

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ВЕРОЯТНОСТНОГО ОЦЕНИВАНИЯ В НЕЧЕТКИХ БАЙЕСОВСКИХ СЕТЯХ ДОВЕРИЯ

Аннотация. Рассмотрены специфические проблемы, возникающие при создании байесовских сетей для обработки нечеткой информации. Полученные условия обеспечивают вероятностную корректность априорных данных и результатов сетевых вычислений. Для случая недетерминированности состояний вершин сети предложена процедура нечеткой линейной интерполяции. Представленные результаты позволяют выполнять вероятностно корректное байесовское оценивание на нечетких сетях любой конфигурации.

Ключевые слова: байесовские сети доверия, нечеткие оценки вероятности, корректность нечетких вычислений, бинарные сети, недетерминированные состояния.

ВВЕДЕНИЕ

Переход к нечеткости является закономерным шагом развития байесовских сетей доверия: вероятностная неопределенность, заложенная в модель сети, естественно дополняется размытостью оценок вероятностей и взаимосвязей вершин, что позволяет полнее представлять имеющуюся, обычно весьма приблизительную, информацию об анализируемой ситуации. Использование существенно более сложного вида данных (нечетких вероятностных отношений вместо обычных чисел), во-первых, усугубляет проблему организации сетевых вычислений, на порядок увеличивая их объемы и существенно усложняя логику зависимостей в сети, и, во-вторых, предопределяет появление ряда трудностей математического и реализационного характера, не имеющих в точечном варианте. К трудностям первого типа относятся, в частности, разработка новых специальных и адаптация уже существующих методов и алгоритмов, обеспечивающих вероятностную корректность нечетких вычислений и интерпретируемость результатов, а также выбор целесообразного представления нечеткой информации, допускающего разумную оцифровку взаимосвязей в сети. К трудностям второго типа относится создание в сети системы контроля информации, обеспечивающей вероятностную корректность конечного результата.

В настоящей работе представлены подходы к решению ряда порожденных размытостью информации сетевых проблем.

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Информацию, требующуюся для функционирования сети, можно сгруппировать следующим образом [1, 2].

Конфигурация сети — ориентированный ациклический граф G с множеством вершин $V(G) = \{v_m\}_{m=1}^{M_G}$. Вершина v_m находится в одном из допустимых состояний $V_m \in \{V_m^{j_m}\}_{j_m=1}^{J_m}$, $J_m \geq 2$, образующих полную группу. Задана матрица смежности вершин $\Omega(G) = \{\omega_{nm}\}_{n=1}^{M_G} \{m=1\}^{M_G}$, где $\omega_{nm} = 1$, если в графе G существует ориентированное ребро (v_n, v_m) , и $\omega_{nm} = 0$ в противном случае. Далее предполагается, что граф G имеет ярусно-параллельное представление, позволяющее отслеживать информационные потоки и их взаимодействие. Известны количество ярусов $(L+1)$ и значения их мощностей k_0, k_1, \dots, k_L , $M_G = \sum_{l=0}^L k_l$; для каждой вершины v_m определен ярусный показатель $\lambda(v_m)$; нумерация вершин упорядо-

чена по возрастанию ярусного показателя. Вершины $\{v_m\}_{m=1}^{k_0}$ являются корневыми, $\lambda(v_m)=0$, они образуют нулевой ярус мощностью k_0 . Вершины $\{v_m\}_{m=K_{l-1}+1}^{K_l}$, где $K_l = \sum_{t=0}^l k_t$, $l=1, \dots, L$, образуют l -й ярус, $\lambda(v_m) = l$, мощностью k_l . Очевидно, в $\Omega(G)$ блоки $\{\omega_{ij}\}_{i=K_{r-1}+1}^{K_r} \}_{j=K_{n-1}+1}^{K_n}$ размера $k_r \times k_n$ при $r \geq n$ (на главной диагонали и ниже) заполнены нулями. По $\Omega(G)$ построена матрица достижимости $\Theta(G) = \{\theta_{mn}\}_{n=1}^{M_G} \}_{m=1}^{M_G}$ вершин $V(G)$ в аналогичном блочном представлении: $\theta_{mn} = 1$, если в графе G можно построить ориентированный маршрут из вершины v_m в v_n , и $\theta_{mn} = 0$ в противном случае.

Для корневых вершин $\{v_m\}_{m=1}^{k_0}$ заданы априорные оценки $[\Pi \{v_m\}]_{m=1}^{k_0}$, $\Pi \{v_m\} = \{\hat{P}(V_m^{j_m})\}_{j_m=1}^{J_m}$, вероятностей допустимых состояний (всего $\sum_{m=1}^{k_0} (J_m - 1)$ значений). Для вершин $\{v_m\}_{m=k_0+1}^{M_G}$ остальных ярусов определены оценки $\Pi \{v_m / pr(v_m)\} = \{P_m(j_m; \{j_i\}_{i=1}^{m-1})\}_{j_i=1}^{J_i}$ прямой связи состояний вершины v_m с «родительскими» вершинами $pr(v_m)$, $P_m(j_m; \{j_i\}_{i=1}^{m-1}) = \left\{ \hat{P} \left(V_m^{j_m} / \bigcap_{\substack{i \leq m-1 \\ \omega_{im}=1}} V_i^{j_i} \right) \right\}_{j_m=1}^{J_m}$ (всего $\sum_{m=K_{l-1}+1}^{K_l} (J_m - 1) \sum_{i=1}^{K_{l-1}} \omega_{im} J_i$ значений). В случаях высокой связности графа G

сложность получения исходной информации и объем вычислений с увеличением J_m возрастают лавинообразно, без улучшения результатов.

Апостериорное оценивание выполняется при поступлении информации относительно того, в каком из допустимых состояний $\{V_{h_i}^*\}_{i=1}^I$, $I < M_G$, пребывают вершины некоторого подмножества $\{v_{h_i}\}_{i=1}^I \in V(G)$.

Соответственно возможны три варианта нечеткости в сети, согласно которым могут быть нечеткими граф G , априорные оценки $\Pi \{v_m\}$ и/или $\Pi \{v_m / pr(v_m)\}$, а также информация об актуальности состояний $\{v_{h_i}\}_{i=1}^I$.

Первый вариант подлежит тщательному исследованию и не является объектом данной публикации. Далее рассмотрим остальные варианты.

НЕЧЕТКИЕ ОЦЕНКИ ВЕРОЯТНОСТИ

Назовем N -арное нечеткое отношение

$$\tilde{P} = \{ \langle x_1, x_2, \dots, x_N \rangle, \mu'(x_1, x_2, \dots, x_N) \}, \mu' : [0, 1]^N \rightarrow [0, 1],$$

вероятностным, если для любой точки $(x_1, x_2, \dots, x_N) \in S$ его носителя (support) $S \in [0, 1]^N$ выполнено условие $\sum_{n=1}^N x_n = 1$. В декартовой системе координат носитель функции принадлежности (ф.п.) нечеткого вероятностного отношения принадлежит «диагонали» куба $[0, 1]^N$.

Пусть система находится в одном из N допустимых альтернативных состояний $\{A_n\}_{n=1}^N$, образующих полную группу:

$$\sum_{n=1}^N P(A_n) = 1. \quad (1)$$

В пространстве $[0, 1]^{N+1}$ значение по оси $0x_n$ соответствует оценке $P(A_n)$, $n = \overline{1, N}$; по оси $0y$ направлены оценки ф.п. $y = \mu'(x_1, x_2, \dots, x_N)$, $(x_1, x_2, \dots, x_N) \in [0, 1]^N$. Нечеткая оценка \tilde{P} вероятности $\{P(A_n)\}_{n=1}^N$ есть нечеткое N -арное вероятностное отношение. Значение ф.п. $\mu'(x_1, x_2, \dots, x_N)$ можно интерпретировать как субъективную меру уверенности в актуальности варианта $\{P(A_n) = x_n\}_{n=1}^N$. Если значение по одной из размерностей является четким и известно, например, $P(A_N) = x_N^*$, то $\{P(A_n)\}_{n=1}^{N-1}$ образуют $(N-1)$ -арное отношение с носителем на (гипер)плоскости $x_1 + x_2 + \dots + x_{N-1} = 1 - x_N^*$. Классические четкие вероятности $\{P(A_n)\}_{n=1}^N$ являются нормальным синглетоном $1_{(P(A_1), P(A_2), \dots, P(A_N))}$ в $(N+1)$ -мерном пространстве. Размерность можно уменьшить на единицу (до $N-1$ для носителя) с учетом условия (1). Так, бинарную нечеткую оценку \tilde{P} вероятности $P(A)$ удобно рассматривать как нечеткое число, заданное на $[0, 1]$, $\mu(x) := \mu'(x, 1-x)$ соответствует точке носителя $(x, 1-x)$.

