

— 2009. — №1. — С. 13—16.

6. Зинченко Е.Е. Экспериментальное исследование параметров вентильных индукторно-реактивных двигателей. // Вестник Нац. техн. ун-та „ХПИ“. — 2008. — № 40. — С. 30—38.

7. Кузнецов В.А., Кузьмичев В.А. Вентильно-индукторные двигатели. — М.: МЭИ. 2003. — 70 с.

8. Мускин Ю.В. Вентильный реактивный двигатель с программным формированием выходных характеристик. / Дис. на соиск. ученой степени канд. техн. наук по специальности 05.09.01 — Электрические машины и аппараты. — Дон-НТУ. Донецк. 2005.

9. Остапьевский Н.А., Ковган А.Н. Вентильно-индукторный привод как перспективный вид регулируемого электропривода // Электротехника і електромеханіка. — 2002. — №1. — С. 52—56.

10. Рышша В.В. Математическое моделирование линейных вентильно-реактивных двигателей // Электротехника і електромеханіка. — 2003. — №4. — С. 72—76.

11. Ткачук В.І. Електромеханотроніка. — Львів: Нац. ун-т "Львівська політехніка", 2006. — 440 с.

Надійшла 02.12.2008

УДК 621.313

Г.А.ЦИГАНКОВА (Нац. ун-т харчових технологій, м. Київ)

## Математичне моделювання магнітного поля в електродинамометрі для розрахунку струмів у роторі дископодібної форми

*Розглянуто особливості виникнення вихрових струмів у роторі електродинамометра дископодібної форми з осьовим повітряним робочим зазором при зубцево-пазовій конфігурації магнітопровода індуктора. Наведено результати експериментального дослідження зміни розподілу магнітної індукції в зазорі під впливом вихрових струмів у диску ротора для різного співвідношення ширини зубця і паза.*

*Рассмотрены особенности возникновения вихревых токов в роторе дископодобного электродинамометра с осевым воздушным рабочим зазором при зубчато-пазовой конфигурации магнитопровода индуктора. Приведены результаты экспериментального исследования изменения распределения магнитной индукции в зазоре под влиянием вихревых токов в диске ротора для разных соотношений ширины зубца и паза.*

Серед різноманітних гальмівних пристроїв особливе місце посідає дископодібне електромагнітне гальмо (електродинамометр), яке має електропровідний диск, що може обертатися в підшипниках індуктора з осьовим зазором [6]. Завдяки зменшенню розмірам в осьовому напрямку такого гальма, воно може бути закріплене безпосередньо на валу досліджуваного двигуна. При цьому диск буде обертатися разом із ротором двигуна, а індуктор з противагами — повертатися на кут, синус якого пропорційний моменту на валу. Щоб електромагнітне гальмо створювало гальмівний момент, індуктор повинен збуджувати у робочому зазорі неоднорідне магнітне поле. Це досягається завдяки виконанню машини з нерівномірним робочим зазором, нерівномірним внаслідок існування на індукторі зубців і пазів, що чергуються за напрямом руху диска.

Останнім часом пристроям дископодібної

форми приділяється все більше уваги [3]. Разом з тим, електромагнітні процеси в провідному середовищі, яке обертається в магнітному полі з індукцією, направленою паралельно осі обертання, досліджені недостатньо. Стаття присвячена розробці математичної моделі електромагнітного поля в електропровідному середовищі з врахуванням неоднакової швидкості руху точок середовища відносно стаціонарного неоднорідного магнітного поля. Існуючі моделі електромагнітного поля в рухомому середовищі здебільшого не враховують залежність швидкості руху середовища від просторових координат. Математична модель, що пропонується, дозволить виявити особливість електромагнітних процесів в електропровідному диску електродинамометра з осьовим робочим зазором.

Для оцінки адекватності математичної моделі проведено фізичний експеримент по визначенню гармонічного складу розподілу магнітної індукції в

робочій зоні електродинамометра при різній конфігурації зубчатого зазора.

Для експериментального дослідження електромагнітних процесів у провідному диску електродинамічного гальма була виготовлена фізична модель [9]. У ході досліджень змінювалася форма та ширина пазів  $b_{\text{п}}$  та зубців  $b_{\text{з}}$  індуктора моделі. Було проведено експерименти для чотирьох співвідношень розмірів пазів: 1)  $b_{\text{п}} = \text{const} = 10$  мм; 2)  $b_{\text{п}} = b_{\text{з}}$ ; 3)  $b_{\text{п}} = \text{const} = 13,6$  мм; 4)  $b_{\text{п}} \approx 1,7 \cdot b_{\text{з}}$ . Для визначення гармонічного складу магнітної індукції в робочому зазорі на поверхні диску було розміщено вимірювальні витки (рис. 1), амплітуди гармонічних складових електрорушійних сил яких пропорційні амплітудам гармонічних складових магнітної індукції з числами пар полюсів  $\nu_k$ ,  $k = \overline{1, 4}$ , кратними числу пар полюсів  $\nu_{\text{роб}}$  робочої гармонічної складової магнітної індукції:

$$\begin{aligned} \nu_1 &= \nu_{\text{роб}}(2i-1), & \nu_2 &= 2\nu_{\text{роб}}(2i-1), \\ \nu_3 &= 4\nu_{\text{роб}}(2i-1), & \nu_4 &= 8\nu_{\text{роб}}(2i-1). \end{aligned} \quad (1)$$

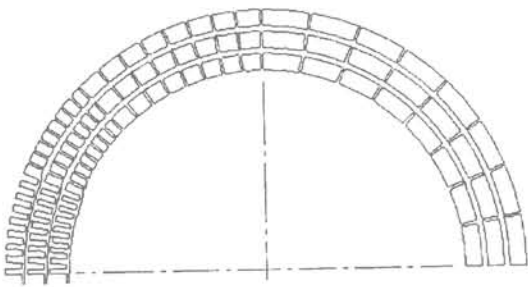


Рис. 1

Для побудови математичної моделі електромагнітних процесів в електропровідному диску електродинамічного гальма приймемо наступні припущення: 1) зубчатий зазор робочої зони можна замінити еквівалентним рівномірним зазором з розміщеними на його поверхні уявними струмами [7]; 2) електропровідність зовнішньої межі диска дорівнює  $\infty$ ; 3) індукція на бокових поверхнях диска відповідає її величині при нерухомому диску; 4) ротор має сталі товщину  $d_{\text{д}}$ , магнітну проникність  $\mu$ , електропровідність  $\delta$  та діелектричну проникність  $\epsilon$ .

