),$$
$$X^{10}=(A_3,A_1,A_1),\ X^{11}=(A_3,A_1,A_2),\ X^{12}=(A_3,A_2,A_1).$$

В соответствии с теоремой 3 для одной из минималей задачи выполняется условие $H(X_1)=H(X_2)=H(A_1)$, $H(X_3)=H(A_2)$. Так как $H(A_2)=H(A_3)$ (см. пример 1), то этому условию удовлетворяют точки X^1 и X^2. При этом $C(X^1)=2A_1+A_1+A_2$, $C(X^2)=2A_1+A_1+A_3$, и так как $A_2 \prec A_3$, то $C(X^1)\prec C(X^2)$, т.е. $X^1 = \arg\min\limits_{X\in E_4^3(\Gamma)} C(X)$.

Рассмотрим вопрос о наличии минималей задачи, отличных от X^1. Так как $M(A_1)=M(A_2)=M(A_3)=7$, то $M(C(X))=28$ для любого $X\in E_\eta^k(\Gamma)$. Вычислим дисперсии значений целевой функции для точек допустимого множества:

$$D(C(X))=D(2X_1+X_2+X_3)=4D(X_1)+D(X_2)+D(X_3),$$

$$D(C(X^1))=D(C(X^2))=D(C(X^3))=D(C(X^5))=4\cdot 6+6+4=34,$$

$$D(C(X^4))=D(C(X^6))=4\cdot 6+4+4=32,$$

$$D(C(X^7))=D(C(X^{10}))=4\cdot 4+6+6=28,$$

$$D(C(X^8))=D(C(X^9))=D(C(X^{11}))=D(C(X^{12}))=4\cdot 4+6+4=26.$$

Таким образом,

$$H(C(X^1))=H(C(X^2))=H(C(X^3))=H(C(X^5))\le_l H(C(X^4))=H(C(X^6))\le_l$$
$$\le_l H(C(X^7))=H(C(X^{10}))\le_l H(C(X^8))=H(C(X^9))=H(C(X^{11}))=H(C(X^{12}))$$

и минималь следует искать среди точек X^1, X^2, X^3, X^5. Однако $C(X^3)=2A_1+A_2+A_1=C(X^1)$, $C(X^5)=2A_1+A_3+A_1=C(X^2)$. Значит, точка X^3 также дает решение рассматриваемой задачи, причем эта точка не удовлетворяет условию (12), так как $H(X_2^3)=H(A_2)\ne H(A_1)$. Отметим, что при определенных условиях все минимали задачи (10) удовлетворяют условию (12).

Следствие 1. Если выполняются условия (8) и (11), то любая минималь задачи (10) удовлетворяет условию (12).

Доказательство. Так как выполняются неравенства (8), то согласно следствию 1 теоремы 1 точка $\mu(X^*)$ является единственной минималью задачи (14). Поэтому для любого решения $\widetilde{X}$ задачи (10) выполняются условия (13). Также $\widetilde{L}_i(\delta_i(X^*))\ge \widetilde{L}_i(\delta_i(\widetilde{X}))$ $\forall i\in J_\sigma$, причем если $\delta(\widetilde{X})\ne\delta(X^*)$, то в силу единственности максимали функции $\widetilde{L}_i(\delta_i(X))$ на множестве $E_{n_i}^{k_i}(\Gamma_i^D)$ найдется индекс i такой, при котором неравенство является строгим. Таким образом, $\widetilde{L}(\delta(X^*))=\widetilde{L}(\delta(\widetilde{X}))$ только в случае $\delta(\widetilde{X})=\delta(X^*)$. Учитывая также, что $\widetilde{X}$ удовлетворяет (13), получаем $H(X_j^*)=H(\widetilde{X}_j)$ $\forall j\in J_k$. Следовательно, $\widetilde{X}$ удовлетворяет условию (12). Следствие доказано.

Следствие 2. Если выполняются условия (4), (11) и

$$H(G_i)\ne H(G_j) \text{ при } G_i\ne G_j,\ i,j\in J_k, \tag{18}$$

то точка

$$X_j^*=G_j \quad \forall j\in J_k \tag{19}$$

является минималью задачи (10).