УСЛОВИЯ СОГЛАСОВАННОСТИ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПРОЕКЦИЙ

Задать ф.п. нечеткой оценки вероятности \tilde{P} как оригинальную функцию N переменных в пространстве $[0, 1]^{N+1}$ в случае $N > 2$ весьма непросто [3]. Требуется, во-первых, корректно оценить в N -мерном пространстве область носителя, каждая точка (x_1, x_2, \dots, x_N) которого должна удовлетворять условию (1), и, во-вторых, определить функцию N аргументов $y = \mu'(x_1, x_2, \dots, x_N) \in [0, 1]$ на точках носителя. Эту проблему можно решить конструктивно введением сильного предположения, что нечеткие множества, заданные на декартовом произведении $[0, 1]^N$, являются пересечением цилиндрических продолжений N своих теней (ортогональных проекций) \tilde{p}_n оценки \tilde{P} на координатные плоскости $x_n 0y$:

$$\mu_{\tilde{P}_n}(x_n) = \sup_{x_k, k=1, N, k \neq n} \{ \mu'(x_1, x_2, \dots, x_N), (x_1, x_2, \dots, x_N) \in S \}.$$

Тогда нечеткую оценку вероятности \tilde{P} можно представить комплектом N нечетких чисел $\{\tilde{p}_n\}_{n=1}^N$, которые должны удовлетворять условиям согласованности из (1). Принципиально важны два следующих замечания [4]:

- поверхность ф.п. однозначно определяет комплект ортогональных плоских проекций, предполагаем, что последний также однозначно определяет поверхность ф.п. в $(N+1)$ -мерном пространстве;
- алгоритмы нечетких вероятностных расчетов следует создавать, понимая, что проекции результатов операций с нечеткими множествами могут отличаться от результатов тех же операций с проекциями этих множеств без учета взаимозависимости компонент нечетких отношений.

Получим условия согласованности ортогональных проекций, используя как пример геометрическую интерпретацию ф.п. для случая $N = 4$, позволяющую легко понимать смысл итоговых соотношений. Применяются верхний индекс L (left) для левой монотонной ветви ф.п. и индекс R (right) для правой ветви, обозначение $S_n(0) = (s_n^L(0), s_n^R(0))$ для носителя проекции ф.п. на плоскости $x_n 0y$, $S_n(\alpha) = [s_n^L(\alpha), s_n^R(\alpha)]$ для α -сечения уровня α , $0 < \alpha \leq 1$, в частности, $S_n(1)$ для n -й проекции носителя ядра. Пусть вероятностное отношение \tilde{P} с проекциями $\{\tilde{p}_n\}_{n=1}^N$ представлено множеством $\{S_n(\alpha_k)_{k=1}^K\}$ α_k -сечений соответственно для уровней $\{\alpha_k\}_{k=1}^K$, $\alpha_0 = 0$, $\alpha_K = 1$, $\alpha_{k_1} < \alpha_{k_2}$ при $k_1 < k_2$. Если проек-

ции \tilde{P}_n являются трапециевидными или треугольными нечеткими числами, достаточно задать границы носителя $s_n^L(0)$, $s_n^R(0)$ и крайние точки ядра $s_n^L(1)$, $s_n^R(1)$, $s_n^L(0) < s_n^L(1) \leq s_n^R(1) < s_n^R(0)$.

Зафиксируем α и рассмотрим проекцию по оси $0x_N$ α -уровня вероятностного отношения \tilde{P} с $s_n^L = s_n^L(\alpha)$ и $s_n^R = s_n^R(\alpha)$. Весь носитель ф.п. должен располагаться во внутреннем пространстве пирамиды с вершинами в начале координат и единицами на осях (в случае $N = 4$ это точки $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ и $(0, 0, 1)$). Проведенные перпендикулярно к оси $0x_n$, $n = 1, N - 1$, через точки s_n^L и s_n^R на оси $0x_n$ гиперплоскости высекают параллелепипед, ограничивающий носитель нечеткого отношения по соответствующим размерностям. Ограничения s_N^L и s_N^R (s_4^L и s_4^R) по оси $0x_N$ ($0x_4$) проектируются в пространство $0x_1 \dots x_{N-1}$ ($0x_1 x_2 x_3$) фрагментами параллельных гиперплоскостей $\sum_{n=1}^{N-1} x_n = 1 - s_N^L$ и $\sum_{n=1}^{N-1} x_n = 1 - s_N^R$ (плоскостей $x_1 + x_2 + x_3 = 1 - s_4^R$ и $x_1 + x_2 + x_3 = 1 - s_4^L$).

Плоскость $x_1 + x_2 + x_3 = 1 - s_4^L$ отсекает от параллелепипеда пирамиду с вершиной в точке (s_1^R, s_2^R, s_3^R) . Чтобы значения $\{s_n^L, s_n^R\}_{n=1}^4$ были концами α -уровня отношения \tilde{P} , необходимо, чтобы эта плоскость имела с гранями параллелепипеда в плоскостях $x_1 = s_1^R$, $x_2 = s_2^R$, $x_3 = s_3^R$ хотя бы по одной общей точке, для чего должны выполняться соотношения $s_1^R + s_2^R + s_3^R \geq 1 - s_4^L$, $s_1^L + s_2^L + s_3^R \leq 1 - s_4^L$, $s_1^L + s_2^R + s_3^L \leq 1 - s_4^L$, $s_1^R + s_2^L + s_3^L \leq 1 - s_4^L$. Аналогично на гранях параллелепипеда в плоскостях $x_1 = s_1^L$, $x_2 = s_2^L$, $x_3 = s_3^L$ находится хотя бы одна точка плоскости $x_1 + x_2 + x_3 = 1 - s_4^R$. Таким образом, имеем следующие условия согласованности для концов плоских проекций α -уровня отношения \tilde{P} :

$$\begin{aligned} s_1^L + s_2^L + s_3^L + s_4^R &\leq 1; & s_1^R + s_2^R + s_3^R + s_4^L &\geq 1; \\ s_1^L + s_2^L + s_3^R + s_4^L &\leq 1; & s_1^R + s_2^R + s_3^L + s_4^R &\geq 1; \\ s_1^L + s_2^R + s_3^L + s_4^L &\leq 1; & s_1^R + s_2^L + s_3^R + s_4^R &\geq 1; \\ s_1^R + s_2^L + s_3^L + s_4^L &\leq 1; & s_1^L + s_2^R + s_3^R + s_4^R &\geq 1. \end{aligned}$$

Обозначим $\mathbf{S}(\alpha) \in [0, 1]^N$ полученное по проекциям $\{S_n(\alpha)\}_{n=1}^N$ α -уровневое множество отношения \tilde{P} . Типичный вид $\mathbf{S}(\alpha)$ в пространстве $[0, 1]^{N-1}$ — параллелепипед с двумя «диагональными» плоскими срезами, обычно вершины $(s_1^L, s_2^L, \dots, s_{N-1}^L)$ и $(s_1^R, s_2^R, \dots, s_{N-1}^R)$ выпадают.

В общем случае получаем следующие условия согласованности:

$$\forall n = \overline{1, N}, \alpha \in [0, 1] \quad \sum_{1 \leq k \leq N, k \neq n} s_k^L(\alpha) + s_n^R(\alpha) \leq 1; \quad \sum_{1 \leq k \leq N, k \neq n} s_k^R(\alpha) + s_n^L(\alpha) \geq 1. \quad (2)$$

Представление нечеткой оценки вероятности в виде полного набора ортогональных проекций ф.п. на координатные плоскости, удовлетворяющих условиям согласованности (2), будем называть эшюрным.