Величину еквівалентного рівномірного зазору  $d_{\text{екв}}$  знайдемо, виходячи із збереження значення постійної складової розподілу магнітної індукції  $B_0$  в робочій зоні магнітопровода електродинамометра при заданих ампервитках обмотки збудження [9]. Схема розта-

шування елементів та розміри такої моделі електродинамометра з феромагнітним диском показані на рис. 2. Диск товщиною  $d_{\text{д}}$  віддалено від пакетів індуктора на величину осьового зазора  $d$  у центральній частині моделі та  $d_{\text{екв}}$  у робочій зоні. Уявні струми, розміщені на поверхні індуктора в області робочої зони, умовно показано на верхній частині рис. 3. Обмотка збудження (на рис. 2 не показана) розміщена в кільцевому пазі з внутрішнім радіусом  $r_1$  і зовнішнім радіусом  $r_2$ .

Виберемо циліндричну систему координат, розмістивши вісь  $z$  по осі обертання ротора електродинамометра, а початок координат посередині ротора (точка 0 на рис. 2). Математичну модель будемо, використовуючи принцип накладання. Будемо розглядати магнітне поле в зазорі електродинамометра при нерухомому роторі як суму хвиль розподілу магнітної індукції, яка в повітряному зазорі має лише складову по координаті  $z$ . Вихрові струми ротора, які виникають при його обертанні, не будуть змінювати гармонічний склад розподілу магнітної індукції, впливаючи лише на амплітуду та фазу кожної хвилі магнітної індукції результуючого поля.

Для визначення уявних струмів прийнятої фізичної моделі розглянемо в області зазора робочої зони довільну хвилю магнітної індукції  $B_{\nu z}$  з числом пар полюсів  $\nu$  у циліндричній системі координат  $z, r, \varphi_c$ , нерухомій відносно статора

$$B_{\nu z} = B_{\text{ав}z} \cos \nu \varphi_c. \quad (2)$$

Амплітуда  $B_{\text{ав}z}$  хвилі розподілу магнітної індукції в повітряному зазорі в загальному випадку може залежати від координати  $r$ .

Для створення такої хвилі магнітної індукції в зазорі  $d_{\text{екв}}$  повинні протікати струми, що відпові-

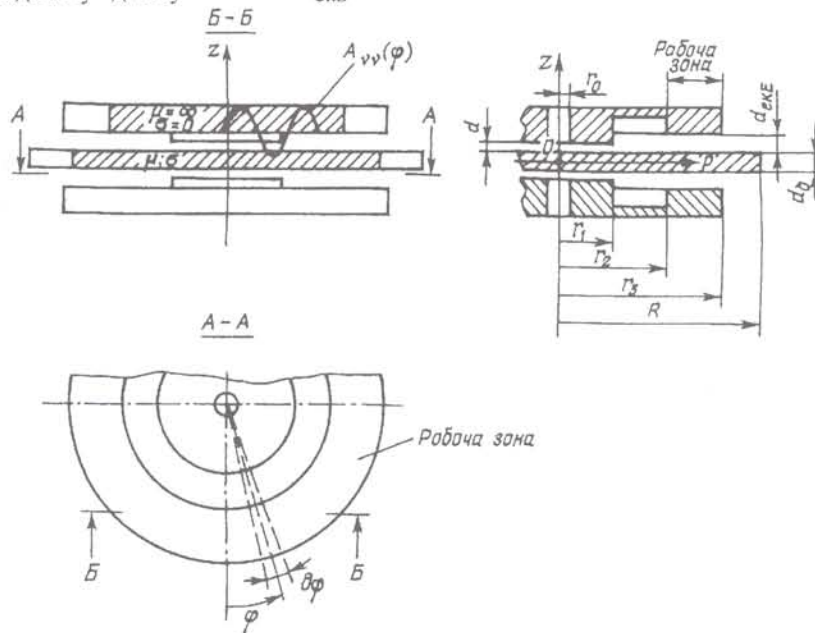


Рис. 2

дають лінійному навантаженню  $\vec{A}_v$  (рис. 3), значення якого визначається законом повного струму

$$\vec{A}_v = A_{vr} \cdot \vec{e}_r + A_{v\varphi} \cdot \vec{e}_\varphi = \frac{d_{\text{екв}}}{r} \frac{\partial H_{vz}}{\partial \varphi_c} \cdot \vec{e}_r - d_{\text{екв}} \frac{\partial H_{vz}}{\partial r} \cdot \vec{e}_\varphi, \quad (3)$$

де  $H_{vz} = \mu_0^{-1} B_{vz}$  — напруженість магнітного поля у напрямку координати  $z$  для хвилі з числом пар полюсів  $\nu$  у повітряному зазорі;  $\vec{e}_r$ ,  $\vec{e}_\varphi$  — координатні одиничні вектори.

Місце розміщення цих струмів слід визначати в залежності від того, в якій області робочої зони необхідно більш точно відтворити картину результуючого поля. Наприклад, для відтворення картини поля в зазорі біля межі зубець—паз із двох варіантів розміщення — у площині  $z = d_{\text{д}}/2 + d_{\text{екв}}$  або у площині  $z = d_{\text{д}}/2$ , — слід вибрати варіант розміщення в площині  $z = d_{\text{д}}/2$ , який дає більш наближену до реальної картину розподілу магнітного поля.

