

УДК 519.213:621.391

**А.И. Красильников**, канд. физ.-мат. наук  
Ин-т технической теплофизики НАН Украины  
(Украина, 03057, Киев, ул. Желябова, 2а,  
тел. (044) 4532857, e-mail: tangorov@ukr.net

## **Моделирование перфорированных случайных величин на основе смесей сдвинутых распределений**

Обосновано использование семейства смесей сдвинутых распределений для моделирования перфорированных распределений и случайных величин. Рассмотрены особенности моделирования перфорированных распределений. Проанализированы кумулянтные коэффициенты смесей сдвинутых распределений. Построены модели перфорированных случайных величин на основе двухкомпонентной смеси сдвинутых логистических распределений.

*К л ю ч е в ы е с л о в а:* кумулянтные коэффициенты, моментно-кумулянтные модели, кумулянтный анализ, перфорированные распределения, смеси распределений.

Обґрунтовано використання сім'ї сумішей зсунутих розподілів для моделювання перфорованих розподілів та випадкових величин. Розглянуто особливості моделювання перфорованих розподілів. Проаналізовано кумулянтні коефіцієнти сумішей зсунутих розподілів. Побудовано моделі перфорованих розподілів на основі двокомпонентної суміші зсунутих логістичних розподілів.

*К л ю ч о в і с л о в а:* кумулянтні коефіцієнти, моментно-кумулянтні моделі, кумулянтний аналіз, перфоровані розподіли, суміші розподілів.

При решении прикладных задач, в которых исследуемые случайные величины или процессы имеют негауссовские распределения, существенное значение имеют кумулянтные коэффициенты  $\gamma_s$ :

$$\gamma_s = \kappa_s / \kappa_2^{s/2}, \quad (1)$$

где  $\kappa_s$  — кумулянты распределений,

$$\kappa_s = \left. \frac{d^s \ln f(u)}{i^s d u^s} \right|_{u=0}; \quad (2)$$

$f(u)$  — характеристическая функция;  $i = \sqrt{-1}$ ;  $s = 1, 2, 3, \dots$  — порядок кумулянтных и кумулянтных коэффициентов.

© А.И. Красильников, 2018

Кумулянтные коэффициенты лежат в основе моментно-кумулянтных моделей [1, 2], применение которых позволяет достаточно просто и эффективно решать различные задачи при исследовании негауссовских случайных величин и случайных процессов [1—8]. В моментно-кумулянтных моделях обычно используется конечное число  $\gamma_s$ , чаще всего — коэффициенты асимметрии  $\gamma_3$  и эксцесса  $\gamma_4$ . При этом о коэффициентах  $\gamma_r$  порядка  $r > s$  либо вообще не упоминают, либо их принимают равными нулю на основании широко распространенного в технической литературе ошибочного мнения о том, что значения коэффициентов  $\gamma_s$  уменьшаются при увеличении их порядка. Согласно известной теореме Марцинкевича [9] распределений, у которых все коэффициенты  $\gamma_s = 0$  при  $s > 2$ , не существует. Однако эта теорема не исключает возможности существования распределений, у которых при  $s > 2$  часть коэффициентов  $\gamma_s$  равна нулю. Классическими примерами таких распределений являются любые симметричные распределения, у которых равны нулю все коэффициенты  $\gamma_s$  нечетных порядков.

В работе [2] предложены модели с нулевыми коэффициентами  $\gamma_s, s > 2$ , названные автором «перфорированными случайными величинами», применение которых позволяет строить нелинейные оценки параметров негауссовских случайных величин и случайных процессов [3]. Согласно определению [2, с. 101—102] «перфорированной случайной величиной будем называть величину, у которой при ее кумулянтном описании часть кумулянтных коэффициентов, начиная с порядка  $s = 3$ , отлична от нуля, часть — строго равна нулю, а остальные коэффициенты высших порядков могут принимать произвольные значения». Из приведенного определения следует, что вопрос о возможных моделях распределений и методах моделирования перфорированных случайных величин остается открытым.

Анализ показал, что в настоящее время число работ, посвященных описанию моделей распределений перфорированных случайных величин и их моделированию, ограничено [10—15]. В работах [10—12] для описания и моделирования распределений перфорированных случайных величин предложены дискретные конечные смеси гауссовских распределений. В работах [13, 14] для построения моделей негауссовских распределений, у которых  $\gamma_3 = \gamma_4 = 0$ , использованы двухкомпонентные смеси негауссовских распределений. В работе [15] обосновано применение смесей сдвинутых и масштабированных распределений для построения моделей несимметричных распределений с нулевым коэффициентом  $\gamma_3$ .

Таким образом, актуальной остается задача получения распределений перфорированных случайных величин и методов их моделирования. Рассмотрим ее решение.

**Обоснование модели перфорированных распределений.** Пусть  $F_0(x)$  и  $F_1(y)$  — функции распределения. Образует функцию

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_0(x-y) dF_1(y). \quad (3)$$

Функция  $F_0(x-y)$  ограничена и измерима, поэтому интеграл (3) существует. Функция  $F(x)$  — возрастающая от 0 до 1 монотонная функция  $x$ , поэтому является функцией распределения. Формула (3) представляет собой семейство смесей сдвинутых распределений [16], а функции  $F_0(x)$  и  $F_1(y)$  называются базовой и смешивающей функциями распределения.

