УДК 519.21

Т.В. ПЕПЕЛЯЕВА, Л.Б. ВОВК, И.Ю. ДЕМЧЕНКО

ОПТИМАЛЬНЫЕ СТРАТЕГИИ ДЛЯ ОДНОЙ МНОГОНОМЕНКЛАТУРНОЙ МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ

Аннотация. Рассмотрена задача управления марковскими процессами с дискретным временем. Исследуется многономенклатурная модель управления запасами при убывающих функциях общих издержек, для которой найдены условия существования оптимальной стратегии. Доказано существование оптимальной (*s, S*)-стратегии управления запасами.

Ключевые слова: марковские процессы, управление запасами, (*s, S*)-стратегия, критерий оптимальности, оптимальная стратегия.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящей статье исследуется многономенклатурная модель управления запасами при некоторых предположениях о структуре издержек. Эта система описывается с помощью (управляемых) марковских процессов с дискретным временем. Уровень запаса каждого продукта, а также величина дозаказов принимают значения в R_+, причем уровень запасов каждого продукта системы ограничен сверху. В дискретные моменты времени наблюдается уровень запасов и принимается решение о его пополнении или непополнении. Цель статьи — нахождение оптимальной стратегии при убывающих функциях общих издержек.

В работе [1] найдены условия оптимальности (*s, S*)-стратегии для многономенклатурной модели управления запасами с функцией стоимости, определяемой издержками хранения запасов, стоимостью заказа продукции, а также с издержками, вызванными их дефицитом.

Теория управляемых марковских процессов с дискретным временем получила начало своего развития в работах А. Вальда [2, 3], Р. Беллмана [4] и В.С. Михалевича [5]. В работах В. Флеминга [6], Р.А. Ховарда [7], А.Н. Ширяева и О.В. Вискова [8], Д. Блекуэлла [9] и других публикациях фактически были заложены основы теории управляемых случайных процессов для конечного множества состояний управлений. В дальнейшем в работах Л.Г. Губенко и Э.С. Штатланда [10], А.А. Юшкевича и Е.Б. Дынкина [11], Г. Хюбнера [12] и многих других изучалась задача оптимального управления для случая компактного фазового пространства и компактного множества управлений. В условиях современности при решении различных прикладных задач особый интерес представляет применение достаточно развитой теории управляемых случайных процессов для нахождения оптимальных стратегий. Задача управления запасами является одной из них. Для однономенклатурных задач теории запасов проблема нахождения условий оптимальности, широко известная в теории запасов, (*s,S*)-стратегия рассматривалась в работах [13–15] и других.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ УПРАВЛЯЕМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Приведем некоторые сведения из теории управления случайными процессами, используемые в настоящей статье.

Рассмотрим управляемую систему со случайными воздействиями с дискретным временем. Фазовое пространство (пространство состояний) стохастического процесса $X = (X_n : n \in N)$, которое описывает развитие системы во времени, обозначим $\boldsymbol{X}$, а пространство принимаемых решений обозначим $\boldsymbol{A}$. Пространства $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{A}$ являются сепарабельными метрическими пространствами с борелевскими σ-алгебрами $\aleph$ и $\Im$ соответственно. Если в момент времени $n \in N$ система находится в состоянии $x \in \boldsymbol{X}$, то принимается решение $D_n = a,\ a \in A_x \in \Im$, где A_x — набор допустимых действий в состоянии x. Обозначим $A: \boldsymbol{X} \to \Im$, $x \to A_x$ отображение, связывающее допустимый набор действий с данным состоянием системы. Будем считать, что $\Delta = \{(x, a), x \in \boldsymbol{X}, a \in A_x\} \in (\aleph \otimes \Im)$ — борелевские подмножества пространства $\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{A}$.

Случайная эволюция системы управляется множеством переходных вероятностей

$$P\{B| x_n, a_n\} = P\{X_{n+1} \in B| X_0 = x_0,\ D_0 = a_0, \ldots, X_n = x_n,\ D_n = a_n\},$$

где $B \in \aleph$, $(x_k, a_k) \in \Delta$ и x_k– состояние системы в момент времени k, a_k — выбранное управление в момент времени k, $k \le n$.