Таким чином, отримаємо у вибраній системі координат, нерухомій відносно статора,

$$A_{vr} = -\frac{\nu d_{\text{екв}}}{\mu_0 r} B_{av \cdot z} \sin \nu \varphi_c, \quad (4)$$

$$A_{v\varphi} = -\frac{d_{\text{екв}}}{\mu_0} \frac{\partial B_{av \cdot z}}{\partial r} \cos \nu \varphi_c. \quad (5)$$

Прийmemo, що при  $t=0$  системи координат статора і ротора співпадають. Ротор обертається зі швидкістю  $\omega$  так, що координата  $\varphi$  точки в системі координат ротора пов'язана з координатою  $\varphi_c$  у системі координат статора співвідношенням  $\varphi = \varphi_c - \omega t$ . Тоді складові лінійного навантаження в системі координат, зв'язаній з ротором, запишуться

$$A_{vr} = -\frac{\nu d_{\text{екв}}}{\mu_0 r} B_{av \cdot z} \sin \nu (\varphi + \omega t), \quad (6)$$

$$A_{v\varphi} = -\frac{d_{\text{екв}}}{\mu_0} \frac{\partial B_{av \cdot z}}{\partial r} \cos \nu (\varphi + \omega t). \quad (7)$$

Аналогічно запишеться в системі координат ротора і вираз для хвилі магнітної індукції

$$B_{vz} = B_{av \cdot z} \cos \nu (\varphi + \omega t). \quad (8)$$

Це магнітне поле є першопричиною виникнення вихрових струмів у дископодібному роторі при його обертанні.

Слід врахувати, що на межах робочої зони  $r=r_2$  та  $r=r_3$ ,  $z = \pm (d_{\text{д}}/2 + d_{\text{екв}})$  (рис. 2) відбувається стрибок магнітної індукції, величина якого залежить від кутової координати  $\varphi$ . Еквівалентний

струм, який обумовлює цей стрибок для хвилі з числом пар полюсів  $\nu$ , визначається як інтеграл радіальних складових струмів на відповідній межі з врахуванням напрямку нормалі для кожної межі:

$$\begin{aligned} i_{vr} |_{r_2} &= -\int A_{vr} r \partial \varphi = -\int -\frac{\nu d_{\text{екв}}}{\mu_0 r} B_{av} \sin \nu \varphi_c r \partial \varphi = \\ &= -\frac{d_{\text{екв}}}{\mu_0} B_{av} |_{r_2} \cos \nu \varphi_c + C, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} i_{v\varphi} |_{r_3} &= \int A_{v\varphi} r \partial \varphi = \int -\frac{\nu d_{\text{екв}}}{\mu_0 r} B_{av} \sin \nu \varphi_c r \partial \varphi = \\ &= \frac{d_{\text{екв}}}{\mu_0} B_{av} |_{r_3} \cos \nu \varphi_c + C_1. \end{aligned} \quad (10)$$

Постійні інтегрування знаходяться із умови  $i_v(\nu \varphi_c) = -i_v(\nu \varphi_c + \pi)$ , що дає  $C=C_1=0$ .

Математична модель електромагнітних процесів ґрунтується на системі рівнянь Максвела. В системі координат, пов'язаній з індуктором, при нерухомому роторі ці рівняння будуть мати вигляд

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{\delta} + \partial \vec{D} / \partial t, \quad (11)$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\partial \vec{B} / \partial t, \quad (12)$$

$$\text{div } \vec{B} = 0, \quad \vec{\delta} = \sigma \vec{E}, \quad (13,14)$$

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H}. \quad (15,16)$$

Тут  $\vec{H}$  — результуючий вектор напруженості магнітного поля від струмів індуктора;  $\vec{B}$  — результуючий вектор індукції магнітного поля від струмів індуктора;  $\vec{E}$  — результуючий вектор напруженості електричного поля, обумовлений змінною магнітного поля з плином часу;  $\vec{\delta}$  — вектор густини струму провідності;  $\varepsilon$  — діелектрична проникність;  $\vec{D}$  — вектор електричного зміщення;  $\mu$  — магнітна проникність;  $\sigma$  — питома електропровідність.

В усталеному режимі при живленні обмоток постійним струмом

$$\partial \vec{B} / \partial t = 0. \quad (16a)$$

У рухомому середовищі, яке рухається зі швидкістю  $\vec{V}$  у тій самій системі координат, електромагнітне поле описується тією ж сукупністю рівнянь, але параметри поля змінюються:

— до індукції магнітного поля  $\vec{B}$  додається індукція магнітного поля  $\vec{B}_{\text{рот}}$ , яка обумовлена струмами в роторі і визначається співвідношенням:

$$\vec{B}_{\text{рот}} = \mu \cdot \vec{H}_{\text{рот}}; \quad (17)$$

— до напруженості магнітного поля  $\vec{H}$  додається напруженість магнітного поля  $\vec{H}_{\text{рот}}$ , яка обу-

мовлена струмами в роторі і визначається співвідношенням:

$$\operatorname{rot} \vec{H}_{\text{рот}} = \vec{\delta}_{\text{рот}}; \quad (18)$$

— до густини струму  $\vec{\delta}$  додається густина струму  $\vec{\delta}_{\text{рот}}$ , яка визначається напруженістю електричного поля  $\vec{E}_{\text{рот}}$  обумовленого рухом ротора:

$$\vec{\delta}_{\text{рот}} = \sigma \cdot \vec{E}_{\text{рот}}; \quad (19)$$

— до напруженості електричного поля  $\vec{E}$  при нерухомому роторі додається напруженість електричного поля  $\vec{E}_{\text{рот}}$ , яка обумовлена рухом ротора в результуючому магнітному полі і визначається співвідношенням:

$$\vec{E}_{\text{рот}} = [\vec{V} \times (\vec{B} + \vec{B}_{\text{рот}})]. \quad (20)$$