Покажем, что семейство смесей распределений (3) включает множество перфорированных распределений, у которых часть кумулянтов  $\kappa_s$  удовлетворяет условию

$$\kappa_s = 0. \quad (4)$$

Найдем характеристическую функцию  $f(u)$  смеси (3), которая по определению имеет вид

$$f(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} dF(x). \quad (5)$$

Подставляя в (5) выражение (3), получаем

$$f(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} d \left[ \int_{-\infty}^{\infty} F_0(x-y) dF_1(y) \right] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iu(z+y)} dF_0(z) dF_1(y).$$

Из последней формулы следует, что характеристическая функция  $f(u)$  смеси (3) имеет вид

$$f(u) = f_0(u) f_1(u). \quad (6)$$

Найдем кумулянты смеси, подставив в формулу (2) характеристическую функцию (6):

$$\kappa_s = \frac{d^s \ln [f_0(u)f_1(u)]}{i^s d u^s} \Big|_{u=0} = \frac{d^s \ln f_0(u)}{i^s d u^s} \Big|_{u=0} + \frac{d^s \ln f_1(u)}{i^s d u^s} \Big|_{u=0}.$$

Из этой формулы следует, что если существуют кумулянты  $\kappa_{s,0}$ ,  $\kappa_{s,1}$  функций распределения  $F_0(x)$  и  $F_1(y)$ , то существуют кумулянты  $\kappa_s$  смеси (3):

$$\kappa_s = \kappa_{s,0} + \kappa_{s,1}. \quad (7)$$

Заметим, что если у смеси (3)  $F_0(x)$  и  $F_1(y)$  — гауссовские функции распределения, то все кумулянты  $\kappa_{s,0} = \kappa_{s,1} = 0$  при  $s > 2$  и распределение  $F(x)$  является гауссовским, у которого все  $\kappa_s = 0$ , если  $s > 2$ . Из формулы (7) следует, что если  $\kappa_{s,0} = 0$ , то  $\kappa_s = \kappa_{s,1}$ , если  $\kappa_{s,1} = 0$ , то  $\kappa_s = \kappa_{s,0}$ . При  $\kappa_{s,0} \neq 0$  и  $\kappa_{s,1} \neq 0$  условие (4) для смеси (3) принимает вид

$$\kappa_{s,0} = -\kappa_{s,1}. \quad (8)$$

Таким образом, использование семейства смесей сдвинутых распределений (3), у которых кумулянты  $\kappa_{s,0}$ ,  $\kappa_{s,1}$  базовой и смешивающей функций распределения отличны от нуля, имеют разные знаки и удовлетворяют условию (8), позволяет осуществлять математическое моделирование перфорированных функций распределения.

Рассмотрим теперь задачу моделирования случайных величин, функция распределения которых описывается формулой (3). Используя метод рандомизации [17], покажем, что смесь сдвинутых распределений (3) определяет общую формулу для нахождения функции распределения суммы двух независимых случайных величин.

Пусть задана случайная величина  $\xi_0$  с функцией распределения  $F_0(x)$ , которая подвергается функциональному преобразованию  $z = x + a$ , где  $a$  — некоторое действительное число. В результате такого преобразования получаем случайную величину  $\xi = \xi_0 + a$ , функция распределения  $F(x | a)$  которой имеет вид

$$F(x | a) = F_0(x - a). \quad (9)$$

Из формулы (9) видно, что число  $a$  является параметром сдвига функции распределения  $F_0(x)$ . Рандомизируем этот параметр, заменив его случайной величиной  $\xi_1$ , которая независима от случайной величины  $\xi_0$  и имеет функцию распределения  $F_1(y)$ . В результате получаем случайную величину

$$\xi = \xi_0 + \xi_1, \quad (10)$$

условная функция распределения которой имеет вид  $F(x | \xi_1) = F_0(x - \xi_1)$ . На основании интегральной формулы полной вероятности [17] заключаем, что безусловная функция распределения  $F(x)$  случайной величины  $\xi$  совпадает с выражением (3).

Таким образом, компьютерное моделирование перфорированных случайных величин сводится к моделированию по формуле (10) суммы двух независимых случайных величин,  $\xi_0$  и  $\xi_1$ , кумулянты  $\kappa_{s,0}$ ,  $\kappa_{s,1}$  которых удовлетворяют условию (8).

#### **Особенности моделирования перфорированных распределений.**

При решении задачи математического и компьютерного моделирования

перфорированных случайных величин на практике может возникнуть проблема подбора классических распределений  $F_0(x)$  и  $F_1(x)$ , кумулянты  $\kappa_{s,0}$ ,  $\kappa_{s,1}$  которых имеют разные знаки. Такая проблема легко решается для кумулянтов  $\kappa_s$  нечетных порядков  $s$  с использованием сопряженных распределений. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

Предположим, что базовая функция распределения  $F_0(x)$  — несимметричная и будем считать для определенности, что ее кумулянты  $\kappa_{s,0} > 0$ . Пусть функция распределения  $F_1(x)$  случайной величины  $\xi_1$  — также несимметричная и у нее  $\kappa_{s,1} > 0$ . Рассмотрим случайную величину  $\xi_1^* = -\xi_1$ , которая называется сопряженной к  $\xi_1$  случайной величиной [9]. Функция распределения  $F_1^*(x)$  случайной величины  $\xi_1^*$  называется сопряженной к  $F_1(x)$  функцией распределения и имеет вид  $F_1^*(x) = 1 - F_1(-x + 0)$ . Сопряженная к  $f_1(u)$  характеристическая функция  $f_1^*(u)$  случайной величины  $\xi_1^*$  имеет вид  $f_1^*(u) = f_1(-u)$ . Используя последнюю формулу и определение кумулянтов (2), можно показать, что кумулянты  $\kappa_{s,1}^*$  случайной величины  $\xi_1^*$  связаны с кумулянтами  $\kappa_{s,1}$  случайной величины  $\xi_1$  следующим соотношением:  $\kappa_{s,1}^* = (-1)^s \kappa_{s,1}$ .

Если вместо распределения  $F_1(x)$  использовать сопряженное распределение  $F_1^*(x)$ , то формулы (3), (7) и (10) принимают соответственно следующий вид:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_0(x-y) dF_1^*(y) = \int_{-\infty}^{\infty} F_0(x+y) dF_1(y), \quad (11)$$

$$\kappa_s = \kappa_{s,0} + \kappa_{s,1}^* = \kappa_{s,0} + (-1)^s \kappa_{s,1}, \quad (12)$$

$$\xi = \xi_0 + \xi_1^* = \xi_0 - \xi_1. \quad (13)$$

Из формулы (12) следует, что при  $\kappa_{s,0} > 0$  и  $\kappa_{s,1} > 0$  кумулянты  $\kappa_s$  больше нуля, если  $s$  четное, а для кумулянтов  $\kappa_s$  нечетных порядков уравнение (8) принимает вид

$$\kappa_{s,0} = -\kappa_{s,1}^* = \kappa_{s,1}. \quad (14)$$

Заметим, что если у распределений  $F_0(x)$  и  $F_1(x)$  кумулянты  $\kappa_{s,0} < 0$  и  $\kappa_{s,1} < 0$ , то у смеси (11) кумулянты  $\kappa_s < 0$  при четном порядке  $s$ , а для кумулянтов  $\kappa_s$  нечетных порядков все приведенные выше рассуждения и формулы (11)—(14) остаются справедливыми.