Обозначим $r(x, a)$ ожидаемые издержки (затраты) за один период, если система находится в состоянии x в начале периода и принимается решение $a \in A_x$. Будем полагать, что $r(x, a)$ — ограниченная измеримая функция на Δ, $|r(x, a)| \le C < \infty$, $(x, a) \in \Delta$, для некоторого $0 < \mathrm{C} < \infty$. Общей допустимой стратегией управления системой является последовательность $\delta = \{\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_n, \ldots\}$ переходных вероятностей такая, что вероятностная мера $\delta_n(\cdot | x_0, a_0, \ldots, x_n)$ в $(A, \Im)$ сосредоточена на A_{x_n}.

Стратегия δ называется стационарной марковской, если $\delta_n(\cdot | x_0, a_0, \ldots, x_n) = \delta(\cdot | x_n)$, $n = 0, 1, \ldots$ Стационарная марковская стратегия является детерминированой, если мера $\delta(\cdot | x)$ сосредоточена в точке для любого $x \in \boldsymbol{X}$. Обозначим $\delta(x)$ точку концентрации массы $\delta(\cdot | x)$.

Пусть $\Re$ — класс допустимых стратегий и $\Re_1$ — класс стационарных марковских детерминированных стратегий. Для оценивания выбранной стратегии запишем критерий оптимальности как средние ожидаемые издержки стратегии δ

$$\varphi(x, \delta) = \lim_{n \to \infty} \sup \frac{1}{n+1} E_x^\delta \sum_{k=0}^{n} r(X_k D_k).$$

Стратегия δ^* оптимальна (φ-оптимальна [10]) относительно этого критерия, если $\varphi(x, \delta^*) = \inf\limits_{\delta \in \Re} \varphi(x, \delta)$.

Обозначим $\Xi(\boldsymbol{X})$ банахово пространство ограниченных измеримых по Борелю функций на $\boldsymbol{X}$ с нормой $||u|| = \sup\limits_{x \in X} |u(x)|$. В дальнейшем будем использовать следующий результат [10].

Теорема 1. Пусть пространство действий $\boldsymbol{A}$ компактно и отображение $A: X \to \Im, x \to A_x$ полунепрерывно сверху. Пусть также существует мера μ на $(\boldsymbol{X}, \aleph)$, $\mu(\boldsymbol{X}) > 0$, такая, что выполняется неравенство

$$P\{B| x\} \ge \mu(B),\ \ (x, a) \in \Delta,\ B \in \aleph.$$

Предположим также, что на множестве Δ выполнены следующие условия:

1) функция стоимости $r(x, a)$ полунепрерывна снизу в (x, a);

2) вероятность перехода $P(\cdot | x, a)$ слабо непрерывна в (x, a).

Тогда в классе $\Re_1$ существует стационарная детерминированная φ-оптимальная стратегия с минимальной стоимостью $W = \int V(x) \mu(dx)$, где $V(x)$ — единственная функция в $\Xi(\boldsymbol{X})$ и определяется решением уравнения оптимальности:

$$V(x)=\inf_{a\in A_x}\left\{r(x,a)+\int V(x)P'(dy|x,a)\right\},\ x\in \boldsymbol{X},$$

где $P'(B|x,a)=P(B|x,a)-\mu(B),\ B\in\aleph$.

Замечание 1. Данная теорема имеет место для функций издержек со значениями в $[0,\infty)$, которые необходимо минимизировать. В [10] приведены условия максимизации вознаграждения (дохода) $r(x,a)$ за один период, если система находится в состоянии x и принято решение $a\in A_x$. В настоящей статье теорема 1 переформулирована с использованием отрицательной фунцкции $r_1(x,a)=-r(x,a)$.

Рассмотрим модель управления системой с многомерными фазовым пространством и пространством принятия решений. Пусть пространство состояний является декартовым произведением m множеств, т.е. $\boldsymbol{X}=X_1\times X_2\times\ldots\times X_m$. Пространство принимаемых решений представляется как $\boldsymbol{A}=A_1\times A_2\times\ldots\times A_m$.

Для каждой пары $x_i\in X_i,\ a_i\in A_i$ обозначим $r_i(x_i,a_i)$ ожидаемые издержки (затраты) за один период, если *i*-я подсистема находится в состоянии x_i в начале периода и принимается решение a_i.