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЕ ИНФОРМАЦИОННОЕ НАПОЛНЕНИЕ СЕТИ

В структурированной сети с графом G и множеством вершин $V(G) = \{v_m\}_{m=1}^{M_G}$ в качестве априорной информации необходимо задать $\forall m = \overline{1, M_G}, j_m = \overline{1, J_m}$,

множество α -сечений $\{[s_{m,j_m}^L(\alpha_k), s_{m,j_m}^R(\alpha_k)]\}_{k=1}^K$, $\alpha_0 = 0$, $\alpha_K = 1$, удовлетворяющих условиям

$$\sum_{1 \leq k \leq J_m, k \neq j_m} s_{m,k}^L(\alpha) + s_{m,j_m}^R(\alpha) \leq 1; \quad \sum_{1 \leq k \leq J_m, k \neq j_m} s_{m,k}^R(\alpha) + s_{m,j_m}^L(\alpha) \geq 1. \quad (3)$$

Чтобы гарантировать вероятностную корректность нечетких вычислений и влиять на результаты оценивания, интервалы $[s_{m,j_m}^L(\alpha), s_{m,j_m}^R(\alpha)]$, соответствующие оценкам различных альтернативных состояний (разным j_m), не должны пересекаться. Часто можно ограничиться трапециевидными ф.п. (частный случай с точечным ядром — треугольными): достаточно проверить выполнение условий (3) для границ носителя и ядра ($\alpha = 0$ и $\alpha = 1$) [5].

Указанные условия легко реализуются в бинарном случае, но при $J_m > 2$ определение априорных оценок нетривиально. Рассмотрим вспомогательные ограничения при последовательном вводе нечеткой оценки вероятности \tilde{P} , когда полную группу образуют J допустимых состояний, в эюрном представлении $\{s_j^L(0), s_j^L(1), s_j^R(1), s_j^R(0)\}_{j=1}^J$ для случаев $J = 2$, $J = 3$ и $J = 4$. Значения оценок задаются слева направо сверху вниз по возрастанию индекса, так что упорядочивать допустимые состояния следует, начиная с более важного. Вначале определяются $0 \leq s_1^L(0) < s_1^L(1) \leq s_1^R(1) < s_1^R(0) \leq 1$, причем в бинарном случае либо $s_1^L(0) > 0,5$, либо $s_1^R(0) < 0,5$. Затем выбираются оценки.

Бинарный случай $J = 2$:

$$s_2^L(0) = 1 - s_1^R(0), \quad s_2^L(1) = 1 - s_1^R(1), \quad s_2^R(1) = 1 - s_1^L(1), \quad s_2^R(0) = 1 - s_1^L(0).$$

Тернарный случай $J = 3$:

$$s_2^L(0) \in [0, 1 - s_1^R(0)]; \quad s_2^L(1) \in (s_2^L(0), 1 - s_1^R(1)); \quad (4)$$

$$s_2^R(1) \in [s_2^L(1), 1 - s_1^L(1)]; \quad s_2^R(0) \in (s_2^R(1), 1 - s_1^L(0)); \quad (5)$$

$$s_3^L(0) \in [\max\{0, 1 - [s_1^R(0) + s_2^R(0)]\}, \min\{1 - [s_1^L(0) + s_2^R(0)], 1 - [s_1^R(0) + s_2^L(0)]\}];$$

$$s_3^L(1) \in [\max\{s_3^L(0), 1 - [s_1^R(1) + s_2^R(1)]\}, \min\{1 - [s_1^L(1) + s_2^R(1)], 1 - [s_1^R(1) + s_2^L(1)]\}];$$

$$s_3^R(1) \in [\max\{s_3^L(1), 1 - [s_1^R(1) + s_2^L(1)], 1 - [s_1^L(1) + s_2^R(1)]\}, 1 - [s_1^L(1) + s_2^L(1)]];$$

$$s_3^R(0) \in [\max\{s_3^R(1), 1 - [s_1^R(0) + s_2^L(0)], 1 - [s_1^L(0) + s_2^R(0)]\}, 1 - [s_1^L(0) + s_2^L(0)]] .$$

Случай $J = 4$: вначале применяются соотношения (4) и (5), а затем используются

$$s_3^L(0) \in [0, \min\{1 - [s_1^R(0) + s_2^L(0)], 1 - [s_1^L(0) + s_2^R(0)]\}];$$

$$s_3^L(1) \in [s_3^L(0), \min\{1 - [s_1^L(1) + s_2^R(1)], 1 - [s_1^R(1) + s_2^L(1)]\}];$$

$$s_3^R(1) \in [\max\{s_3^L(1), 1 - [s_1^R(1) + s_2^L(1)], 1 - [s_1^L(1) + s_2^R(1)]\}, 1 - [s_1^L(1) + s_2^L(1)]];$$

$$s_3^R(0) \in [\max\{s_3^R(1), 1 - [s_1^L(0) + s_2^R(0)], 1 - [s_1^R(0) + s_2^L(0)]\}, 1 - [s_1^L(0) + s_2^L(0)]];$$

$$s_4^L(0) \in [\max\{0, 1 - [s_1^R(0) + s_2^R(0) + s_3^R(0)]\}, \min\{1 - [s_1^L(0) + s_2^L(0) + s_3^R(0)],$$

$$1 - [s_1^L(0) + s_2^R(0) + s_3^L(0)], 1 - [s_1^R(0) + s_2^L(0) + s_3^L(0)]\}];$$

$$\begin{aligned}
s_4^L(1) &\in [\max \{s_4^L(0), 1 - [s_1^R(1) + s_2^R(1) + s_3^R(1)]\}, \min \{1 - [s_1^L(1) + s_2^L(1) + s_3^R(1)], \\
&\quad 1 - [s_1^L(1) + s_2^R(1) + s_3^L(1)], 1 - [s_1^R(1) + s_2^L(1) + s_3^L(1)]\}]; \\
s_4^R(1) &\in [\max \{s_4^L(1), 1 - [s_1^R(1) + s_2^R(1) + s_3^L(1)], 1 - [s_1^R(1) + s_2^L(1) + s_3^R(1)], \\
&\quad 1 - [s_1^L(1) + s_2^R(1) + s_3^R(1)]\}, 1 - [s_1^L(1) + s_2^L(1) + s_3^L(1)]]; \\
s_4^R(0) &\in [\max \{s_4^R(1), 1 - [s_1^R(0) + s_2^R(0) + s_3^L(0)], 1 - [s_1^R(0) + s_2^L(0) + s_3^R(0)], \\
&\quad 1 - [s_1^L(0) + s_2^R(0) + s_3^R(0)]\}, 1 - [s_1^L(0) + s_2^L(0) + s_3^L(0)]];
\end{aligned}$$

ПРИНЦИПИАЛЬНАЯ СХЕМА ПЕРЕХОДА ОТ ТОЧЕЧНОГО ОЦЕНИВАНИЯ К НЕЧЕТКОМУ

Правила пересчета нечетких оценок базируются на соотношениях для точечной информации и совпадают с ними в вырожденном случае (число является нормальным синглетоном). Как основа для нечетких расчетов обычно используются [4, 6, 7] либо определение по Риману в соответствии с принципом обобщения, когда функция $Y = F(Z_1, Z_2, \dots, Z_M)$ с ф.п. $\mu_Y(y)$ от M невязимодействующих нечетких чисел $\{Z_m\}_{m=1}^M$ с ф.п. $\{\mu_{Z_m}(z)\}_{m=1}^M$ задается как

$$\mu_Y(y) = \max \left\{ \prod_{m=1}^M \mu_{Z_m}(z_m) : y = F(z_1, z_2, \dots, z_M) \right\}$$

или более простым и распространенным соотношением

$$\mu_Y(y) = \max \min \{ \mu_{Z_m}(z_m), 1 \leq m \leq M : y = F(z_1, z_2, \dots, z_M) \}.$$

В этом случае обобщение определения на основе подхода Лебега

$$F(Z_1, Z_2, \dots, Z_M) = \int_0^1 \alpha F(S_1(\alpha), \dots, S_M(\alpha))$$

или

$$F(Z_1, Z_2, \dots, Z_M) = \sum \alpha F(S_1(\alpha), \dots, S_M(\alpha)),$$

где $S_m(\alpha)$ — множество α -уровня нечеткого числа Z_m , предоставляет возможность любых вычислений с многомерными вероятностными отношениями, указывая путь трансформации алгоритмов для точечных данных в ориентированные на обработку нечеткой информации, заданной эпюрно.