Таким образом, если  $F_0(x)$  — несимметричное распределение, то выбором несимметричного распределения  $F_1(x)$  или  $F_1^*(x)$  по формулам (3) или (11) можно получить распределения случайных величин (10) или (13) с кумулянтами  $\kappa_s = 0$  нечетных порядков.

Проанализируем свойства смеси распределений (3). Формула (3) позволяет моделировать множество функций распределения и, соответственно, перфорированные случайные величины (10) любого типа — дискретные, непрерывные и смешанные. В частности, если обе составляющие смеси  $F_0(x)$ ,  $F_1(x)$  — кусочно-постоянные функции распределения, то  $F(x)$  — также кусочно-постоянная функция и  $\xi$  является случайной величиной дискретного типа. Если одна из составляющих смеси — кусочно-постоянная функция, а другая имеет разрывы первого рода, то функция распределения  $F(x)$  также имеет разрывы первого рода и случайная величина  $\xi$  является величиной смешанного типа. Если в формуле (3) одна из функций распределения,  $F_0(x)$  или  $F_1(x)$ , — абсолютно непрерывна, то функция распределения  $F(x)$  также абсолютно непрерывна. Следовательно, случайная величина  $\xi$  относится к непрерывному типу и у нее существует плотность вероятностей  $p(x) = F'(x)$ . Последний случай является важным для приложений, поэтому рассмотрим его подробнее.

Пусть случайная величина  $\xi_0$  является непрерывной, т.е. ее функция распределения  $F_0(x)$  абсолютно непрерывна и имеет плотность вероятностей  $p_0(x) = F'_0(x)$ . Тогда существует плотность вероятностей  $p(x) = F'(x)$  случайной величины (10), которая на основании формулы (3) имеет вид

$$p(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_0(x-y) dF_1(y). \quad (15)$$

Выделим два типа моделей смесей сдвинутых распределений (15). Предположим, что параметр сдвига  $\xi_1$  — дискретная случайная величина, которая принимает значения  $a_k$  с вероятностями  $d_k = P(\xi_1 = a_k)$ ,  $a_k < a_{k+1}$ ,  $d_k > 0$ ,  $\sum_k d_k = 1$ . Тогда смешивающее распределение является дискретным и его функция распределения

$$F_1(y) = \sum_k d_k E(y - a_k), \quad (16)$$

где  $E(x)$  — единичная функция. Подставляя (16) в формулу (15), получаем

$$p(x) = \sum_k d_k p_0(x - a_k). \quad (17)$$

Формула (17) определяет семейство моделей дискретных смесей непрерывных сдвинутых распределений.

Пусть параметр сдвига  $\xi_1$  — непрерывная случайная величина, у которой функция распределения  $F_1(y)$  абсолютно непрерывна и имеет плотность вероятностей  $p_1(y) = F_1'(y)$ . Тогда из формулы (15) получаем

$$p(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_0(x-y)p_1(y) dy. \quad (18)$$

Формула (18) определяет семейство моделей непрерывных смесей непрерывных сдвинутых распределений и является сверткой плотностей вероятностей  $p_0(x)$  и  $p_1(x)$ . Сравнивая формулы (17) и (18) видим, что при математическом моделировании перфорированных распределений на практике проще реализовать модели дискретных смесей непрерывных сдвинутых распределений (17).

**Кумулянтные коэффициенты смеси.** Подставляя в (1) формулу (7), получаем выражение для нахождения кумулянтных коэффициентов  $\gamma_s$  смеси (3):

$$\gamma_s = \frac{\kappa_{s,0} + \kappa_{s,1}}{(\kappa_{2,0} + \kappa_{2,1})^{s/2}} = \frac{\kappa_{2,0}^{s/2} \gamma_{s,0} + \kappa_{2,1}^{s/2} \gamma_{s,1}}{(\kappa_{2,0} + \kappa_{2,1})^{s/2}}, \quad (19)$$

где  $\kappa_{2,0}, \kappa_{2,1}$  — дисперсии случайных величин  $\xi_0$  и  $\xi_1$ ;  $\gamma_{s,0}, \gamma_{s,1}$  — их кумулянтные коэффициенты. Из формулы (19) следует, что если  $\kappa_{2,0} \ll \kappa_{2,1}$ , то  $\gamma_s \rightarrow \gamma_{s,1}$ . Если же  $\kappa_{2,0} \gg \kappa_{2,1}$ , то  $\gamma_s \rightarrow \gamma_{s,0}$ . Пусть коэффициенты  $\gamma_{s,0}, \gamma_{s,1}$  имеют одинаковые знаки. Тогда  $\gamma_s > 0$ , если  $\gamma_{s,0} > 0, \gamma_{s,1} > 0$ . Если  $\gamma_{s,0} < 0$  и  $\gamma_{s,1} < 0$ , то  $\gamma_s < 0$ . Пусть коэффициенты  $\gamma_{s,0}, \gamma_{s,1}$  имеют разные знаки. Тогда коэффициенты  $\gamma_s$  могут быть положительными, отрицательными и равными нулю.