Таким чином, для рухомого середовища рівняння (11)—(16) приймають вигляд

$$\operatorname{rot} (\vec{H} + \vec{H}_{\text{рот}}) = \vec{\delta} + \vec{\delta}_{\text{рот}} + \frac{\partial (\vec{D} + \vec{D}_{\text{рот}})}{\partial t}, \quad (21)$$

$$\operatorname{rot} \{ \vec{E} + [\vec{V} \times (\vec{B} + \vec{B}_{\text{рот}})] \} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (22)$$

$$\vec{\delta} + \vec{\delta}_{\text{рот}} = \sigma (\vec{E} + \vec{E}_{\text{рот}}), \quad (23)$$

$$\vec{D} + \vec{D}_{\text{рот}} = \varepsilon (\vec{E} + \vec{E}_{\text{рот}}), \quad (24)$$

$$\operatorname{div} (\vec{B} + \vec{B}_{\text{рот}}) = 0, \quad (25)$$

$$(\vec{B} + \vec{B}_{\text{рот}}) = \mu (\vec{H} + \vec{H}_{\text{рот}}). \quad (26)$$

Слід зазначити, що частинна похідна за часом у правій частині рівняння (22) береться лише від вектора  $\vec{B}$  тієї частини магнітної індукції, яка існує при нерухомому роторі. Похідна за часом від векторів  $\vec{B}$  та  $\vec{B}_{\text{рот}}$ , яка обумовлена рухом середовища, неявно знаходиться в лівій частині цього рівняння як складова лівої частини виразу (22) при  $\vec{E}=0$  [1].

У цих рівняннях:  $\vec{H} + \vec{H}_{\text{рот}}$ ,  $\vec{B} + \vec{B}_{\text{рот}}$  — результуючі вектори напруженості та індукції магнітного поля в тілі диску від струмів індуктора і вихрових струмів дископодібного ротора;  $\vec{E} + \vec{E}_{\text{рот}}$  — результуючий вектор напруженості електричного поля в тілі диску, обумовлений зміною магнітного поля з плином часу;  $\vec{\delta} + \vec{\delta}_{\text{рот}}$  — вектор густини струму провідності;  $\varepsilon$  — діелектрична проникність матеріалу диску;  $\vec{D} + \vec{D}_{\text{рот}}$  — вектор електричного зміщення;  $\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}$  — вектор лінійної швидкості матеріальної точки диска відносно нерухомого результуючого магнітного поля;  $\vec{\omega}$  — вектор кутової швидкості ротора;  $\vec{r}$  — радіус-вектор точки спостереження;  $\sigma, \mu$  — електропровідність та магнітна

проникність матеріалу диску відповідно.

При розв'язанні рівнянь даної математичної моделі потрібно врахувати особливості електропровідного середовища. В металах питома електропровідність має величину порядку  $10^7$  1/Ом·м (для сталі близько  $5 \cdot 10^6$ , а для міді —  $5,7 \cdot 10^7$ ), а діелектрична проникність для змінних полів не перевищує  $10\varepsilon_0$ . Навіть при дуже великій частоті  $10^{11}$  Гц відношення струму зміщення до струму провідності складе [4]

$$\frac{\delta_{\text{зм}}}{\delta_{\text{пр}}} = \frac{2\pi f \varepsilon}{\sigma} = \frac{2\pi 10^{11}}{10^7} \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} = 5,6 \cdot 10^{-6}, \quad (27)$$

тобто струмами зміщення в електропровідному середовищі можна знехтувати, як і впливом електричного зміщення на напруженість магнітного поля в рухомому середовищі. Крім того, для електропровідного середовища необхідно враховувати рухливість електричних зарядів, що обумовлює виключно вихровий характер результуючого електричного поля в диску:

$$\operatorname{div} (\vec{D} + \vec{D}_{\text{рот}}) = 0. \quad (28)$$

Розглянемо розв'язок системи рівнянь (21)—(26) відносно магнітної індукції  $\vec{B}$ . Скористаємося принципом накладання: результуюче значення магнітної індукції  $\vec{B}$  дорівнює сумі постійної і гармонічних складових магнітної індукції  $\vec{B}_{\text{cv}}$ , створених постійними струмами індуктора при нерухомому роторі, з постійною та відповідними гармонічними складовими магнітної індукції  $\vec{B}_{\text{ротv}}$ , створених відповідними складовими струмів у тілі ротора при його обертанні:

$$\vec{B} = \sum_{v=0}^{\infty} \vec{B}_{\text{cv}} + \sum_{v=0}^{\infty} \vec{B}_{\text{ротv}}. \quad (29)$$

Будемо розглядати усталений режим роботи:  $\omega = \text{const}$ .

Оскільки постійна складова струмів у тілі ротора електродинамометра відсутня, то для визначення зусиль і гальмівних моментів необхідно розглянути лише гармонічні складові магнітної індукції і відповідних струмів.

Для робочої області  $r_2 \leq r \leq r_3$ ,  $(-d_d/2) \leq z \leq (d_d/2)$  (рис. 2) вважаємо амплітуду  $B_{\text{avz}}(r, z)$  хвилі індукції магнітного поля  $\vec{B}_{\text{cv}}$  з числом пар полюсів  $v$ , що створюється уявними струмами індуктора при нерухомому роторі, незалежно від швидкості обертання і заданою у такому вигляді:

$$\vec{B}_{\text{cv}} = B_{\text{cvz}} \cdot \vec{e}_z = B_{\text{avz}}(r, z) \cos v \varphi \cdot \vec{e}_z. \quad (30)$$

При цьому тангенційною складовою магнітної індукції при нерухомому роторі нехтуємо.