Пусть все априорные оценки заданы комплектом α_k -сечений для последовательности уровней $\{\alpha_k\}_{k=1}^K$, $\alpha_0 = 0$, $\alpha_K = 1$, $\alpha_{k_1} < \alpha_{k_2}$, при $k_1 < k_2$. Соотношения $\{p_n = F_n(z_1, z_2, \dots, z_M)\}_{n=1}^N$ корректно (в вероятностном смысле) задают $\{P(A_n)\}_{n=1}^N$ как функции M независимых вероятностей $\{Z_m\}_{m=1}^M$, оценка Z_m определена для $J_m \geq 2$ допустимых состояний. Если $\{Z_m\}_{m=1}^M$ представлены нечеткими невязимодействующими вероятностными отношениями, обозначим $S_m(\alpha) \in R^{J_m}$ множество α -уровня отношения Z_m . Тогда для α -уровня $S^*(\alpha) \in R^N$ нечеткой оценки вероятности $\{p_1, p_2, \dots, p_N\}$ можно определить N ортогональных проекций $[s_n^{*L}(\alpha), s_n^{*R}(\alpha)]$ на ось $0p_n$:

$$\begin{aligned}
s_n^{*L}(\alpha) &= \min \{F_n(z_1, z_2, \dots, z_M), z_m \in S_m(\alpha), 1 \leq m \leq M\}, \\
s_n^{*R}(\alpha) &= \max \{F_n(z_1, z_2, \dots, z_M), z_m \in S_m(\alpha), 1 \leq m \leq M\}.
\end{aligned} \tag{6}$$

Соотношения (6) являются определением по Лебегу проекций любого функционального преобразования нечетких отношений, однако удобны для вычислительной реализации лишь в бинарном случае, когда $\forall m=1, M \quad J_m = 2$ и $N = 2$, и поиск экстремума в правых частях соотношений выполняется на отрезках прямых. Если $\exists m, 1 \leq m \leq M$, что $J_m > 2$, необходимо рассмотреть (6) с учетом особенностей функций $\{F_n(z_1, z_2, \dots, z_M)\}_{n=1}^N$ и представления информации относительно $\{Z_m\}_{m=1}^M$.

БАЙЕСОВСКОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ПО ЭПЮРНО ПРЕДСТАВЛЕННЫМ ДАННЫМ

Математической основой существующих байесовских сетей являются два вероятностных соотношения, для реализации которых разработаны специальные алгоритмы [8, 9]:

— цепная формула, основанная на формулах полной вероятности и умножения вероятностей,

$$\begin{aligned}
 P(V_{M+1}) &:= \sum_{\substack{j_1=1 \\ \theta_{1,(M+1)}=1}}^{J_1} \dots \sum_{\substack{j_M=1 \\ \theta_{M,(M+1)}=1}}^{J_M} P\left(V_{M+1}; \bigcap_{\substack{m \leq M \\ \theta_{m,(M+1)}=1}} V_m^{j_m}\right) = \\
 &= \sum_{\substack{j_1=1 \\ \theta_{1,(M+1)}=1}}^{J_1} \dots \sum_{\substack{j_M=1 \\ \theta_{M,(M+1)}=1}}^{J_M} \left\{ P\left(V_{M+1} / \bigcap_{\substack{m \leq M \\ \omega_{m,(M+1)}=1}} V_m^{j_m}\right) \times \right. \\
 &\times \left. \left[\prod_{\substack{k=K_0+1 \\ \theta_{k,(M+1)}=1}}^M P\left(V_k^{j_k} / \bigcap_{\substack{n \leq k-1 \\ \omega_{n,k}=1}} V_n^{j_n}\right) \right] \times \left[\prod_{\substack{k=1 \\ \theta_{k,(M+1)}=1}}^{K_0} P(V_k^{j_k}) \right] \right\}, \quad (7)
 \end{aligned}$$

причем суммирование и умножение выполняются только для значений текущих переменных, удовлетворяющих условиям, представленным под обозначением соответствующей операции;

— формула Байеса для пересчета апостериорных оценок

$$P(V_m / \{V_{h_i}^*\}_{i=1}^I) := P(V_m, \{V_{h_i}^*\}_{i=1}^I) / P(\{V_{h_i}^*\}_{i=1}^I), \quad \{v_{h_i}\}_{i=1}^I \in V(G), \quad I < M_G. \quad (8)$$

Представление $P(V_m / \{V_{h_i}^*\}_{i=1}^I)$ в виде, аналогичном (7), достаточно громоздко, включает несколько вариантов, но путь его получения ясен.

Адаптация (7) и (8) для случая нечеткой информации сравнительно проста вследствие наличия двух благоприятных свойств.

Во-первых, цепная формула полилинейна, а формула Байеса — дробно-линейна по каждому из аргументов, причем на носителях всех аргументов не имеется стационарных или особых точек. Монотонность этих соотношений наряду с учетом избранного вида ф.п. данных позволяют свести сложную (по многомерному объему) оптимизационную задачу к поиску минимального и максимального значений конечного дискретного множества. Экстремумы достигаются в вершинах многоугольников (усеченных параллелепипедов) α -сечений априорных оценок. Обозначив $W_m(\alpha)$ множество вершин α -уровня $S_m(\alpha) \in [0, 1]^{J_m}$ нечеткой оценки вероятностей Z_m (далее точки множества $W_m(\alpha)$ будем называть α -определяющими для Z_m), перепишем (6) в виде

$$\begin{aligned}
 s_n^{*L}(\alpha) &= \min \{F_n(z_1, z_2, \dots, z_M), z_m \in W_m(\alpha), 1 \leq m \leq M\}, \\
 s_n^{*R}(\alpha) &= \max \{F_n(z_1, z_2, \dots, z_M), z_m \in W_m(\alpha), 1 \leq m \leq M\}.
 \end{aligned} \quad (9)$$

Получим соотношения для координат α -определяющих точек $W(\alpha)$ уровня $S(\alpha) \in [0, 1]^J$ оценки вероятности Z по его проекциям $\{s_j^L, s_j^R\}_{j=1}^J$:

$$W(\alpha) = \{(s_1^L, 1-s_1^L), (s_1^R, 1-s_1^R)\}$$

при $J = 2$;

$$W(\alpha) = \{(s_1^L, s_2^R, 1-[s_1^L + s_2^R]), (s_1^L, 1-[s_1^L + s_3^R], s_3^R), (s_1^R, s_2^L, 1-[s_1^R + s_2^L]), (s_1^R, 1-[s_1^R + s_3^L], s_3^L), (1-[s_2^L + s_3^R], s_2^L, s_3^R), (1-[s_2^R + s_3^L], s_2^R, s_3^L)\}$$

при $J = 3$.

В случае $J > 3$ используем идентификатор $y_n^{L,R}$, когда определяемая величина может принимать значения y_n^L или y_n^R . Исходим из способа образования вершин многогранника α -сечения в пространстве $[0, 1]^{J-1}$. При выполнении условий согласованности (2) $\forall k, 1 \leq k \leq J, \exists 2^{J-1}$ точек (t_1, t_2, \dots, t_J) следующего вида: $\forall j, 1 \leq j \leq J, j \neq k, t_j = s_j^{L,R}$ (ребро параллелепипеда по комбинации $s_j^{L,R}, j \neq k$) и $t_k = \left\{ 1 - \sum_{1 \leq j \leq J, j \neq k} t_j \right\}$ (точка пересечения ребра с плоскостью, соответствующей $s_k^{L,R}$). Если $s_k^L \leq t_k \leq s_k^R$, такая точка является α -определяющей.