Найдем условия, которым должны удовлетворять кумулянтные коэффициенты  $\gamma_{s,0}, \gamma_{s,1}$  и дисперсии  $\kappa_{2,0}, \kappa_{2,1}$  случайных величин  $\xi_0$  и  $\xi_1$  для того, чтобы случайная величина  $\xi$  была перфорированной. Из формулы (19) следует, что уравнение (4) принимает вид  $\kappa_{2,0}^{s/2} \gamma_{s,0} + \kappa_{2,1}^{s/2} \gamma_{s,1} = 0$ , откуда получаем условие, при котором  $\gamma_s = 0$ :

$$\kappa_{2,1} = \kappa_{2,0} \left( \frac{-\gamma_{s,0}}{\gamma_{s,1}} \right)^{2/s}. \quad (20)$$

В частном случае, когда  $\kappa_{2,0} = \kappa_{2,1} = 1$ , из формулы (20) следует условие, которому должны удовлетворять коэффициенты  $\gamma_{s,0}, \gamma_{s,1}$ :

$$\gamma_{s,0} = -\gamma_{s,1}. \quad (21)$$

Заметим, что применение условия (21) для построения моделей перфорированных случайных величин на практике малоприспособно, поскольку

для большинства классических распределений это условие не выполняется. Поэтому для получения моделей распределений (3) перфорированных случайных величин (10) удобно использовать условие (20), а базовую случайную величину  $\xi_0$  — нормировать:  $\tilde{\xi}_0 = \xi_0 / \sigma_0$ , где  $\sigma_0 = k_{2,0}^{1/2}$  — среднее квадратическое отклонение случайной величины  $\xi_0$ . Функция распределения  $\tilde{F}_0(x)$  случайной величины  $\tilde{\xi}_0$  имеет вид  $\tilde{F}_0(x) = F_0(\sigma_0 x)$ , ее дисперсия  $\tilde{\kappa}_{2,0} = 1$  и формулы (3), (10), (19), (20) принимают соответственно вид

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{F}_0(x-y) dF_1(y) = \int_{-\infty}^{\infty} F_0(\sigma_0 x - y) dF_1(y), \quad (22)$$

$$\xi = \tilde{\xi}_0 + \xi_1, \quad (23)$$

$$\gamma_s = \frac{\gamma_{s,0} + \kappa_{2,1}^{s/2} \gamma_{s,1}}{(1 + \kappa_{2,1})^{s/2}}, \quad (24)$$

$$\kappa_{2,1} = \left( -\frac{\gamma_{s,0}}{\gamma_{s,1}} \right)^{2/s}. \quad (25)$$

Таким образом, для построения моделей распределений (22) перфорированных случайных величин (23) необходимо задавать распределения  $\tilde{F}_0(x)$  и  $F_1(x)$ , у которых кумулянтные коэффициенты  $\gamma_{s,0}, \gamma_{s,1}$  имеют разные знаки, а необходимое для выполнения условия (4) значение дисперсии  $\kappa_{2,1}$  случайной величины  $\xi_1$  находить по формуле (25).

Рассмотрим возможность получения перфорированных случайных величин с учетом свойства симметрии функций распределения  $\tilde{F}_0(x)$  и  $F_1(x)$ .

1. Распределение  $\tilde{F}_0(x)$  — симметричное,  $F_1(x)$  — несимметричное. В этом случае все кумулянтные коэффициенты  $\gamma_{s,0} = 0$ , если  $s$  — нечетное, результирующее распределение  $F(x)$  является несимметричным и формула (24) принимает вид

$$\gamma_s = \begin{cases} \frac{\kappa_{2,1}^{s/2} \gamma_{s,1}}{(1 + \kappa_{2,1})^{s/2}}, & s - \text{нечетное,} \\ \frac{\gamma_{s,0} + \kappa_{2,1}^{s/2} \gamma_{s,1}}{(1 + \kappa_{2,1})^{s/2}}, & s - \text{четное.} \end{cases}$$

Если при нечетном  $s$  коэффициенты  $\gamma_{s,1} \neq 0$ , то в этом случае можно получить перфорированные распределения, у которых  $\gamma_s \neq 0$ , если  $s$  — нечетное, и  $\gamma_s = 0$ , если  $s$  — четное. Если равен нулю какой-либо кумулянтный



коэффициент  $\gamma_{r,1}$  нечетного порядка  $r$ , то можно получить распределения, у которых равны нулю коэффициент  $\gamma_r$  нечетного порядка  $r$  и коэффициенты  $\gamma_s$  четных порядков  $s \neq r$ .

2. Распределение  $\tilde{F}_0(x)$  — несимметричное,  $F_1(x)$  — симметричное. В этом случае все кумулянтные коэффициенты  $\gamma_{s,1} = 0$ , если  $s$  — нечетное, результирующее распределение  $F(x)$  является несимметричным и формула (24) принимает вид

$$\gamma_s = \begin{cases} \frac{\gamma_{s,0}}{(1+\kappa_{2,1})^{s/2}}, & s - \text{нечетное,} \\ \frac{\gamma_{s,0} + \kappa_{2,1}^{s/2} \gamma_{s,1}}{(1+\kappa_{2,1})^{s/2}}, & s - \text{четное.} \end{cases}$$

Если при нечетном  $s$  коэффициенты  $\gamma_{s,0} \neq 0$ , то в этом случае можно получить перфорированные распределения, у которых  $\gamma_s \neq 0$ , если  $s$  — нечетное, и  $\gamma_s = 0$ , если  $s$  — четное. Если равен нулю какой-либо кумулянтный коэффициент  $\gamma_{r,0}$  нечетного порядка  $r$ , то можно получить распределения, у которых равны нулю коэффициент  $\gamma_r$  нечетного порядка  $r$  и коэффициенты  $\gamma_s$  четных порядков  $s \neq r$ .