Припустимо, що складова  $\vec{B}_{\text{ротv}}$  результуючого вектора магнітної індукції, яка обумовлена вихровими струмами в тілі ротора, має складові по координатах  $\varphi, z$ . Отже і результуючий вектор магнітної індукції  $\vec{B}_v$  має вигляд:

$$\vec{B}_v = 0 \cdot \vec{e}_r + \vec{B}_{\text{ротv}\varphi}(r, \varphi, z) \vec{e}_\varphi + (B_{\text{cvz}}(r, \varphi, z) + \vec{B}_{\text{ротv-z}}(r, \varphi, z)) \cdot \vec{e}_z. \quad (31)$$

Розглянемо геометричну інтерпретацію прийнятої математичної моделі. Характер очікуваного розподілу хвиль магнітної індукції в провідному середовищі показано на рис. 3. Результуюча хвиля магнітної індукції  $B_{vz}(\varphi)$  зміщена відносно хвилі  $B_{cvz}^{(0)}(\varphi)$  при нерухомому роторі на кут  $\alpha$  в напрямку обертання ротора. Хвиля напруженості електричного поля, обумовленого обертанням ротора (на рис. 3 не показана), співпадає з результуючою хвилею магнітної індукції  $B_{vz}(\varphi)$ . Хвиля радіальної складової густини струму  $\delta$  в роторі (на рис. 3 не показана, показано умовно лінії струму  $\delta$ ) зміщена відносно хвилі напруженості електричного поля на кут  $\psi$  в напрямку обертання. Хвиля магнітної індукції  $B_{\text{ротv-z}}^{(V)}(\varphi)$ , що створюється вихровими струмами ротора, зміщена відносно хвилі радіальної складової густини струму  $\delta$  в роторі (на рис. 3 не показана) на кут  $(\pi/2 + \psi)$  в напрямку обертання ротора, тобто на кут  $(\pi/2 + \alpha + \psi)$  відносно хвилі  $B_{cvz}^{(0)}(\varphi)$  при нерухомому роторі.

Щоб знайти розв'язок системи рівнянь (21)–

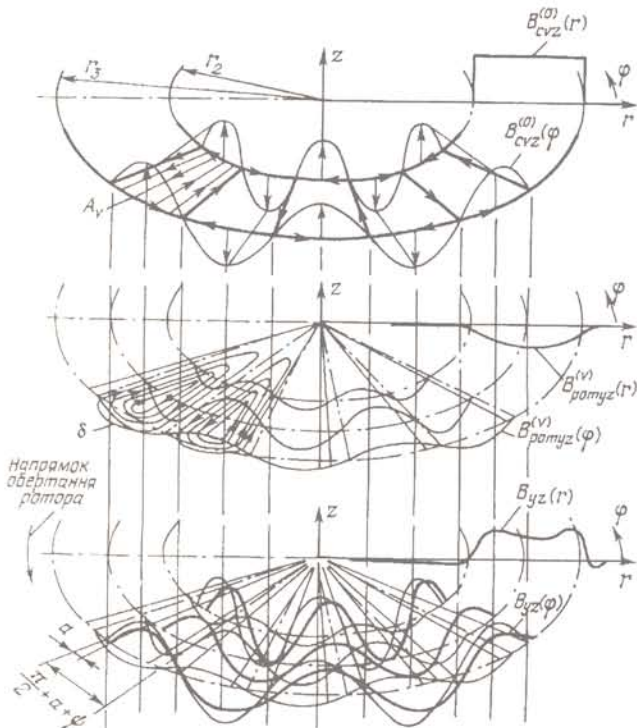


Рис. 3

(26) відносно магнітної індукції, представимо складову напруженості електричного поля  $\vec{E}_{\text{ротv}}$ , обумовлену обертанням дископодібного ротора в магнітному полі, як векторний добуток вектора лінійної швидкості точок ротора на вектор магнітної індукції  $[\vec{V} \times \vec{B}_v]$  [4]

$$\vec{E}_{\text{ротv}} = \vec{V} \times \vec{B}_v = \omega r B_{vz} \vec{e}_r = \omega r (B_{\text{cvz}} + B_{\text{ротvz}}) \cdot \vec{e}_r, \quad (32)$$

де

$$\vec{V} = \omega \cdot \vec{e}_z \times r \cdot \vec{e}_r = \omega r \cdot \vec{e}_\varphi. \quad (33)$$

Вектор напруженості  $\vec{E}_{\text{ротv}}$  електричного поля, обумовленого рухом дископодібного ротора в магнітному полі, не має тангенційної складової. Разом з тим, в роторі існує тангенційна складова густини вихрових струмів. Для з'ясування фізичних підстав виникнення цієї складової знайдемо значення дивергенції напруженості електричного поля, обумовленого обертанням диска

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{E}_{\text{ротv}} &= \text{div} [\vec{V} \times \vec{B}_v] = (B_{vz} \cdot \vec{e}_z + B_{v\varphi} \cdot \vec{e}_\varphi) \cdot \text{rot } \vec{V} - \\ &- \vec{V} \text{rot} (B_{vz} \cdot \vec{e}_z + B_{v\varphi} \cdot \vec{e}_\varphi). \end{aligned} \quad (34)$$

Знайшовши ротор вектора лінійної швидкості довільної точки диска

$$\text{rot } \vec{V} = \frac{1}{r} \frac{\partial (r \cdot \omega r)}{\partial r} \cdot \vec{e}_z = 2\omega \cdot \vec{e}_z \quad (35)$$

та ротор вектора магнітної індукції в цій точці

$$\text{rot } \vec{B}_v = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial B_{vz}}{\partial \varphi} - \frac{\partial B_{v\varphi}}{\partial z} \right) \vec{e}_r - \frac{\partial B_{vz}}{\partial r} \vec{e}_\varphi + \frac{1}{r} \frac{\partial (r B_{v\varphi})}{\partial r} \vec{e}_z, \quad (36)$$