Во-вторых, при корректном информативном определении нечеткой входной информации экстремумы из (9) при любом α достигаются на одном и том же наборе состояний вершин — аргументов, что значительно упрощает процесс вычислений. Пусть нечеткие оценки вероятности Z_m представлены эпюрно множеством J_m нечетких чисел $\{P_{m,j_m}\}_{j_m=1}^{J_m}$ — теней поверхности ф.п. $\mu_{Z_m}(u_m), u_m \in [0, 1]^{J_m}$, на координатные плоскости $z_j, 0y$, где по оси $0y$ направлены оценки функции принадлежности. Каждое P_{m,j_m} задано комплектом $K \geq 2$ ортогональных проекций $[s_{m,j_m}^L(\alpha_k), s_{m,j_m}^R(\alpha_k)] \alpha_k$ -сечений для уровней $\{\alpha_k\}_{k=0}^K$. Достаточно оценить $F_n(z_1, z_2, \dots, z_M)$ для всех возможных комбинаций $\{j_1, j_2, \dots, j_M\}_{j_m=1}^{J_m} \prod_{m=1}^M$ лишь для одного значения $\alpha^* \in \{\alpha_k\}_{k=0}^{K-1}$, выбрать две цепочки: $\{j_{m*}\}_{m=1}^M$ и $\{j_m^*\}_{m=1}^M$ — «оптимальные тропы», на которых достигаются соответственно минимальное $s_n^{*L}(\alpha^*)$ и максимальное $s_n^{*R}(\alpha^*)$ значения, и для остальных $\{\alpha_k\}_{k=0}^K \setminus \alpha^*$ проводить оценивание только по избранным последовательностям состояний. Лучшим выбором пробного уровня является «экватор» нечеткости $\alpha^* = 0,5$.

НЕЧЕТКИЕ СВИДЕТЕЛЬСТВА В БИНАРНЫХ СЕТЯХ

Бинарные оценки наиболее распространенные и позволяют построить полезную нечеткую сеть в подавляющем большинстве случаев, например, сведя многомерную задачу к нескольким бинарным. Часто, когда переменные бинарной сети являются индикаторами наличия некоторого свойства или признака состояний исследуемой системы, симптомы могут быть недетерминированными, т.е. неявная выраженность наблюдаемых проявлений не позволяет точно указать, имеется ли данное свойство, хотя есть некоторые предположения относительно этого.

В байесовских экспертных системах, базирующихся на аналогичном математическом подходе, в подобных ситуациях используется величина, оценивающая степень проявления указанного свойства e , например, коэффициент определенности $u(e)$, принимающий значение $u(e) = +1$ в случае яркой выраженности

наличия данного признака, $u(e) = -1$, когда несомненно признака не имеется, $u(e) = 0$ в случае полной неопределенности, и промежуточные между $+1$ и -1 значения, соответствующие экспертной оценке степени проявления свойства e в наблюдаемой ситуации [1]. Свидетельства учитываются последовательно, на каждом шаге в качестве оценки принимается результат линейной интерполяции на траверзе $u(e) \in [-1, 1]$ по двум опорным точкам: оценке, полученной на предыдущем шаге (она соответствует опорному траверзу полной неопределенности $u(e) = 0$), и той из вычисленных оценок условных вероятностей анализируемого допустимого состояния, соответствующий траверз которой (-1 или $+1$) расположен ближе к $u(e)$. Аналогичный подход целесообразно использовать при создании древовидных нечетких БС с последовательным учетом информации о свидетельствах, представленной нечетким показателем определенности с носителем в интервале $[-1, 1]$, с привлечением процедуры нечеткой линейной интерполяции [1, 9, 10]. Однако при разработке нечетких сетей с графом высокой связности учет поступивших свидетельств должен быть синхронным, что требует существенной модификации данного подхода. Представленная далее процедура нечеткой линейной интерполяции позволяет учитывать информацию о недетерминированных состояниях подмножества вершин в нечетких бинарных БС произвольной структуры [11].

Рассмотрим $(N + 1)$ вершину сети v_* , $\{v_n\}_{n=1}^N$ с допустимыми состояниями V_n и \bar{V}_n (или $-V_n$). Для оценки условной вероятности пребывания вершины v_* в состоянии V_* при условии, что вершины $\{v_n\}_{n=1}^N$ пребывают в состояниях $\{W_n\}_{n=1}^N$, где $W_n = \pm V_n$, будем использовать обозначение $\check{P}(j_1, \dots, j_N) = P(V_0 / W_1, \dots, W_N)$; $j_n = 1$, если $W_n = V_n$; $j_n = -1$, если $W_n = \bar{V}_n$; $j_n = 0$, если состояние вершины v_n в условии не имеется. Нечеткие оценки $\check{P}(j_1, \dots, j_N)$ для любых (j_1, \dots, j_N) , $j_n \in \{-1, 0, 1\}$, т.е. для детерминированных состояний вершин $\{v_n\}_{n=1}^N$, получаемые по начальным оценкам связей в сети [2, 9], считаем известными; значению $\check{P}(0, \dots, 0)$ соответствует априорная оценка безусловной вероятности $P(V_*)$. Для множества уровня $\alpha \in (0, 1]$ нечеткой оценки $\check{P}(j_1, \dots, j_N)$ далее будем использовать обозначение $[\check{s}_*^L(\alpha; j_1, \dots, j_N), \check{s}_*^R(\alpha; j_1, \dots, j_N)]$. Пребывание вершины v_n в состоянии V_n , $n \geq 1$, оценивается нечетким числом — коэффициентом определенности U_n , заданным границами α -уровней $[u_n^L(\alpha), u_n^R(\alpha)]$, причем для границ носителя либо $-1 \leq u_n^L(0) \leq u_n^R(0) \leq 0$, либо $0 \leq u_n^L(0) \leq u_n^R(0) \leq 1$. Для значений промежуточных на отрезке $[-1, 1]$ нечетких траверзов $\{U_n\}_{n=1}^N$ требуется определить оценку $\check{P}(U_1, \dots, U_N)$.

Нечеткая линейная интерполяция сводится к выполнению однотипных процедур по уровневому множеству опорных оценок. В $(N + 1)$ -мерном пространстве N размерностей (по осям $0x_n$, $n = 1, N$) ставятся в соответствие значениям $u_n \in [-1, 1]$. Оценкам α -уровневых множеств, $\alpha \in (0, 1]$, соответствует $(N + 1)$ -я размерность (ось $0t$), т.е. на многомерном траверзе (j_1, \dots, j_N) по оси $0t$ размещен интервал $[\check{s}_*^L(\alpha; j_1, \dots, j_N), \check{s}_*^R(\alpha; j_1, \dots, j_N)]$. Для траверза — сингелтона α_{u_1, \dots, u_N} , определяется $(N + 1)$ ближайший к точке (u_1, \dots, u_N) четкий опорный траверз $\{(j_1^k, \dots, j_N^k)\}_{k=0}^N$, $j_n^k \in \{-1, 0, 1\}$. Обязательны начало координат $(j_1^0, \dots, j_N^0) = (0, \dots, 0)$ и точка $\bar{j}^1 = (j_1^1, \dots, j_N^1)$: $j_n^1 := \text{sign}(u_n)$, т.е. $j_n^1 = -1$ при $u_n < 0$ и $j_n^1 = 1$ при $u_n > 0$; \bar{j}^1 определяет квадрант, в котором проводится интерполяция. Кроме того, $(N - 1)$ траверз (j_1^k, \dots, j_N^k) , $k = \overline{2, N}$, — это вершины гиперкуба $[-1, 1]^N$, точки пересечения его граней с осями и ребер с координатными