3. Пусть оба распределения,  $\tilde{F}_0(x)$  и  $F_1(x)$ , — симметричные. Тогда результирующее распределение  $F(x)$  является симметричным, все кумулянтные коэффициенты  $\gamma_{s,0} = \gamma_{s,1} = 0$  при нечетном порядке  $s$  и формула (24) принимает вид

$$\gamma_s = \begin{cases} 0, & s - \text{нечетное,} \\ \frac{\gamma_{s,0} + \kappa_{2,1}^{s/2} \gamma_{s,1}}{(1+\kappa_{2,1})^{s/2}}, & s - \text{четное.} \end{cases}$$

Если при четном  $s$  кумулянтные коэффициенты  $\gamma_{s,0} \neq 0$  и  $\gamma_{s,1} \neq 0$ , то в этом случае можно получить распределения перфорированных случайных величин, у которых одновременно  $\gamma_{s-1} = \gamma_s = \gamma_{s+1} = 0$ , где  $s$  — четное. Заметим, что если симметричные распределения  $F_0(x)$  и  $F_1(x)$  оба одновершинные, то распределение  $F(x)$  — симметричное и одновершинное [10].

**Пример.** Пусть  $\xi_0$  — непрерывная случайная величина, имеющая логистическое распределение [18] с плотностью вероятностей  $p_0(x)$ , а  $\xi_1$  — дискретная случайная величина, имеющая симметричное двухточечное распределение с функцией распределения  $F_1(x)$  (см. таблицу). В рассматриваемом случае формула (17) принимает следующий вид:

$$p(x) = 0,5[p_0(x+a) + p_0(x-a)]. \quad (26)$$

Поскольку распределения  $p_0(x)$  и  $F_1(x)$  — симметричные, то плотность вероятностей  $p(x)$  также симметрична. Поскольку все кумулянтные коэффициенты  $\gamma_{s,0}$  и  $\gamma_{s,1}$  равны нулю, если  $s$  — нечетное, то равны нулю все коэффициенты  $\gamma_s$  нечетных порядков  $s$  смеси (26). На основании данных таблицы находим дисперсию  $\kappa_{2,1} = \mu_{2,1} = a^2$  и значение параметра  $\beta$ , при котором базовая случайная величина  $\xi_0$  — нормированная:  $\beta = \pi / \sqrt{3}$ . Используя формулу (24), получаем зависимость коэффициентов  $\gamma_s(a)$  смеси (26) от параметра сдвига  $a$ :

$$\gamma_s(a) = \begin{cases} 0, & s - \text{нечетное,} \\ \frac{\gamma_{s,0} + a^s \gamma_{s,1}}{(1+a^2)^{s/2}}, & s - \text{четное.} \end{cases} \quad (27)$$

Конкретизируем формулу (27) для порядков  $s = 4, 6, 8$ . Для этого вычислим значения коэффициентов  $\gamma_{s,0}$ ,  $\gamma_{s,1}$ ,  $s = 4, 6, 8$ , случайных величин  $\xi_0$  и  $\xi_1$ , используя известные формулы связи кумулянтных коэффициентов с центральными моментами [19]:

$$\begin{aligned} \gamma_{4,k} &= M_{4,k} - 3, \gamma_{6,k} = M_{6,k} - 15M_{4,k} + 30, \\ \gamma_{8,k} &= M_{8,k} - 28M_{6,k} - 35M_{4,k}^2 + 420M_{4,k} - 630, \end{aligned} \quad (28)$$

где  $M_{s,k} = \mu_{s,k} / \mu_{2,k}^{s/2}$  — нормированные центральные моменты;  $k = 0, 1$ . Подставляя в (28) данные из таблицы, находим

$$\gamma_{4,0} = 1,2, \gamma_{6,0} = 48/7, \gamma_{8,0} = 86,4, \gamma_{4,1} = -2, \gamma_{6,1} = 16, \gamma_{8,1} = -272. \quad (29)$$

Подставляя значения кумулянтных коэффициентов (29) в формулу (27), получаем зависимости кумулянтных коэффициентов четных порядков  $\gamma_s(a)$

Распределение	Центральный момент
$p_0(x) = \frac{0,25\beta}{\text{ch}^2(0,5\beta x)},$ $\beta > 0, x \in (-\infty, \infty)$	$\mu_{s,0} = \begin{cases} 0, s - \text{нечетное,} \\ \left(\frac{\pi}{\beta}\right)^s (2^s - 2)  B_s , s - \text{четное} \end{cases}$ <p style="text-align: center;"><math>B_s</math> — числа Бернулли,</p> $B_2 = \frac{1}{6}, B_4 = -\frac{1}{30}, B_6 = \frac{1}{42}, B_8 = -\frac{1}{30}$
$F_1(x) = \begin{cases} 0, x \leq -a, \\ 0,5, x \in (-a, a], a > 0, \\ 1, x > a \end{cases}$	$\mu_{s,1} = \begin{cases} 0, & s - \text{нечетное,} \\ a^s, & s - \text{четное} \end{cases}$

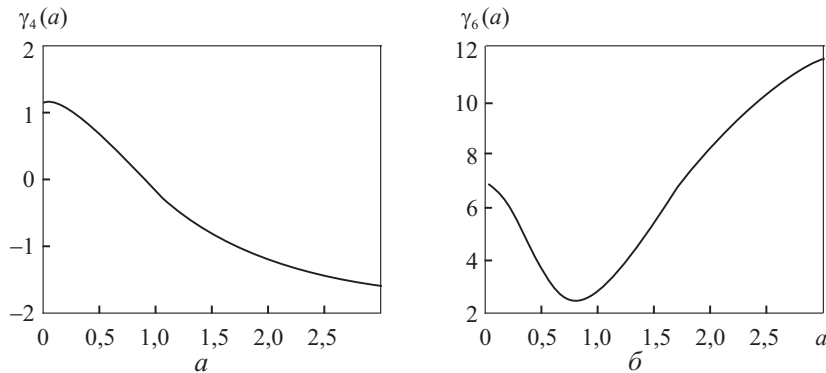


Рис. 1

от параметра сдвига  $a$ :

$$\gamma_4(a) = \frac{1,2 - 2a^4}{(1+a^2)^2}, \quad \gamma_6(a) = \frac{48/7 + 16a^6}{(1+a^2)^3}, \quad \gamma_8(a) = \frac{86,4 - 272a^8}{(1+a^2)^4}. \quad (30)$$

Проанализируем коэффициенты  $\gamma_s(a)$ ,  $s = 4, 6, 8$ , используя формулы (30).