Следствие 3. Если выполняются условия (8), (11) и

$$H(G_i)\ne H(G_j) \text{ при } G_i\ne G_j,\ i,j\in J_k, \tag{20}$$

то точка

$$X_j^* = G_j \quad \forall j \in J_k \tag{21}$$

является единственной минималью задачи (10).

Следует отметить, что если элементы мультимножества Г упорядочены в неубывающем порядке, но условие (20) не выполняется, то утверждение, аналогичное следствиям 2 и 3 теоремы 3, места не имеет.

Пример 3. Рассмотрим задачу поиска пары (10), где $C(X) = 5X_1 + 3X_2$, $\Gamma = \{G_1, G_2\}$, причем дискретные случайные величины G_1, G_2 заданы рядами распределения в соответствии с табл. 2.

Для величин G_1 и G_2 характеристические векторы равны: $H(G_1) = H(G_2) = (6;-13)$, и при этом имеет место соотношение $G_1 \prec G_2$, так как $g_1^1 = g_2^1 = 1$, $P(G_1 = 1) = P(G_2 = 1) = \dfrac{1}{4}$, $g_1^2 = 5 < g_2^2 = 6$. Однако минималью является точка (G_2, G_1). Действительно, для случайных величин $F_1 = 5G_1 + 3G_2$, $F_2 = 5G_2 + 3G_1$ справедливы соотношения $H(F_1) = H(F_2) = (48; -442)$, но при этом $f_1^1 = 5g_1^1 + 3g_2^1 = 8 = f_2^1 = 5g_2^1 + 3g_1^1$, $P(F_1 = 8) = P(F_2 = 8) = \dfrac{1}{16}$, $f_2^2 = 20$, $f_1^2 = 23$, откуда в соответствии с п. 3.1 определения 1 имеем $F_2 \prec F_1$.

Рассмотрим более детально поиск решения задачи (10), если элементы мультимножества Г удовлетворяют условию (11), при этом условие (20) не выполняется. Разобьем мультимножество Г на подмультимножества вида (17), где индексы η_i $(i \in J_r)$ удовлетворяют (15), n_i — кратности элементов основы мультимножества $\{H(G_1), \ldots, H(G_\eta)\}$, упорядоченных в лексикографическом порядке. Как и выше, будем полагать, что σ определяется из условия $\eta_{\sigma+1} > k$, $k_i = n_i$ для $i \in J_{\sigma-1}$, $k_\sigma = k - \eta_\sigma + 1$. Если в множестве Γ_i все элементы равны между собой, то из условия (12) следует, что для минимали X^* задачи (10) выполняются равенства $X_{\eta_i}^* = \ldots = X_{\eta_i + k_i - 1}^* = G_{\eta_i}$. Если среди величин $G_{\eta_i}, \ldots, G_{\eta_i + k_i - 1}$ есть различные, то $(X_{\eta_i}^*, \ldots, X_{\eta_i + n_i - 1}^*)$ является k_i-размещением элементов мультимножества Γ_i.

Пусть точка $\widetilde{X}$ такова, что для всех $i \in J_\sigma$ точка $(\widetilde{X}_{\eta_i}, \ldots, \widetilde{X}_{\eta_i + k_i - 1})$ доставляет минимум функции $C_i(X) = \sum\limits_{j=\eta_i}^{\eta_i + k_i - 1} c_j X_j$ на множестве $E_{n_i}^{k_i}(\Gamma_i)$, т.е. $C_i(\widetilde{X}) \preceq C_i(X)$, где $(X_{\eta_i}, \ldots, X_{\eta_i + k_i - 1}) \in E_{n_i}^{k_i}(\Gamma_i)$ (если $|S(\Gamma_i)| = 1$, то такая точка в множестве $E_{n_i}^{k_i}(\Gamma_i)$ является единственной). Тогда согласно теореме 2 для

Таблица 2

Величина	Ряды распределения случайных величин G_i							
	$i = 1$				$i = 2$			
Значения G_i	1	5	7	11	1	6	11	15
Вероятности значений G_i	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{23}{45}$	$\frac{9}{40}$	$\frac{1}{72}$

любой точки $X \in E_{\eta}^{k}(\Gamma)$, удовлетворяющей (12), выполняются соотношения $C(\widetilde{X}) = \sum_{i=1}^{\sigma} C_i(\widetilde{X}) \preceq \sum_{i=1}^{\sigma} C_i(X) - C(X)$, т.е. точка $\widetilde{X}$ является минималью задачи (10). Таким образом, имеет место следующая теорема.