Ожидаемые издержки всей системы за один период обозначим $r(x,a)$, где $x=(x_1,x_2,\ldots,x_m)$, $a=(a_1,a_2,\ldots,a_m)$. Функция $r(x,a)$ является сепарабельной, т.е. имеет вид $r(x,a)=\sum_{i=1}^{m}r_i(x_i,a_i)$.

Далее будем считать, что пространства $X_i,\ A_i,\ i=1,\ldots,m$, и функции $r_i(x_i,a_i)$ удовлетворяют соответствующим условиям, приведенных выше для $r(x,a)$ общего вида. Тогда критерий φ-оптимальности данной стратегии запишем следующим образом:

$$\varphi(x,\delta)=\lim_{n\to\infty}\sup\frac{1}{n+1}E_x^{\delta}\sum_{k=0}^{n}r(X_k,D_k)=\lim_{n\to\infty}\sup\frac{1}{n+1}E_x^{\delta}\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=1}^{m}r_i(x_i^k,d_i^k),$$

где $X_k=(x_1^k,x_2^k,\ldots,x_m^k)$ — состояние системы в момент времени k, $D_k=(d_1^k,$ $d_2^k,\ldots,d_m^k)$ — выбранное управление в момент времени k.

Обозначим $\Xi_1(\boldsymbol{X})$ банахово пространство ограниченных измеримых по Борелю функций на $\boldsymbol{X}$ с нормой $v(x)=\sum_{i=1}^{m}\sup_{x_i\in X_i}|v_i(x_i)|$.

В [1] была доказана следующая теорема, которую будем использовать в настоящей статье.

Теорема 2. Пусть $\boldsymbol{A}$ — компактное пространство, отображение $A:\boldsymbol{X}\to 2^A$ полунепрерывно сверху и существует $\mu_i(X_i)>0$ на $(\boldsymbol{X},\aleph)$, $i=\overline{1,m}$:

$$\mu_i(X_i)\le Q_i(B_i/x_i,a_i),\ B_i\in\aleph,\ i=\overline{1,m}.$$

Пусть также выполнены следующие условия:

1) функции $r_i(x_i,a_i)$ полунепрерывны снизу в (x_i,a_i);

2) переходные вероятности $Q_i(B_i/x_i,a_i)$ слабо непрерывны в (x_i,a_i).

Тогда в классе стационарных марковских детерминированных стратегий существует оптимальная стратегия с минимальной стоимостью

$$W=\int V(x)\mu(dx),$$

где

$$V=\inf_{a\in A}\left\{r(x,a)+\int_X V(y)Q'(dy/x,a)\right\}=$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\inf_{a_i\in A_i}\left\{r_i(x_i,a_i)+\int_{X_i}V_i(y_i)\left[Q_i(dy_i/x_i,a_i)-\mu_i(dy_i)\prod_{j=1,j\ne i}^{m}\mu_j(x_j)\right]\right\}.$$

2. МНОГОНОМЕНКЛАТУРНЫЕ МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ ПРИ УБЫВАЮЩИХ ФУНКЦИЯХ ОБЩИХ ИЗДЕРЖЕК

Представим модель управления запасами. Рассмотрим систему управления запасами m продуктов, каждый из которых может непрерывно пополняться. Максимальный уровень запаса i-го продукта равен Q_i, поэтому запас i-го продукта принимает значение на интервале $[0, Q_i]$.

Состояние запасов каждого продукта проверяется в дискретные моменты времени N, затем принимаются соответствующие решения о пополнении продовольственных складов следующим образом.

Если уровень запасов i-го продукта в момент времени $n \in \boldsymbol{N}$ составляет $X_i^n = x_i \in [0, Q_i]$, то производится заказ этого продукта $D_i^n \in A_i^x$, $A_i^x := [0, Q_i - x_i]$.

Обозначим $\boldsymbol{X} = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_m$, $X_i = [0, Q_i]$, $X = (X^n : n \in \boldsymbol{N})$ — пространство состояний системы, которое описывает развитие системы во времени, $\boldsymbol{A} = A_1^x \times A_2^x \times \ldots \times A_m^x$ — пространство принимаемых решений.

В момент времени $(n+)$ по каждому i-му продукту поступает случайное требование ξ_i^n; $\xi_i = (\xi_i^n : n \in \boldsymbol{N})$, $i = \overline{1, m}$, — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с функциями распределения $G_i(x)$, $x \geq 0$, $i = \overline{1, m}$.