1. Коэффициент  $\gamma_4(a)$  может принимать положительные и отрицательные значения:  $\gamma_4(0) = \gamma_{4,0} = 1,2$ ,  $\gamma_4(\infty) = \gamma_{4,1} = -2$ . При  $a = a_4 = 0,8801$  коэффициент  $\gamma_4(a)$  равен нулю. Таким образом,  $\gamma_4(a) \in (0; 1,2)$ , если  $a \in (0, a_4)$ ;  $\gamma_4(a_4) = 0$  и  $\gamma_4(a) \in (-2; 0)$ , если  $a > a_4$ . При  $a = a_4$  значения коэффициентов  $\gamma_6(a)$  и  $\gamma_8(a)$  следующие:  $\gamma_6(a_4) = 2,5576$ ,  $\gamma_8(a_4) = -1,1606$ . На рис. 1, а, представлен график коэффициента  $\gamma_4(a)$ .

2. Коэффициент  $\gamma_6(a)$  больше нуля при любых значениях параметра  $a$ :  $\gamma_6(0) = \gamma_{6,0} = 48/7$ ,  $\gamma_6(\infty) = \gamma_{6,1} = 16$ . Можно показать, что при  $a = a_m = 0,8091$  коэффициент  $\gamma_6(a)$  имеет минимальное значение:  $\min \gamma_6 = \gamma_6(a_m) = 2,5045$ . Таким образом,  $\gamma_6(a) \in (2,5045; 16)$ . Значения коэффициентов  $\gamma_4(a)$  и  $\gamma_8(a)$  при  $a = a_m$  следующие:  $\gamma_4(a_m) = 0,1252$ ,  $\gamma_8(a_m) = 4,8620$ . На рис. 1, б, представлен график коэффициента  $\gamma_6(a)$ .

3. Коэффициент  $\gamma_8(a)$  может принимать положительные и отрицательные значения:  $\gamma_8(0) = \gamma_{8,0} = 84,4$ ,  $\gamma_8(\infty) = \gamma_{8,1} = -272$ . При  $a = a_8 = 0,8665$   $\gamma_8(a) = 0$ . Таким образом,  $\gamma_8(a) \in (0; 86,4)$ , если  $a \in (0, a_8)$ ;  $\gamma_8(a_8) = 0$  и  $\gamma_8(a) \in (-272; 0)$ , если  $a > a_8$ . Значения коэффициентов  $\gamma_4(a)$  и  $\gamma_6(a)$  при  $a = a_8$  следующие:  $\gamma_4(a_8) = 0,0237$ ,  $\gamma_6(a_8) = 2,5395$ .

Из приведенных результатов следует, что в рассматриваемом случае можно получить две модели перфорированных распределений:  $\gamma_3 = \gamma_4 = \gamma_5 = 0$  или  $\gamma_7 = \gamma_8 = \gamma_9 = 0$ . Значения параметров сдвига  $a_4$  и  $a_8$  практически одинаковы, различие составляет 1,55%. Значения коэффициентов  $\gamma_6(a_4)$  и  $\gamma_6(a_8)$  различаются всего на 0,71%, значение коэффициента

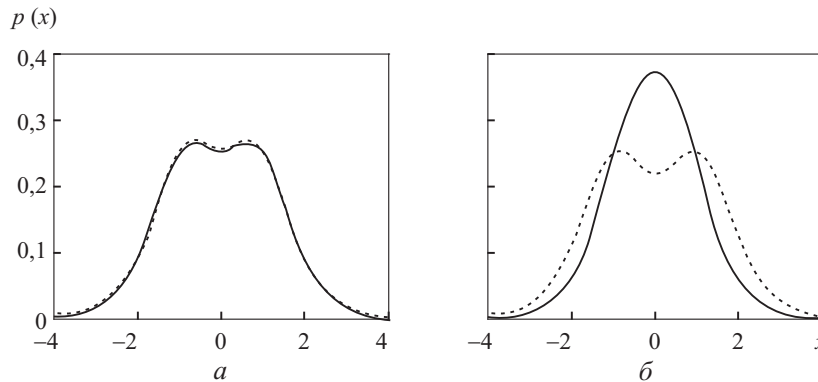


Рис. 2

$\gamma_4(a_8)$  мало отличается от нуля ( $\gamma_4(a_4)=0$ ), однако значения коэффициента  $\gamma_8(a)$  при  $a = a_4$  и  $a = a_8$  различаются существенно ( $\gamma_8(a_4) = -1,1606$ ,  $\gamma_8(a_8) = 0$ ).

Выражение для плотности вероятностей  $p(x)$  смеси получаем, подставляя в формулу (26) плотность вероятностей  $p_0(x)$  (см. таблицу) при  $\beta = \pi / \sqrt{3}$ :

$$p(x) = \frac{\pi}{8\sqrt{3}} \left( \operatorname{ch}^{-2} \left[ \frac{\pi}{2\sqrt{3}} (x+a) \right] + \operatorname{ch}^{-2} \left[ \frac{\pi}{2\sqrt{3}} (x-a) \right] \right). \quad (31)$$

На рис. 2, а, представлены графики двух моделей перфорированных плотностей вероятностей (31): при значениях параметра сдвига  $a = a_4 = 0,8801$  (сплошная линия,  $\gamma_3 = \gamma_4 = \gamma_5 = 0$ ) и  $a = a_8 = 0,8665$  (пунктирная линия,  $\gamma_7 = \gamma_8 = \gamma_9 = 0$ ). Из рис. 2, а, видно, что плотности вероятностей при  $a = a_4$  и  $a = a_8$  практически совпадают. На рис. 2, б, для сравнения приведены графики плотности вероятностей (31) при значениях  $a = 0,5$  (сплошная линия) и  $a = 1$  (пунктирная линия). В этом случае получаем следующие значения коэффициентов  $\gamma_s(a)$ :  $\gamma_4(0,5) = 0,688$ ,  $\gamma_6(0,5) = 3,6388$ ,  $\gamma_8(0,5) = 34,9542$ ;  $\gamma_4(1) = -0,2$ ,  $\gamma_6(1) = 2,8571$ ,  $\gamma_8(1) = -11,6$ .