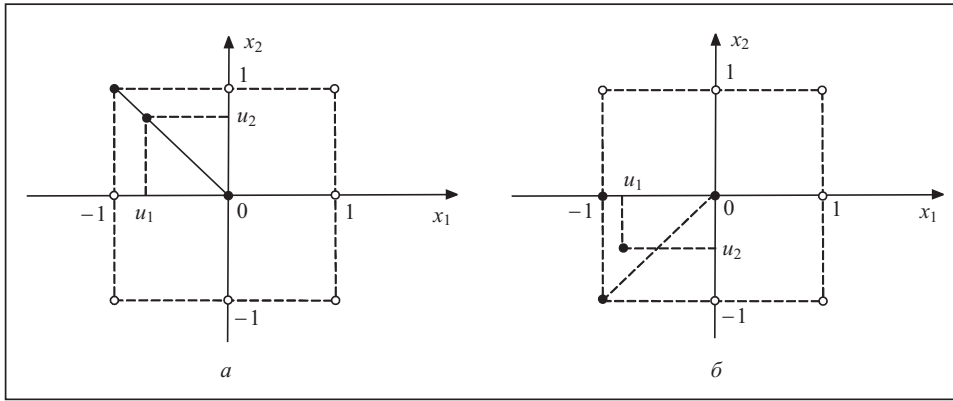


Рис. 1. Нечеткая линейная интерполяция при $N = 2$: $\bar{j}^0 = (0, 0)$; $|u_1| = |u_2|$, $\bar{j}^1 = (-1, 1)$ (а); $|u_1| \neq |u_2|$, $\bar{j}^1 = (-1, -1)$; $\bar{j}^2 = (-1, 0)$ (б)

плоскостями, оценки $\bar{P}(j_1^k, \dots, j_N^k)$ для которых известны; при этом более информативные показатели определенности u_n (у которых $|u_n|$ ближе к 1) имеют больший приоритет. Через точки $\{(j_1^k, \dots, j_N^k, \bar{s}_*^L(\alpha; j_1^k, \dots, j_N^k))\}$ и $\{(j_1^k, \dots, j_N^k, \bar{s}_*^R(\alpha; j_1^k, \dots, j_N^k))\}$, $k = 0, N$, с учетом их взаимного расположения проводятся гиперплоскости (плоскости при $N = 2$, прямые при $N = 1$). Расстояние между нижней (индекс L) и верхней (R) гиперплоскостями на траверзе (u_1, \dots, u_N) интерпретируется как α -уровневое множество $[\bar{s}_*^L(\alpha; u_1, \dots, u_N), \bar{s}_*^R(\alpha; u_1, \dots, u_N)]$ линейной интерполяции $\bar{P}(U_1, \dots, U_N)$.

Рассмотрим подробнее предложенную процедуру.

Случай $N = 1$. Траверзы расположены на отрезке $[-1, 1]$ оси $0x_1$. По оси $0t$ на траверзах $j \in \{-1, 0, 1\}$ размещены интервалы носителей α -уровня $[\bar{s}_*^L(\alpha; j), \bar{s}_*^R(\alpha; j)]$. По оси $0x_1$ задан нечеткий точечный траверз — сингелтон $U_1 = \alpha_{u_1}$. На оси траверзов $0x_1$ имеем $j^0 := 0$; $j^1 := \text{sign}(u_1)$. Точки $(j^0, \bar{s}_*^L(\alpha; j^0))$ и $(j^1, \bar{s}_*^L(\alpha; j^1))$, $(j^0, \bar{s}_*^R(\alpha; j^0))$ и $(j^1, \bar{s}_*^R(\alpha; j^1))$ плоскости $t0x_1$ соединим отрезками прямых

$$t^{L,R}(x_1) = |x_1| \times [\bar{s}_*^{L,R}(\alpha; j^1) - \bar{s}_*^{L,R}(\alpha; j^0)] + \bar{s}_*^{L,R}(\alpha; j^0).$$

Результатом является интервал между прямыми на траверзе u_1 :

$$[\bar{s}_*^L(\alpha; U_1), \bar{s}_*^R(\alpha; U_1)] = [|u_1| \times (\bar{s}_*^L(\alpha; j^1) - \bar{s}_*^L(\alpha; j^0)) + \bar{s}_*^L(\alpha; j^0), |u_1| \times (\bar{s}_*^R(\alpha; j^1) - \bar{s}_*^R(\alpha; j^0)) + \bar{s}_*^R(\alpha; j^0)]. \quad (10)$$

Случай $N = 2$. Траверзы располагаются в квадрате $[-1, 1]^2$ плоскости $0x_1x_2$ (рис. 1). По оси $0t$ на траверзах (j_1, j_2) , $j_1, j_2 \in \{-1, 0, 1\}$, размещены интервалы α -уровня $[\bar{s}_*^L(\alpha; j_1, j_2), \bar{s}_*^R(\alpha; j_1, j_2)]$. По осям $0x_1$ и $0x_2$ заданы нечеткие точечные траверзы соответственно $U_1 = \alpha_{u_1}$ и $U_2 = \alpha_{u_2}$. На плоскости траверзов $0x_1x_2$ имеем $\bar{j}^0 = (j_1^0, j_2^0) = (0, 0)$, $\bar{j}^1 = (j_1^1, j_2^1)$; $j_n^1 := \text{sign}(u_n)$.

Если $|u_1| = |u_2|$, то выполняется интерполяционная процедура для случая $N = 1$ с подстановкой \bar{j}^0 и \bar{j}^1 вместо j^0 и j^1 в (10):

$$[\bar{s}_*^L(\alpha; U_1, U_2), \bar{s}_*^R(\alpha; U_1, U_2)] = [|u_1| \times (\bar{s}_*^L(\alpha; \bar{j}^1) - \bar{s}_*^L(\alpha; \bar{j}^0)) + \bar{s}_*^L(\alpha; \bar{j}^0), |u_1| \times (\bar{s}_*^R(\alpha; \bar{j}^1) - \bar{s}_*^R(\alpha; \bar{j}^0)) + \bar{s}_*^R(\alpha; \bar{j}^0)].$$

При $|u_1| \neq |u_2|$ точка $\bar{j}^1 = (j_1^1, j_2^1)$ определяет на плоскости $0x_1x_2$ квадрат, ограниченный прямыми $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$, $x_1 = j_1^1$ и $x_2 = j_2^1$, в котором расположен точечный траверз (u_1, u_2) . На пересечении сторон этого квадрата находится третий опорный траверз $\bar{j}^2 = (j_1^2, j_2^2)$ — точка $(j_1^1, 0)$ при $|u_1| > |u_2|$ и точка $(0, j_2^1)$ при $|u_1| < |u_2|$, т.е. ближайшая к (u_1, u_2) из точек $(j_1^1, 0)$ и $(0, j_2^1)$. Через точки $(\bar{j}^0, \bar{s}_*^L(\alpha; \bar{j}^0))$, $(\bar{j}^1, \bar{s}_*^L(\alpha; \bar{j}^1))$, $(\bar{j}^2, \bar{s}_*^L(\alpha; \bar{j}^2))$ и $(\bar{j}^0, \bar{s}_*^R(\alpha; \bar{j}^0))$, $(\bar{j}^1, \bar{s}_*^R(\alpha; \bar{j}^1))$, $(\bar{j}^2, \bar{s}_*^R(\alpha; \bar{j}^2))$ проводим плоскости $t^{L,R}(x_1, x_2) = D_1^{L,R} \times |x_1| + D_2^{L,R} \times |x_2| + \bar{s}_*^{L,R}(\alpha; \bar{j}^0)$, где коэффициенты $D_1^{L,R}$ и $D_2^{L,R}$ определяются из систем уравнений:

$$\begin{cases} \bar{s}_*^{L,R}(\alpha, \bar{j}^1) = D_1^{L,R} \times |j_1^1| + D_2^{L,R} \times |j_2^1| + \bar{s}_*^{L,R}(\alpha, \bar{j}^0), \\ \bar{s}_*^{L,R}(\alpha, \bar{j}^2) = D_1^{L,R} \times |j_1^2| + D_2^{L,R} \times |j_2^2| + \bar{s}_*^{L,R}(\alpha, \bar{j}^0). \end{cases}$$

В результате получим интервал между плоскостями на траверзе (u_1, u_2) :

$$\begin{aligned} & [\bar{s}_*^L(\alpha; U_1, U_2), \bar{s}_*^R(\alpha; U_1, U_2)] = \\ & = [D_1^L \times |u_1| = D_2^L \times |u_2| = \bar{s}_*^L(\alpha; \bar{j}^0), D_1^R \times |u_1| = D_2^R \times |u_2| + \bar{s}_*^R(\alpha; \bar{j}^0)]. \end{aligned}$$