Обозначим $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$, будем считать, что $\xi_n = (\xi_1^n, \xi_2^n, \ldots, \xi_m^n)$, $n \in \boldsymbol{N}$, не зависят от истории системы до момента времени n включительно и что $G_i(x) < 1$, $G(x) = G_1(Q_1) \times \ldots \times G_m(Q_m)$, $Q = (Q_1, \ldots, Q_m)$, а также $G_i(\cdot)$ непрерывны.

Требование по i-му товару, которое поступило в момент времени $(n+)$, удовлетворяется (если это возможно), исходя из запаса этого продукта $X_i^n + D_i^n$, который имеется в наличии в конце интервала времени $[n, n+1)$. Система такова, что дефицит или частичный дефицит какого-либо из m продуктов приводит к потери, а не откладыванию требования.

Эволюцию процесса запаса системы описывает уравнение

$$X^{n+1} = (X^n + D^n - \xi^n)_+, n \in \boldsymbol{N},$$

где $(a)_+ = \max(a, 0)$ — положительная часть $a \in \mathrm{R}_+$, или по каждому i-му продукту $(i = \overline{1, m})$

$$X_i^{n+1} = (X_i^n + D_i^n - \xi_i^n)_+, \; n \in \boldsymbol{N}, \; i = \overline{1, m}.$$

Будем предполагать, что стоимость заказа (которая может включать издержки производства) состоит из фиксированной стоимости и линейной функции. Так, заказ $x_i > 0$ товаров приводит к ожидаемым издержкам заказа $C_i^2(x_i) = A_i + c_i \cdot x_i$, $A_i \geq 0$, $c_i \geq 0$.

Далее предположим, что общие издержки хранения и дефицита за период времени $f_i(x_i)$ зависят от уровня запасов $x_i \geq 0$, где $f_i(\cdot)$ полунепрерывны снизу.

Для системы, находящейся в состоянии x в начале периода, при принятии решения $a \in \boldsymbol{A}$ ожидаемые издержки за один период составляют $r(x, a) = \sum_{i=1}^{m} r_i(x_i, a_i)$, где $r_i(x_i, a_i)$ — ожидаемые издержки по i-му продукту за один период времени, если состояние данного продукта равно x_i, и в начале периода принято решение d^{a_i}:

$$r_i(x_i, d^0) = f_i(x_i), \; i = \overline{1, m},$$

и для $a_i > 0$

$$r_i(x_i, d^{a_i}) = f_i(x_i + a_i) + C_i^2(a_i), \; i = \overline{1, m}.$$

Вероятности перехода на X_i для любого борелевского подмножества $[0, Q_i]$ задаются следующим образом:

$$P([y_i^1, y_i^2]/x_i, d^{a_i}) = G_i(x_i + a_i - y_i^1) - G_i(x_i + a_i - y_i^2),$$

$$a_i \in [0, Q_i - x_i], 0 \le y_i^1 \le y_i^2 \le x_i + a_i,$$

$$P(\{0\}/x_i, d^{a_i}) = 1 - G_i(x_i + a_i -), x_i \in [0, Q_i].$$

Вероятности перехода системы определяются выражением $P(B/x, d^a) = \prod_{i=1}^{m} P(B_i/x_i, d^{a_i})$, где B_i — борелевские подмножества $[0, Q_i]$.

Следующая теорема указывает на существование оптимальной стратегии для данной модели управления запасами.

Теорема 3. Для рассматриваемой марковской модели управления в классе $\Re_1$ существует φ-оптимальная стратегия с минимальной стоимостью $W = \int V(x)\mu(dx)$.

Здесь $\mu(\cdot) = \mu_1(\cdot)\ldots\mu_m(\cdot)$, $\mu_i(\cdot)$ — мера, сконцентрированная в точке 0 с весом $\overline{G}_i = 1 - G(x)$, $i = \overline{1, m}$, $\overline{G} = \overline{G}_1 \ldots \overline{G}_m$, а $V(x)$ — функция, удовлетворяющая уравнению оптимальности:

$$V(x) = LV(x) = \sum_{i=1}^{m} \min_{a \in A} \left\{ f_i(x_i) + f_i(x_i + a_i) + C_i^2(a_i) + \right.$$

$$\left. + \int_{X_i} V_i(y_i) \left[P(dy_i/x_i, a_i) - \mu_i(dy_i) \prod_{j=1, j \ne i}^{m} \mu_j(x_j) \right] \right\}.$$

Доказательство. Проверим выполнение условий теоремы 2 о существовании φ-оптимальной стратегии, принадлежащей классу детерминированных (марковских) стратегий, для которых достигается минимальное значение издержек $W = \int V(x)\mu(dx)$.