Рассмотрим компьютерное моделирование случайных величин  $\xi$ , плотность вероятностей которых описывается выражением (26). Пусть  $\rho_0$  и  $\rho_1$  — независимые случайные величины, имеющие равномерное распределение на интервале  $[0, 1]$ . Тогда, используя формулу (10), результаты работы [18] и данные таблицы, получаем общее выражение для моделирования случайной величины  $\xi$ :

$$\xi = \xi_0 + \xi_1 = \beta^{-1} \ln [\rho_0 / (1 - \rho_0)] + a \operatorname{sign} (\rho_1 - 0,5).$$

Очевидно, что для моделирования перфорированных случайных величин необходимо задать следующие значения параметров:  $\beta = \pi / \sqrt{3}$ ,  $a = a_4 = 0,8801$  или  $a = a_8 = 0,8665$ .

## Выводы

Использование семейства смесей сдвинутых распределений (3), у которых кумулянты  $\kappa_{s,0}, \kappa_{s,1}$ , базовой и смешивающей функций распределения имеют разные знаки, позволяет моделировать перфорированные функции распределения и случайные величины.

При математическом моделировании перфорированных распределений на практике проще реализовать модели дискретных смесей непрерывных сдвинутых распределений. Компьютерное моделирование перфорированных случайных величин на основе смесей сдвинутых распределений сводится к моделированию суммы двух независимых случайных величин:  $\xi_0$  и  $\xi_1$ .

При построении моделей перфорированных распределений и случайных величин базовые случайные величины  $\xi_0$  удобно нормировать. Тогда решение задачи моделирования сводится к выбору базовой и смешивающей функций распределения, у которых кумулянтные коэффициенты  $\gamma_{s,0}, \gamma_{s,1}$  имеют разные знаки, и нахождению значения дисперсии  $\kappa_{2,1}$  случайной величины  $\xi_1$ , необходимого для выполнения условия  $\kappa_s = 0$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Малахов А.Н. Кумулянтный анализ случайных негауссовых процессов и их преобразований. М.: Сов. радио, 1978, 376 с.
2. Кунченко Ю.П. Полиномиальные оценки параметров близких к гауссовским случайных величин. Ч. I. Стохастические полиномы, их свойства и применения для нахождения оценок параметров. Черкассы: ЧИТИ, 2001, 133 с.
3. Кунченко Ю.П., Заболотный С.В. Полиномиальные оценки параметров близких к гауссовским случайных величин. Ч. II. Оценка параметров близких к гауссовским случайных величин. Черкассы: ЧИТИ, 2001, 251 с.
4. Alexandrou D., De Moustier C., Haralabus G. Evaluation and verification of bottom acoustic reverberation statistics predicted by the point scattering model // J. Acoustical Society of America, 1992, Vol. 91, No. 3, p. 1403—1413.
5. Карпов И.Г. Приближенная идентификация законов распределения помех в адаптивных приемниках с использованием метода моментов // Радиотехника. 1999, № 7, с. 11—14.
6. Кузнецов В.В. Использование моментов третьего порядка в расчетах электрических нагрузок // Вест. Самарского ГТУ. Серия «Технические науки». 2009, № 2 (24), с. 166—171.
7. Wang H., Chen P. Fault Diagnosis Method Based on Kurtosis Wave and Information Divergence for Rolling Element Bearings // WSEAS Transactions on Systems. 2009, Vol. 8, Issue 10, p. 1155—1165.
8. Кузнецов Б.Ф., Бородкин Д.К., Лебедева Л.В. Кумулянтные модели дополнительных погрешностей // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2013, № 1 (37), с. 134—138.
9. Лукач Е. Характеристические функции. Пер. с англ. В.М. Золотарева. М.: Наука, 1979, 424 с.

10. Кунченко Ю.П., Заболотний С.В., Коваль В.В., Чепинога А.В. Моделирование эксцесных випадкових величин із заданим кумулянтним описом на основі бігаусового розподілу // Вісн. ЧДТУ. 2005, № 1, с. 38—42.
11. Заболотний С.В., Чепинога А.В. Тетрагаусові симетрично-розподілені імовірнісні моделі на основі моментного опису // Зб. наук. праць ШМЕ ім. Г.Є. Пухова НАН України. 2008, №.47, с. 92—99.
12. Чепинога А.В. Области реалізації бігаусових моделей асиметрично-ексцесних випадкових величин з перфорованим моментно-кумулянтним описом // Вісн. ЧДТУ. 2010, № 2, с. 91—95.
13. Красильников А.И. Класс негауссовских распределений с нулевыми коэффициентами асимметрии и эксцесса // Изв. вузов. Радиоэлектроника. 2013, **56**, № 6, с. 56—63.
14. Красильников А.И. Класс негауссовских симметричных распределений с нулевым коэффициентом эксцесса // Электрон. моделирование. 2017, **39**, № 1, с. 3—17.
15. Красильников А.И. Модели несимметричных распределений случайных величин с нулевым коэффициентом асимметрии // Там же. 2016, **38**, № 1, с. 19—33.
16. Королев В.Ю. Вероятностно-статистический анализ хаотических процессов с помощью смешанных гауссовских моделей. Декомпозиция волатильности финансовых индексов и турбулентной плазмы. М.: Изд-во Ин-та проблем информатики РАН, 2008, 390 с.
17. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. В 2-х томах. Т. 2. Пер. с англ. Ю.В. Прохорова. М.: Мир, 1984, 738 с.
18. Вадзинский Р.Н. Справочник по вероятностным распределениям. СПб.: Наука, 2001, 295 с.
19. Кендалл М., Стьюарт А. Теория распределений. Пер. с англ. В.В. Сазонова, А.Н. Шириева, под ред. А.Н. Колмогорова. М.: Наука, 1966, 588 с.