отримаємо значення дивергенції вектора напруженості електричного поля, обумовленого обертанням диска:

$$\text{div } \vec{E}_{\text{ротv}} = 2\omega \cdot B_{vz} + \omega r \frac{\partial B_{vz}}{\partial r}. \quad (37)$$

Таким чином, в середовищі, яке обертається в магнітному полі, при паралельності вектора кутової швидкості і вектора магнітної індукції виникають витоки вектора напруженості електричного поля, а, значить, і вектора електричного зміщення:

$$\text{div } \vec{D}_{\text{ротv}} = \text{div } \epsilon \vec{E}_{\text{ротv}} = 2\epsilon\omega \cdot B_{vz} + \epsilon\omega r \frac{\partial B_{vz}}{\partial r}. \quad (38)$$

Однак в електропровідному середовищі повинна виконуватися умова (29). Тому витоки вектора електричного зміщення ( $\text{div } \vec{D}_{\text{об}}$ ) повинні компенсуватися вільними зарядами електропровідного середовища. Переміщення витоків вектора електричного зміщення приведуть до відповідного пе-

реміщення вільних зарядів у тому ж напрямку (з точністю до знака заряду), а, значить, до виникнення струму. Оскільки витоки вектора електричного зміщення при обертанні диска переміщуються в тангенційному напрямку, то це призведе до утворення тангенційної складової вектора густини електричного струму.

Знайдемо ротор вектора напруженості електричного поля, обумовленої обертанням диска у результуючому магнітному полі з врахуванням як статорної, так і роторної складових магнітного поля:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E}_{\text{ротв}} = & \left( \frac{1}{r} \frac{\partial E_{\text{ротв}z}}{\partial \varphi} - \frac{\partial E_{\text{ротв}\varphi}}{\partial z} \right) \cdot \vec{e}_r + \\ & + \left( \frac{\partial E_{\text{ротв}r}}{\partial z} - \frac{\partial E_{\text{ротв}z}}{\partial r} \right) \cdot \vec{e}_\varphi + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial(rE_{\text{ротв}\varphi})}{\partial r} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{r} \frac{\partial E_{\text{ротв}r}}{\partial \varphi} \right) \cdot \vec{e}_z = \omega \left( \frac{r \partial(B_{\text{cv}z} + B_{\text{ротв}z})}{\partial z} \right) \cdot \vec{e}_\varphi - \\ & - \omega \frac{\partial(B_{\text{cv}z} + B_{\text{ротв}z})}{\partial \varphi} \cdot \vec{e}_z. \end{aligned} \quad (39)$$

Підставивши це значення в (22) та врахувавши (16а) і (20), отримаємо:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E}_{\text{ротв}} = & \omega \left( \frac{r \partial(B_{\text{cv}z} + B_{\text{ротв}z})}{\partial z} \right) \cdot \vec{e}_\varphi - \\ & - \omega \frac{\partial(B_{\text{cv}z} + B_{\text{ротв}z})}{\partial \varphi} \cdot \vec{e}_z. \end{aligned} \quad (40)$$

Враховуючи (21)–(23), можемо записати

$$\vec{E}_{\text{rv}} = \frac{1}{\sigma} \operatorname{rot} \vec{H}_{\text{ротв}} = \frac{1}{\sigma \mu} \operatorname{rot} \vec{B}_{\text{ротв}}. \quad (41)$$

Тоді

$$\operatorname{rot} \vec{E}_{\text{ротв}} = \frac{1}{\sigma \mu} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{B}_{\text{ротв}}. \quad (42)$$

Як відомо [5],

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{B}_{\text{ротв}} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{B}_{\text{ротв}} - \Delta \vec{B}_{\text{ротв}} = -\Delta \vec{B}_{\text{ротв}}. \quad (43)$$

Підставивши в (42) відповідні значення із (40), (43), отримаємо

$$\begin{aligned} -\Delta \vec{B}_{\text{ротв}} = & \sigma \mu \omega \left[ \left( \frac{r \partial(B_{\text{cv}z} + B_{\text{ротв}z})}{\partial z} \right) \cdot \vec{e}_\varphi - \right. \\ & \left. - \frac{\partial(B_{\text{cv}z} + B_{\text{ротв}z})}{\partial \varphi} \cdot \vec{e}_z \right]. \end{aligned} \quad (44)$$

Застосувавши оператор Лапласа  $\Delta$  до кожної із складових вектора  $\vec{B}_{\text{ротв}}$ , отримаємо систему рівнянь, в яких  $B_{\text{cv}z}$  задано, а  $B_{\text{ротв}z}$  та  $B_{\text{ротв}\varphi}$  треба

знайти:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial B_{\text{ротв}\varphi}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 B_{\text{ротв}\varphi}}{\partial \varphi^2} + \\ + \frac{\partial^2 B_{\text{ротв}\varphi}}{\partial z^2} = -\omega \sigma \mu r \frac{\partial(B_{\text{cv}z} + B_{\text{ротв}z})}{\partial z}, \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial B_{\text{ротв}z}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 B_{\text{ротв}z}}{\partial \varphi^2} + \\ + \frac{\partial^2 B_{\text{ротв}z}}{\partial z^2} = \omega \sigma \mu \frac{\partial(B_{\text{cv}z} + B_{\text{ротв}z})}{\partial \varphi}. \end{aligned} \quad (46)$$

Таким чином, виконавши всі вищевказані перетворення, з системи рівнянь (21)–(26) ми отримали рівняння (45)–(46) відносно однієї невідомої магнітної індукції. Як видно із цих рівнянь, складова вектора магнітної індукції в напрямку координати  $\varphi$  явно залежить від складової вектора магнітної індукції по координаті  $z$ .