1. Пусть A: $[0, Q_1] \times \ldots \times [0, Q_m] \to \Im$ — отображение, которое связывает с каждым состоянием x набор допустимых решений $A^* \in \Im$. Тогда A — полунепрерывна сверху. Действительно, если $x^n \in \boldsymbol{X} = [0, Q_1] \times \ldots \times [0, Q_m]$,

$$a^n = (a_1^n, \ldots, a_m^n) \in A^{x^n} = [0, Q_1 - x_1^n] \times \ldots \times [0, Q_m - x_m^n],$$

$$\lim_{x \to \infty} x^n = x = (x_1, \ldots, x_m), \ \lim_{a \to \infty} a^n = a = (a_1, \ldots, a_m),$$

то в пределе имеем $(0, \ldots, 0) \le (a_1, \ldots, a_m) \le (Q_1 - x_1, \ldots, Q_m - x_m)$, т.е. $a \in A^x$. Поэтому A — полунепрерывна сверху.

2. Функции $r_i(x_i, a_i)$, $i = \overline{1, m}$, полунепрерывны снизу, что следует из их определения.

3. Слабая непрерывность вероятностей перехода $P_i(B_i/x_i, a_i)$, $i = \overline{1, m}$, следует из их определения.

4. Ограниченность $r_i(x_i, a_i)$, $i = \overline{1, m}$, следует из ограниченности f_i, C_i^2, $i = \overline{1, m}$.

Рассмотрим теперь задачу определения структуры оптимальной стратегии для рассматриваемой марковской модели. Известно, что для многих систем управления запасами оптимальной является стратегия, для которой существует такой основной уровень запасов S, который приближается к оптимальному уровню запаса после заказа. Поскольку имеется возможность заказать любое количество продукта, то уровень S в точности достигается. Далее обычно доказывается оптимальность (s, S)-стратегии: заказ на пополнение продукта производится только тогда, когда уровень запаса меньше s.

Будем использовать следующую теорему, полученную в [14] для однономенклатурной задачи теории запасов. Приведем ее формулировку в обозначениях настоящей статьи с учетом того, что в данной модели вероятность выполнения заказа для каждого продукта равна единице.

Теорема 4. Пусть $c_i \cdot x_i + f_i(x_i), x_i \in [0, Q_i], i = \overline{1, m}$, монотонно убывает.

Тогда оптимальная стратегия $\delta_i^* \in \Re_i^1$ ($\Re_i^1$ — класс стационарных марковских детерминированных стратегий для i-го продукта) для задачи управления запасов представляется в следующем виде. Существует порог $x_i^* \in [0, Q_i]$ такой, что

$$\delta_i^* = \begin{cases} d_{Q_i - x_i}, & x_i < x_i^*; \\ d_0, & x_i > x_i^*. \end{cases}$$

Следующая теорема позволяет определить структуру оптимальной стратегии для многономенклатурной системы запасов.

Теорема 5. Пусть функция $c_i \cdot x_i + f_i(x_i)$, $x_i \in [0, Q_i]$, $i = \overline{1, m}$, монотонно убывает. Тогда φ-оптимальная стратегия $\delta^* \in \Re_1$ для задачи управления запасов имеет следующий вид: существует порог $x^* = (x_1^*, \ldots, x_m^*) \in [0, Q_1] \times \ldots \times [0, Q_m]$ такой, что $\delta^* = (\delta_1^*, \ldots, \delta_m^*)$ и для $i = \overline{1, m}$

$$\delta_i^* = \begin{cases} d_{Q_i - x_i}, & x_i < x_i^*; \\ d_0, & x_i \geq x_i^*. \end{cases}$$

Доказательство. Условия данной теоремы обеспечивают выполнение условий теоремы 4, которая задает структуру оптимальной стратегии δ_i^*, $i = \overline{1, m}$, по каждому i-му товару, т.е. $\varphi_i(x_i, \delta_i^*) = \inf\limits_{\delta_i \in \Re_i} \varphi_i(x_i, \delta_i)$, $\varphi_i(x_i, \delta_i) = \lim\limits_{n \to \infty} \sup \frac{1}{n+1} E_x^\delta \sum\limits_{k=0}^{n} r(x_i^k, d_i)$, где φ_i – средняя ожидаемая стоимость стратегии δ_i, $\Re_i$ — класс допустимых стратегий для i-го товара, $i = \overline{1, m}$.