Теорема 4. Если выполняются условия (4) и (11), то по крайней мере одна минималь X^* задачи (10) удовлетворяет условиям

$$(X_{\eta_i}^*, \ldots, X_{\eta_i+k_i-1}^*) = \underset{(X_{\eta_i}, \ldots, X_{\eta_i+k_i-1}) \in E_{n_i}^{k_i}(\Gamma_i)}{\arg\min} \sum_{j=\eta_i}^{\eta_i+k_i-1} c_j X_j \quad \forall i \in J_\sigma,$$

где Γ_i — мультимножества вида (17), в которых индексы удовлетворяют (15), n_i — кратности элементов основы мультимножества $\{H(G_1), \ldots, H(G_\eta)\}$, упорядоченных в лексикографическом порядке, причем $\eta_\sigma \le k$, $\eta_{\sigma+1} > k$, $k_i = n_i$ для $i \in J_{\sigma-1}$, $k_\sigma = k - \eta_\sigma + 1$.

Пример 4. Рассмотрим задачу поиска пары (10), где $C(X) = 5X_1 + 3X_2 + 2X_3 + X_4 + X_5$, $\Gamma = \{G_1, G_2, A_1, A_1, A_2, A_3\}$, ряды распределения случайных величин G_1, G_2 приведены в табл. 2, а ряды распределения случайных величин A_1, A_2, A_3 — в табл. 1. Для элементов мультимножества Γ выполняется условие (11):