Розв'язки системи рівнянь (45)–(46) будемо знаходити, нехтуючи тангенційною складовою магнітної індукції  $B_{\text{cv}z}$  при нерухомому роторі

$$\partial B_{\text{cv}z} / \partial z = 0. \quad (47)$$

Із (25) випливає, що

$$\frac{\partial B_{\text{ротв}z}}{\partial z} = -\frac{1}{r} \frac{\partial B_{\text{ротв}\varphi}}{\partial \varphi}. \quad (48)$$

Підставивши ці значення в (45), отримаємо рівняння відносно  $\partial B_{\text{ротв}\varphi}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 B_{\text{ротв}\varphi}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial B_{\text{ротв}\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 B_{\text{ротв}\varphi}}{\partial \varphi^2} - \\ - \omega \sigma \mu \frac{\partial B_{\text{ротв}\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 B_{\text{ротв}\varphi}}{\partial z^2} = 0. \end{aligned} \quad (49)$$

Для зручності, враховуючи синусоїдний характер розподілу магнітної індукції вздовж тангенційної координати (2), запишемо рівняння (49) та (46) в символічній формі. Тоді похідна по  $\varphi$  заміниться оператором  $j\nu$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \dot{B}_{\text{ротв}\varphi}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{B}_{\text{ротв}\varphi}}{\partial r} - \frac{\nu^2}{r^2} \dot{B}_{\text{ротв}\varphi} - \\ - j\nu \omega \sigma \mu \dot{B}_{\text{ротв}\varphi} + \frac{\partial^2 \dot{B}_{\text{ротв}\varphi}}{\partial z^2} = 0, \end{aligned} \quad (50)$$

$$\frac{\partial^2 \dot{B}_{\text{rot}z}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{B}_{\text{rot}z}}{\partial r} - \frac{v^2}{r^2} \dot{B}_{\text{rot}z} -$$

$$- jv \omega \sigma \mu \dot{B}_{\text{rot}z} + \frac{\partial^2 \dot{B}_{\text{rot}z}}{\partial z^2} = jv \omega \sigma \mu \dot{B}_{\text{cv}z} \quad (51)$$

Таким чином, математичну модель електромагнітних процесів в електропровідному диску електродинамометра приведено до вигляду (50)–(51), який дозволяє отримати розв'язок відносно магнітної індукції  $\vec{B}$ . Рівняння (50) є рівнянням Бесселя і має аналітичний розв'язок. При знаходженні аналітичного рішення рівняння (51) в загальному вигляді виникають певні труднощі. Якщо прийняти товщину диска настільки малою, що можна знехтувати впливом тангенційної складової магнітної індукції на осьову складову, то можна скористатися рішенням для  $B_{vz}$  [10]:

$$\dot{B}_{vz} = v \left[ v^2 + (\mu \sigma \omega r^2)^2 \right]^{-0,5} \cdot \dot{B}_{\text{cv}z} e^{-j \arctg \left( \frac{\mu \sigma \omega r^2}{v} \right)} \quad (52)$$

Як видно із (52), результуюча хвиля з числом періодів  $v$  магнітної індукції зміщується по відношенню до відповідної хвилі магнітної індукції при нерухомому роторі в напрямку обертання ротора на кут, величина якого залежить від значення  $v$ .

Проведені на фізичних моделях експерименти по визначенню форми кривої розподілу магнітної індукції вздовж тангенційної координати за допомогою вимірювальних витків показали, що магнітна індукція підсилюється або на збігаючому, або на набігаючому краї зубця в залежності від ширини пазу. При ширині пазу, меншій ширини зубця, магнітне поле підсилюється на набігаючому краї зубця і навпаки. Така властивість вишлює із отриманого рішення (52) (рис. 4). При наявності парних гармонічних складових в кривій розподілу магнітної індукції в робочому зазорі електродинамометра та ширині пазу, меншій від ширини зубця (коли парна гармонічна складова зміщена по відношенню до основної на  $+\pi/2$ ), форма кривої розподілу магнітної індукції змінюється так, що індукція збільшується на набігаючому краї зубця (на рис. 4, б  $B_{\text{rot}}$  підсилює  $B$  біля набігаючого краю зубця). При наявності парних гармонічних складових в кривій розподілу магнітної індукції в робочому зазорі електродинамометра та ширині пазу, більшій від ширини зубця (коли парна гармонічна складова зміщена по відношенню до основної на  $-\pi/2$ ), форма кривої розподілу магнітної індукції змінюється так, що індукція збільшується на збігаючому краї зубця (на рис. 4, з  $B_{\text{rot}}$  підсилює  $B$  біля збігаючого краю зубця).

На рис. 5 показано осцилограми електрорушійних сил вимірювальних витків, гармонічні складові яких пропорційні всім непарним, подвоєним непарним, чотирикратним непарним та вось-