Поскольку

$$\varphi(x, \delta) = \lim_{n \to \infty} \sup \frac{1}{n+1} E_x^\delta \sum_{k=0}^{n} r(X_k, D_k) =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \sup \frac{1}{n+1} E_x^\delta \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=1}^{m} r_i(x_i^k, d_i^k) = \sum_{i=1}^{m} \varphi_i(x_i, \delta_i),$$

т.е.

$$\varphi(x, \delta^*) = \inf_{\delta \in \Re} \varphi_i(x, \delta) = \inf_{\delta \in \Re} \sum_{i=1}^{m} \varphi_i(x_i, \delta_i) = \sum_{i=1}^{m} \inf_{\delta_i \in \Re_i} \varphi_i(x_i, \delta_i) = \sum_{i=1}^{m} \varphi_i(x_i, \delta_i^*),$$

то утверждение теоремы выполнено.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена многономенклатурная модель управления запасами при убывающих функциях общих издержек. Доказана теорема о существовании оптимальной стратегии для данной модели с использованием теоремы о существовании оптимальной стратегии в классе стационарных марковских стратегий в случае многомерных фазового пространства и пространства принятия решений. Для данной модели определена структура оптимальной стратегии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пепеляева Т.В., Вовк Л.Б., Демченко И.Ю. Об одной задаче многономенклатурной модели теории запасов // Управляющие системы и машины. — 2015. — № 2. — С. 32–38.
2. Wald A. Sequential analysis. — New York: Wiley, 1947. — 212 p.
3. Wald A. Statistical decision functions. — New York: Wiley, 1950. — 179 p.
4. Bellman R. Dynamic programming. — New Jersey: Princton Univ. Press, 1957. — 342 p.
5. Михалевич В.С. Последовательные байесовские решения и оптимальные методы приемочного статистического контроля // Теория вероятностей и ее применения. — 1956. — **1**, № 4. — С. 395–421.
6. Fleming W. Some Marcovian optimization problems // J. Math. and Mech. — 1963. — **12**, N 1. — P. 131–140.
7. Ховард Р.А. Динамическое программирование и марковские процессы: Пер. с англ. — М.: Сов. радио, 1964. — 192 с.
8. Висков О.В., Ширяев А.Н. Об управлениях, приводящих к оптимальным стационарным режимам // Труды МИАН , Сборник статей по теории вероятностей. — 1964. — LXXI. — С. 35–45.
9. Blackwell D. Discounted dynamic programming // Ann. Math. Statist. — 1965. — **36.** — P. 226–235.
10. Gubenko L.G., Statland E.S. On controlled Markov processes in discrete time // Theory Probab. and Math. Statistics. — 1975. — **7**. — P. 47–61.
11. Дынкин Е.Б., Юшкевич А.А. Управляемые марковские процессы и их приложения, — М.: Наука, 1975. — 338 с.
12. Höbner G. Stochastische dynamische Optimierung // Lect. Notes: Fachbereich Math. — Hamburg: Univ. Hamburg, 1981. — 137 p.
13. Veinott A.F. On optimality of (s, S)-policiek . New conditions and new proof // SIAM J. Appl. Math. — **14.** — P. 1067–1083.
14. Дадуна Г., Кнопов П.С., Тур Л.П. Оптимальные стратегии для системы запасов с функциями стоимости общего вида // Кибернетика и системный анализ. — 1999. — № 4. — P. 106–123.
15. Кнопов П.С., Дериева Е.Н., Демченко С.С. О моделях управления запасами с выпуклой функцией издержек // Кибернетика и системный анализ. — 2003. — № 2. — С. 149–156.

Поступила 05.08.2015