Случай $N \geq 3$. Траверзы расположены в гиперкубе $[-1, 1]^N$ подпространства $0x_1x_2 \dots x_N$. По оси $0t$ на траверзах $(j_1, \dots, j_N, 0)$, $j_n \in \{-1, 0, 1\}$, размещены интервалы α -уровней $[\bar{s}_*^L(\alpha; j_1, \dots, j_N), \bar{s}_*^R(\alpha; j_1, \dots, j_N)]$. По осям $0x_n$, $n = 1, N$, заданы нечеткие точечные траверзы $U_n = \alpha_{u_n}$. В пространстве $0x_1x_2 \dots x_N$ имеем $\bar{j}^0 = (j_1^0, \dots, j_N^0) = (0, \dots, 0)$, второй опорный траверз $\bar{j}^1 = (j_1^1, \dots, j_N^1)$: $j_n^1 := \text{sign}(u_n)$. Упорядочим последовательность $\{u_n\}_{n=1}^N$ по убыванию модулей. Обозначим полученный результат $\{u_{k_n}^*\}_{n=1}^N$: $|u_{k_{n_1}}^*| \geq |u_{k_{n_2}}^*|$, если $k_{n_1} < k_{n_2}$. Сгруппируем последовательность $\{u_{k_n}^*\}_{n=1}^N$: если $|u_{k_m}^*| = |u_{k_{m+1}}^*| = \dots = |u_{k_{m+q(k_m)}}^*|$, $q(k_m) \geq 1$, образуем из $\{u_{k_n}^*\}_{n=m}^{m+q(k_m)}$ группу. Если значение $|u_{k_m}^*|$ в последовательности $\{u_{k_n}^*\}_{n=1}^N$ не повторяется, группа состоит из одного элемента $u_{k_m}^*$ и соответствующее $q(k_m) = 0$. Обозначим h -ю группу $\{u_{k_n}^*\}_{n=m_h}^{m_h+q_h}$, H — количество полученных групп. Сформируем по результату проведенной группировки последовательность $\{y_h^*\}_{h=1}^H$, где $y_h^* = |u_{k_{m_h}}^*|$ — значение модулей, входящих в h -ю группу $\{u_{k_n}^*\}_{n=m_h}^{m_h+q_h}$. Все значения в последовательности $\{y_h^*\}_{h=1}^H$ различны и $y_{h_1}^* > y_{h_2}^*$ при $h_1 < h_2$. В пространстве интерполяции $(q_h + 1)$ размерность, соответствующую h -й группе $\{u_{k_n}^*\}_{n=m_h}^{m_h+q_h}$, заменим одной размерностью y_h , спроектировав диагональ гиперкуба (куба, квадрата), на которой расположены $\{u_{k_n}^*\}_{n=m_h}^{m_h+q_h}$, $|u_{k_{m_h}}^*| = \dots = |u_{k_{m_h+q_h}}^*|$, на любую из осей $\{0x_n\}_{n=m_h}^{m_h+q_h}$ (например, $0x_{m_h}$) и обозначив ее $0y_h$. Все $\{u_{k_n}^*\}_{n=m_h}^{m_h+q_h}$ учитываются синхронно. Далее полагаем, что размерность подпространства интерполяции равна H и выполняется она для модифицированных нечетких точечных траверзов $\{y_h^*\}_{h=1}^H$, соответствующих осям $\{0y_h\}_{h=1}^H$. В $[-1, 1]^H$ необходим $(H + 1)$ опорный траверз $\{\bar{j}^h\}_{h=0}^H$ и соответствующий

щие оценки $[\tilde{s}_*^L(\alpha; \bar{j}^h), \tilde{s}_*^R(\alpha; \bar{j}^h)]$. Два из них известны: начало координат $\bar{j}^0 = (0, \dots, 0)$ и $\bar{j}^1 = (j_1^1, \dots, j_N^1)$, $j_n^1 = \text{sign}(u_n)$. Для определения остальных траверзов вначале определим набор символов $\bar{j}^{*h} = (j_1^{*h}, \dots, j_H^{*h})$, $h = \overline{2, H}$:

$$\bar{j}^{*H} = (j_1^{*H}, \dots, j_H^{*H}) = (\oplus, 0, 0, \dots, 0), \text{ т.е. } j_1^{*H} = \oplus, j_i^{*H} = 0 \text{ для } i > 1;$$

$$\bar{j}^{*H-1} = (j_1^{*H-1}, \dots, j_H^{*H-1}) = (\oplus, \oplus, 0, \dots, 0),$$

$$\text{т.е. } j_1^{*H-1} = j_1^{*H-1} = \oplus, j_i^{*H-1} = 0 \text{ для } i > 2;$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\bar{j}^{*H-h} = (j_1^{*H-h}, \dots, j_H^{*H-h}) = (\oplus, \dots, \oplus, 0, \dots, 0),$$

$$\text{т.е. } j_i^{*H-h} = \oplus \text{ для } i \leq h+1, j_i^{*H-h} = 0 \text{ для } i > h+1;$$

$\dots\dots\dots$

$$\bar{j}^{*3} = (j_1^{*3}, \dots, j_H^{*3}) = (\oplus, \oplus, \dots, \oplus, 0, 0), \text{ т.е. } j_1^{*3} = \dots = j_{H-2}^{*3} = \oplus, j_{H-1}^{*3} = j_H^{*3} = 0;$$

$$\bar{j}^{*2} = (j_1^{*2}, \dots, j_H^{*2}) = (\oplus, \dots, \oplus, 0), \text{ т.е. } j_1^{*2} = \dots = j_{H-1}^{*2} = \oplus, j_H^{*2} = 0.$$

По символьным наборам $\bar{j}^{*l} = (j_1^{*l}, \dots, j_H^{*l})$, $l = \overline{2, H}$, соответствующие им значения опорных траверзов $\bar{j}^l = (j_1^l, \dots, j_N^l)$ определим следующим образом. Символьное значение j_h^{*l} соответствует h -й группе $\{u_{k_i}^*\}_{i=m_h}^{m_h+q_h}$, $h = \overline{1, H}$. Для каждого k_i , $i = \overline{m_h, m_h+q_h}$, если $j_h^{*l} = 0$, то $j_{k_i}^l := 0$; если $j_h^{*l} = \oplus$, то $j_{k_i}^l := j_{k_i}^1$. Через точки $\{\bar{j}^h, \tilde{s}_*^L(\alpha; \bar{j}^h)\}_{h=0}^H$ и $\{\bar{j}^h, \tilde{s}_*^R(\alpha; \bar{j}^h)\}_{h=0}^H$ проведем нижнюю (L) и верхнюю (R) интерполирующие гиперплоскости

$$t^{L,R}(\{y_h\}_{h=1}^H) = \sum_{h=1}^H D_h^{L,R} \times y_h + \tilde{s}_*^{L,R}(\alpha; \bar{j}^0),$$

где $D_h^{L,R}$ определяются из соответствующей системы уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} D_1^{L,R} = \tilde{s}_*^{L,R}(\alpha; \bar{j}^H) - \tilde{s}_*^{L,R}(\alpha; \bar{j}^0), \\ \dots\dots\dots \\ D_{H-h+1}^{L,R} = \tilde{s}_*^{L,R}(\alpha; \bar{j}^h) - \tilde{s}_*^{L,R}(\alpha; \bar{j}^0) - \sum_{i=1}^{H-h} D_i^{L,R}, \\ \dots\dots\dots \\ D_H^{L,R} = \tilde{s}_*^{L,R}(\alpha; \bar{j}^1) - \tilde{s}_*^{L,R}(\alpha; \bar{j}^0) - \sum_{i=1}^{H-1} D_i^{L,R}; \end{array} \right.$$

$$[\tilde{s}_*^L(\alpha; u_1, \dots, u_N), \tilde{s}_*^R(\alpha; u_1, \dots, u_N)] =$$

$$= \left[\sum_{h=1}^H D_h^L \times |u_{k_{m_h}}^*| + \tilde{s}_*^L(\alpha; \bar{j}^0), \sum_{h=1}^H D_h^R \times |u_{k_{m_h}}^*| + \tilde{s}_*^R(\alpha; \bar{j}^0) \right].$$