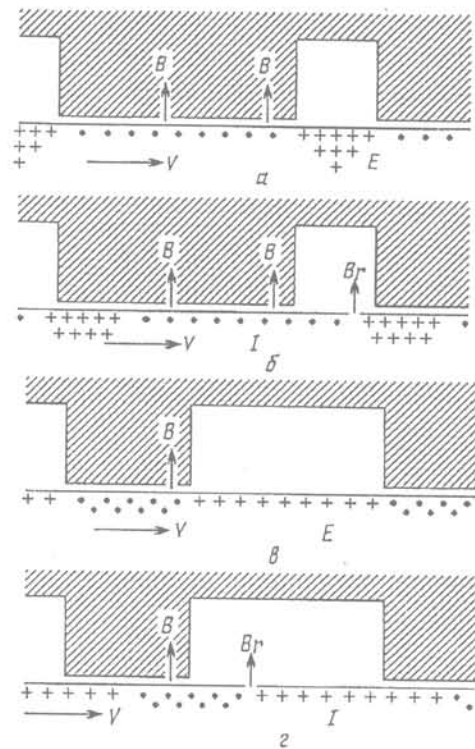


Рис. 4

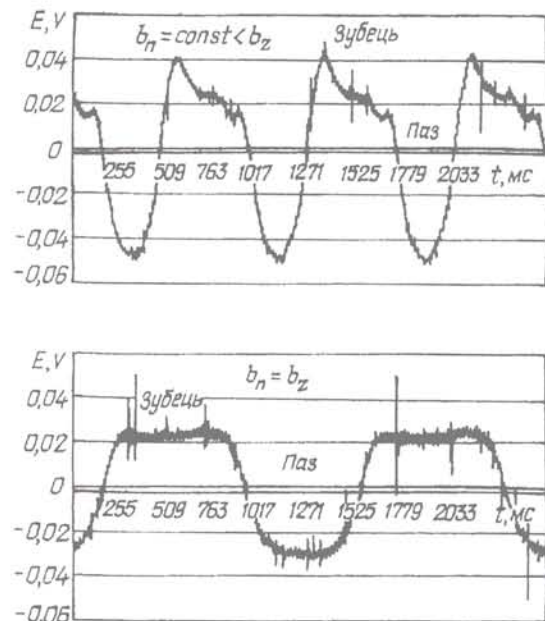


Рис. 5

микратним непарним гармонічним складовим магнітної індукції. Завдяки цьому форма кривої електрорушійних сил вимірювальних витків повторює форму кривої розподілу магнітної індукції в робочому зазорі електродинамометра з точністю до перших 15 гармонічних складових.

Таким чином, процеси в провідному середовищі, вісь обертання якого паралельна напрямку магнітного поля, відрізняються від процесів в середовищі, вісь обертання якого перпендикулярна напрямку магнітного поля. Слід відзначити потен-

ційно-вихровий характер наведеного електричного поля, який обумовлює протікання струму в тангенційному напрямку за рахунок відповідної зміни розподілу витоків наведеного електричного поля при відсутності тангенційної складової вектора напруженості наведеного електричного поля.

1. Антопенко А.И. Обобщенный закон электромагнитной индукции. // Техн. электродинамика. — 1993. — №5. — С. 43—47.

2. Антопенко А.И., Цыганкова А.А. Электромагнитное поле и усилия в проводящем диске моментомера с осевым воздушным зазором. // Техн. электродинамика. Тем. выпуск "Проблемы современной электротехники". — 2004. — ч. 7. — С. 16—19.

3. Афонин А.А. Аксильно-радиальная конфигурация электрических машин. // Техн. электродинамика. — 2001. — №3. — С. 51—55.

4. Каплянский А.Е., Лысенко А.П., Полотовский Л.С. Теоретические основы электротехники. — М.: Высшая школа, 1972. — 448 с.

5. Корн Г. и Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. (Перевод с английского) — М.: Наука, 1970. — 720 с.

6. Потапов Л.А., Юферов Ф.М. Измерение вращающих моментов и скоростей вращения микроэлектродвигателей. — М.: Энергия, 1974. — 128 с.

7. Титко А.И. Электромагнитное экранирование незамкнутыми структурами в электрических машинах. — К.: Наук. думка, 1994. — 301 с.

8. Химюк И.В. Расчет электромагнитных полей в многослойных средах с использованием рекуррентных соотношений // Дисс. на соиск. уч. степ. канд. наук. — К., 1984. — 197 с.

9. Цыганкова Г.А. Дослідження розподілу магнітного поля в робочій зоні дископодібного електромагнітного гальма. // Вісник КДПУ, вип. 3/2007(44), част. 2. — С. 70—72.

10. Цыганкова Г.А. Особенности назначения момента электродинамического гальма с ферромагнитным диском. // Техн. электродинамика. — 2008. — №5. — С. 51—55.

Надійшла 23.01.2009

УДК 621.313.333.2.045

Р.Б.ГАВРИЛЮК, канд.техн.наук (Івано-Франківський нац. техн. ун-т нафти і газу, Івано-Франківськ)

## Структурне проектування симетричних трифазних двошарових схем обмоток з перемиканням кількості пар полюсів у співвідношенні 4:5

*Розглянуто характеристики всіх можливих варіантів симетричних трифазних двошарових схем обмоток асинхронних електродвигунів із співвідношенням кількості пар полюсів 4:5 та кількістю парів  $z = 60$ .*

*Рассмотрены характеристики всех возможных вариантов симметричных трехфазных двухскоростных схем обмоток асинхронных электродвигателей с соотношением чисел пар полюсов 4:5 и числом паров  $z = 60$ .*

Перша схема обмотки з перемиканням кількості пар полюсів у співвідношенні 1:2 запропонована в позаминулому столітті Даландером [9]. Відтоді теорію симетричних схем обмоток з перемиканням кількості пар полюсів невпинно вдосконалюють та пропонують інші схеми, що одержують на підставі різних теоретичних підходів, наприклад, [4,5,6,10,11]. Давно назрівала необхідність створення єдиної теорії проектування всіх можливих схем, основи якої подано в [1,2,3]. Наприклад, схеми обмоток з перемиканням кількості пар полюсів у співвідношенні 4:5, створені на підставі теорії полюсно-амплітудного моделювання (ПАМ) [10,11], використовують у двигунах для приводів гідравлічних pomp [8], що різко збільшує коефіцієнт корис-

ної дії установок та зменшує потужність споживання електроенергії майже у два рази, але основним недоліком схем стали великі амплітуди шкідливих гармонік. У цій статті вперше на підставі єдиної теорії створено та проаналізовано всі теоретично можливі варіанти схем обмоток з перемиканням кількості пар полюсів у співвідношенні 4:5 та кількості парів  $z = 60$ , що уможливило усунення основного недоліку схем, запропонованих за методом ПАМ, а саме — великих значень амплітуд шкідливих гармонік.

Надалі ми розглянемо пошук всіх можливих варіантів симетричних схем обмоток з реверсуванням половини котушок в кожній фазі обмотки, тобто за відомими схемами № 1 ( $\Delta/YY$ ), № 2 ( $YY/\Delta$ ),

© Гаврилюк Р.Б., 2009