Поступила 05.10.17

#### REFERENCES

1. Malakhov, A.N. (1978), *Kumuliantnyi analiz sluchainykh negaussovykh protsessov i ikh preobrazovaniy* [Cumulant analysis of random non-Gaussian processes and their transformations], Sov. radio, Moscow, USSR.
2. Kunchenko, Yu.P. (2001), *Polynomialnye otsenki parametrov blizkikh k gaussovskim sluchainykh velichin. Ch.I. Stokhasticheskie polinomy, ih svoystva i primeneniye dlia nakhozheniya otsenok parametrov* [Parameter polynomial estimations of random variables close to Gaussian. Part I. Stochastic polynomials, their properties and application for finding parameter estimations], ChITI, Cherkassy, Ukraine.
3. Kunchenko, Yu.P. and Zabolotnyi, S.V. (2001), *Polynomialnye otsenki parametrov blizkikh k gaussovskim sluchainykh velichin. Ch. II. Otsenka parametrov blizkikh k gaussovskim sluchainykh velichin* [Parameter polynomial estimations of random variables close to Gaussian. Part II. Parameters estimation of vandom variables close to Gaussian], ChITI, Cherkassy, Ukraine.
4. Alexandrou, D., De Moustier, C. and Haralabus, G. (1992), Evaluation and verification of bottom acoustic reverberation statistics predicted by the point scattering model, *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 91, no. 3, pp. 1403-1413.
5. Karpov, I.G. (1999), “Approximate identification of distribution laws of hindrances in adaptive receivers with use of a method of the moments”, *Radiotekhnika*, no. 7, pp. 11-14.
6. Kuznetsov, V.V. (2009), “Use of the moments of the third order in calculations of electric loadings”, *Vestnik Samarskogo GTU. Seriya “Tekhnicheskie nauki”*, no. 2 (24), pp. 166-171.
7. Wang, H. and Chen, P. (2009), Fault diagnosis method based on Kurtosis wave and information divergence for rolling element bearings, *WSEAS Transactions on Systems*, Vol. 8, Iss. 10, pp. 1155-1165.

8. Kuznetsov, B.F., Borodkin, D.K. and Lebedeva, L.V. (2013), "Cumulant models of additional errors", *Sovremennye tekhnologii. Sistemyi analiz. Modelirovanie*, no. 1 (37), pp. 134-138.
9. Lukach, E. (1979), *Kharakteristicheskie funktsii* [Characteristic Functions], Translated by Zolotarev, V.M., Nauka, Moscow, USSR.
10. Kunchenko, Iu.P., Zabolotnii, S.V., Koval V.V. and Chepynoha, A.V. (2005), "Simulation of excess random variables with a given cumulative description on the basis of the bi-Gaussian distribution", *Visnyk ChDTU*, no. 1, pp. 38-42.
11. Zabolotnii, S.V. and Chepynoha, A.V. (2008), "Tetra-Gaussian symmetrically distributed probabilistic models on the basis of a moment description", *Zbirnyk naukovykh prats IPME im. G.Ie. Pukhova NAN Ukrainy*, no. 47, pp. 92-99.
12. Chepynoha, A.V. (2010), "Areas of realization of bi-Gaussian models of asymmetric-excess random variables with a perforated moment-cumulant description", *Visnyk ChDTU*, no. 2, pp. 91-95.
13. Krasilnikov, A.I. (2013), "Class of non-Gaussian distributions with zero skewness and kurtosis", *Izvestiia vysshikh uchebnykh zavedenii. Radioelektronika*, Vol. 56, no. 6, pp. 56-63.
14. Krasilnikov, A.I. (2017), "Class of non-Gaussian symmetric distributions with zero coefficient of kurtosis", *Elektronnoe modelirovanie*, Vol. 39, no. 1, pp. 3-17.
15. Krasilnikov, A.I. (2016), "Models of asymmetrical distributions of random variables with zero asymmetry coefficient", *Elektronnoe modelirovanie*, Vol. 38, no. 1, pp. 19-33.
16. Korolev, V.Iu. (2008), *Veroiatnostno-statisticheskii analiz khaoticheskikh protsessov s pomoshchiu smeshannykh gaussovskikh modelei. Dekompozitsiia volatilnosti finansovykh indeksov i turbulentnoi plazmy* [Probabilistic-statistical analysis of chaotic processes using mixed Gaussian models. Decomposition of volatility of financial indices and turbulent plasma], Izdatelstvo Instituta problem informatiki RAN, Moscow, Russia.
17. Feller, V. (1984), *Vvedenie v teoriyu veroiatnostei i ee prilozheniia* [Introduction to probability theory and its applications], Vol. 2., Translated by Prokhorov, Yu.V., Mir, Moscow, USSR.
18. Vadzinskii, R.N. (2001), *Spravochnik po veroiatnostnym raspredeleniiam* [Reference book on probabilistic distributions], Nauka, St. Petersburg, Russia.
19. Kendall, M. and Stuart, A. (1966), *Teoriia raspredelenii* [Distribution theory], Translated by Sazonov, V.V. and Shiriaev, A.N., Ed Kolmogorov, A.N., Nauka, Moscow, Russia.

Received 05.10.17

A.I. Krasilnikov

#### MODELING OF PERFORATED RANDOM VARIABLES ON THE BASIS OF MIXTURES OF SHIFTED DISTRIBUTIONS

The use of a family of mixtures of shifted distributions for the modeling of perforated distributions and random variables has been justified. Peculiarities of simulation of perforated distributions are considered. The cumulant coefficients of mixtures of shifted distributions have been analyzed. The models of perforated random variables on the basis of a two-component mixture of shifted logistic distributions have been constructed.

*К е у о р д s*: cumulant coefficients, moment-cumulant models, cumulant analysis, perforated distributions, mixtures of distributions.

*КРАСИЛЬНИКОВ Александр Иванович*, канд. физ.-мат. наук, доцент, вед. науч. сотр. Ин-та технической теплофизики НАН Украины. В 1973 г. окончил Киевский политехнический ин-т. Область научных исследований — математические модели, вероятностные характеристики и методы статистической обработки флуктуационных сигналов в системах шумовой диагностики.