Если нечеткие показатели определенности U_n , $n = \overline{1, N}$, заданы конечными точками α -уровней $[u_n^L(\alpha), u_n^R(\alpha)]$, α -уровневое множество $[\tilde{s}_*^L(\alpha; U_1, \dots, U_N)]$,

$\bar{s}_*^R(\alpha; U_1, \dots, U_N)$ оценки $\bar{P}(U_1, \dots, U_N)$ можно определить соотношениями

$$\bar{s}_*^L(\alpha; U_1, \dots, U_N) := \min \{ \bar{s}_*^L(\alpha; x_1, \dots, x_N) : x_n \in [u_n^L(\alpha), u_n^R(\alpha)], n = \overline{1, N} \}, \quad (11)$$

$$\bar{s}_*^R(\alpha; U_1, \dots, U_N) := \max \{ \bar{s}_*^R(\alpha; x_1, \dots, x_N) : x_n \in [u_n^L(\alpha), u_n^R(\alpha)], n = \overline{1, N} \}.$$

При $N = 1$ соотношения (11) реализуются легко, а при $N > 1$ несколько сложнее. Интерполирующие поверхности состоят из фрагментов, определяемых точками (j_1, \dots, j_N) , $j_n \in \{-1, 0, 1\}$, на оболочке, ограничивающей (гипер)куб $[-1, 1]^N$. Фрагменты «сшиты» по разделяющим пограничным поверхностям (прямым либо плоскостям, либо гиперплоскостям). Так, при $N = 2$ квадрат носителя $[-1, 1]^2$ в каждом из 2^2 квадрантов состоит из $2!$ треугольных фрагментов с вершиной в начале координат и еще двумя на одной из сторон квадрата. Треугольники смыкаются по прямым $x_2 = x_1$ и $x_2 = -x_1$. Например (см. рис. 1, а) во втором квадранте $\bar{j}^0 = (0, 0)$, $\bar{j}^1 = (-1, 1)$, треугольники с третьей вершиной $\bar{j}^2 = (0, 1)$ и с вершиной $\bar{j}^2 = (-1, 0)$ определяют разные интерполирующие плоскости, совпадающие по прямой $x_2 = -x_1$. При $N = 3$ пространство R^3 разбивается координатными плоскостями на 2^3 квадрантов, в каждом из которых куб $[-1, 1]^3$ формируется из $3!$ фрагментов — тетраэдров с вершиной в начале координат и треугольным основанием на поверхности куба (рис. 2). Пирамиды смыкаются боковыми поверхностями, лежащими в плоскостях $x_2 = \pm x_1$, $x_3 = \pm x_2$ и $x_1 = \pm x_3$.

При $N > 3$ пространство R^N разбивается координатными плоскостями на 2^N квадрантов, в каждом из которых гиперкуб $[-1, 1]^N$ формируется из $N!$ фрагментов — многогранников с вершиной в начале координат и остальными вершинами на грани гиперкуба. Многогранники смыкаются поверхностями, содержащими точки \bar{j}^0, \bar{j}^1 и лежащими в гиперплоскостях $x_i = \pm x_j$, $1 \leq i, j \leq N$, $i \neq j$. Находясь в одном квадранте (определяемом \bar{j}^1), вершины параллелепипеда $\bar{U}(\alpha) = \prod_{n=1}^N [u_n^L(\alpha), u_n^R(\alpha)] \subset [-1, 1]^N$ могут

соответствовать различным фрагментам, так что при несовпадении комплектов опорных траверзов для вершин параллелепипеда $\bar{U}(\alpha)$ в поиске экстремумов (11) учитываются также точки пересечения ребер $\bar{U}(\alpha)$ с разделяющими (гипер)плоскостями. Алгоритм нахождения нужных точек состоит из проверок простых условий и решения систем линейных уравнений.

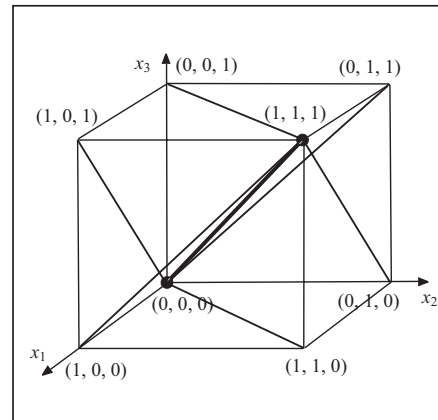


Рис. 2. Разбиение единичного куба в первом квадранте на $3! = 6$ опорных фрагментов — тетраэдров

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотренные соотношения, на которых базируется нечеткое сетевое оценивание, получены под руководством И.Н. Парасюка при разработке нечетких мультиагентных систем, ориентированных на создание моделей в отдельных прикладных областях с помощью различных методов работы с неопределенностью [12, 13]. Пробная нечеткая байесовская сеть состоит из последовательности нескольких относительно самостоятельных компонентов. Первый образует блок процедур, обеспечивающих ввод и корректность начальной информации, ее преобразование в пригодную для дальнейшего использования форму. Проводит-

ся априорное оценивание. Вторым следует блок, предназначенный для выполнения вычислений при четких оценках свидетельств или для опорных траверзов в случае недетерминированных свидетельств, когда за вычислительным блоком следует составляющая, выполняющая интерполяцию по полученным для опорных траверзов оценкам вероятностей состояний системы. Процедуры дефаззификации и ассистирования при интерпретации конечного результата сгруппированы в отдельный замыкающий блок. Все вычислительные процедуры двухшаговые. Вначале выполняется оценивание для всех возможных комбинаций определяющих точек вершин-предшественниц (отмеченных единицами в соответствующем столбце матрицы достижимости $\Theta(G)$) при $\alpha^* = 0,5$; для каждого допустимого состояния вершин выбираются «оптимальные тропы», а затем выполняется оценивание для оставшихся $\{\alpha_k\}_{k=0}^K \setminus \alpha^*$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Верёвка О.В., Парасюк И.Н. О распространении вероятностей в нечетких байесовских сетях с недетерминированными состояниями // Кибернетика и системный анализ. — 2008. — № 6. — С. 153–169.
2. Верёвка О.В., Парасюк И.Н. Ярусный подход к представлению байесовских сетей // Компьютерная математика. — 2010. — № 1. — С. 83–93.
3. Верёвка О.В. Эпюрное представление информации в нечетких байесовских сетях // Компьютерная математика. — 2013. — № 1. — С. 52–60.
4. Мациевский С.В. Нечеткие множества. — Калининград: Изд-во Калинингр. ун-та, 2004. — 176 с.
5. Верёвка О.В., Карпинка Е.С. Информационное наполнение нечеткой байесовской сети // Компьютерная математика. — 2014. — № 2. — С. 57–63.
6. Обработка нечеткой информации в системах принятия решений // А.Н. Борисов, А.В. Алексеев, Г.В. Меркурьева, Н.Н. Слядзь, В.И. Глушков. — М.: Радио и связь, 1989. — 304 с.
7. Заде Л.А. Понятие лингвистической переменной и его применение к понятию приближенных решений. — М.: Мир, 1976. — 165 с.
8. Парасюк И.Н., Костюкевич Ф.В. Методы трансформации байесовской сети для построения узлового дерева и их модификация // Компьютерная математика. — 2008. — № 1. — С. 70–80.
9. Верёвка О.В. Использование сетевых методов организации байесовского оценивания для нечеткой информации // Компьютерная математика. — 2013. — № 2. — С. 57–63.
10. Верёвка О.В. Распространение вероятностей в нечетких древовидных байесовских сетях // Компьютерная математика. — 2012. — № 2. — С. 10–17.
11. Верёвка О.В. Учет недетерминированных свидетельств при апостериорном оценивании в нечетких байесовских сетях // Компьютерная математика. — 2011. — № 2. — С. 98–109.
12. Сергієнко І.В., Парасюк І.М., Єршов С.В. Нечіткий трансформаційний підхід до розробки програмних систем // Проблеми програмування. — 2004. — № 2–3. — С. 122–132.
13. Парасюк И.Н., Ершов С.В. Моделе-ориентированная архитектура нечетких мульти-агентных систем // Компьютерная математика. — 2010. — № 2. — С. 62–74.

Поступила 06.10.2015