$$H(G_1) = H(G_2) = (6; -13) <_l H(A_1) = (7; -6) <_l H(A_2) = H(A_3) = (7; -4).$$

При этом разбиение мультимножества Γ на подмультимножества вида (17) осуществляется следующим образом: $\Gamma_1 = \{G_1, G_2\}$, $\Gamma_2 = \{A_1, A_1\}$, $\Gamma_3 = \{A_2, A_3\}$. Как показано в примере 3, минимум функции $C_1(X) = 5X_1 + 3X_2$ на множестве $E_2^2(\Gamma_1)$ достигается в точке (G_2, G_1); следовательно, $X_1^* = G_2$, $X_2^* = G_1$. Элементы мультимножества Γ_2 равны между собой, поэтому $X_3^* = X_4^* = A_1$. Так как $A_2 \prec A_3$, то минимум функции $C_3(X) = X_5$ на множестве $E_2^1(\Gamma_3)$ достигается в точке $X_5^* = A_2$. Таким образом, решение рассматриваемой задачи дает точка $X^* = (G_2, G_1, A_1, A_1, A_2)$. Отметим, что точка X^* — не единственная минималь. Как показано в примере 2, функция $C'(x) = 2X_1 + X_2 + X_3$ на множестве размещений из мультимножества $\{A_1, A_1, A_2, A_3\}$ имеет две минимали: (A_1, A_1, A_2) и (A_1, A_2, A_1). Тогда и функция $C(X) = 5X_1 + 3X_2 + 2X_3 + X_4 + X_5$ на множестве $E_6^5(\Gamma)$ имеет две минимали: $(G_2, G_1, A_1, A_1, A_2)$ и $(G_2, G_1, A_1, A_2, A_1)$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье исследованы новые свойства линейной безусловной задачи оптимизации на размещениях, в частности получено необходимое условие решения в случае положительности коэффициентов, которое совместно с известным достаточным условием является критерием решения. Предложена постановка линейной безусловной задачи оптимизации на размещениях в случае, когда элементы мультимножества являются дискретными случайными величинами, и исследованы свойства сформулированной стохастической задачи. Показано, что при определенных условиях решение может быть получено без организации перебора, а также сформулировано и обосновано условие, которое может быть положено в основу поиска решения. Рассмотренные свойства можно использовать при обосновании методов решения таких задач. Направление дальнейших исследований — в изучении свойств задач с целевой функцией другого вида и/или с дополнительными (некомбинаторными) ограничениями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Стоян Ю.Г., Ємець О.О. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації. — Київ: Ін-т системних досліджень освіти, 1993. — 188 с. — http://dspace.puet.edu.ua/handle/123456789/487.
2. Емец О.А., Барболина Т.Н. Комбинаторная оптимизация на размещениях. — Киев: Наук. думка, 2008. — 159 с. — http://dspace.puet.edu.ua/handle/123456789/473.
3. Донець Г. П., Колєчкіна Л.М. Екстремальні задачі на комбінаторних конфігураціях. — Полтава: РВВ ПУЕТ, 2011. — 309 с. — http://dspace.puet.edu.ua/handle/123456789/560.
4. Емец О.А., Барболина Т.Н., Черненко О.А. Решение задач оптимизации с дробно-линейными целевыми функциями и дополнительными ограничениями // Кибернетика и системный анализ. — 2006. — № 5. — С. 79–85.
5. Емец О.А., Емец Е.М., Парфёнова Т.А., Чиликина Т.В. Решение линейных условных полностью комбинаторных оптимизационных задач на перестановках методом ветвей и границ // Кибернетика и системный анализ. — 2013. — № 2. — С. 121–128.
6. Емец О.А., Емец Е.М., Олексийчук Ю.Ф. Прямой метод отсечений для задач комбинаторной оптимизации с дополнительными ограничениями // Кибернетика и системный анализ. — 2011. — № 6. — С. 116–124.
7. Барболина Т.Н. Решение частично комбинаторных задач оптимизации на размещениях методом построения лексикографической эквивалентности // Кибернетика и системный анализ. — 2013. — № 6. — С. 137–149.
8. Сергиенко И.В., Михалевич М.В. Применение методов стохастической оптимизации для исследования трансформационных процессов в экономике // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2004. — № 4. — С. 7–29.
9. Ермольев Ю.М., Ястремский А.И. Стохастические модели и методы в экономическом планировании. — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1979. — 256 с.
10. Юдин Д.Б. Математические методы управления в условиях неполной информации. — М.: Сов. радио, 1974. — 400 с.
11. Кан Ю.С., Кибзун А.И. Задачи стохастического программирования с вероятностными критериями. — М.: Физматлит, 2009. — 375 с.
12. Наумов А.В., Иванов С.В. Исследование задачи стохастического линейного программирования с квантильным критерием // Автоматика и телемеханика. — 2011. — № 2. — С. 142–158.
13. Marti K. Stochastic optimization methods. — Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2008. — 340 p.
14. Сергиенко И.В., Емец О.А., Емец А.О. Задачи оптимизации с интервальной неопределенностью: метод ветвей и границ // Кибернетика и системный анализ. — 2013. — № 5. — С. 38–50.
15. Ємець О.О., Ємець Ол-ра О. Розв'язання задач комбінаторної оптимізації на нечітких множинах. — Полтава: ПУЕТ, 2011. — 239 с. — http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/352.
16. Емец О.А., Барболина Т.Н. Об оптимизационных задачах с вероятностной неопределенностью // Доповіді НАН України. — 2014. — № 11. — С. 40-45.
17. Емец О.А., Роскладка А.А. О комбинаторной оптимизации в условиях неопределенности // Кибернетика и системный анализ. — 2008. — № 5. — С. 35–44.
18. Харди Г.Г., Литтльвуд Дж.Е., Полиа Г. Неравенства: Пер. с англ. В.И. Левина. — М.: Гос. изд-во иностр. лит., 1948. — 456 с.
19. Ємець О.О., Барболіна Т.М. Побудова і дослідження математичної моделі задачі директора зі стохастичними параметрами // Вісник Черкаського університету. Серія «Прикладна математика. Інформатика». — 2014. — № 18 (311). — С. 3–11.

Поступила 11.02.2015