

УДК 621.3.011.74.005

**Н.А.Шидловська**, чл.-кор. НАН України, **В.Г.Самойленко**, докт.фіз.-мат.наук (Київський нац. ун-т ім. Т.Шевченка), **О.П.Кравченко**, канд.техн.наук (Інститут електродинаміки НАН України, Київ),

## ДОСЛІДЖЕННЯ НЕЛІНІЙНИХ РОЗРЯДНИХ КІЛ В РЕЖИМАХ РОБОТИ, БЛИЗЬКИХ ДО РЕЗОНАНСНИХ

*Проаналізовано особливості процесів у нелінійному розрядному колі в режимах роботи, близьких до резонансних, в залежності від того, який з елементів кола є нелінійним.*

*Проанализированы особенности процессов, происходящих в нелинейной разрядной цепи при режимах работы, близких к резонансным, в зависимости от того, какой из элементов является нелинейным.*

В [1] авторами розроблено аналітичний метод розрахунку процесів в слабо нелінійних коливальних колах з втратами, який ґрунтується на розкладанні розв'язків слабо нелінійної системи по розв'язках незбуреної (породжуючої) системи. Основна перевага запропонованого методу полягає в тому, що завдяки спеціальній заміні змінних відбувається перехід від нелінійного рівняння другого порядку до системи лінійних диференціальних рівнянь першого порядку, що значно розширює клас задач, які можуть бути досліджені за його допомогою.

Ця робота є продовженням статті [3] і присвячена розгляду процесів у послідовному  $RLC$ -колі в режимах роботи, близьких до резонансних. Розглянуто три розрядних кола, в яких нелінійним почергово вважається один з елементів, а решта – лінійні.

Запишемо рівняння, що відображає процеси в послідовному  $RLC$ -колі:

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\delta \frac{dq}{dt} + \omega^2 q = \varepsilon F\left(q, \frac{dq}{dt}\right). \quad (1)$$

Тут  $2\delta = R/L$ ,  $\omega^2 = LC^{-1}$ ,  $q$  – величина заряду на конденсаторі,  $L$  – індуктивність, що відповідає лінійному випадку,  $C$  – ємність конденсатора,  $R$  – опір,  $\varepsilon$  – малий параметр.

Вигляд нелінійної функції  $F$  в правій частині рівняння (1) визначається особливостями конкретного кола і залежить від типу нелінійності. У даній роботі будемо розглядати процеси у колі, коли корені характеристичного незбуреного (при  $\varepsilon = 0$ ) рівняння (1) кратні і мають вигляд  $\lambda_1 = \lambda_2 = -\delta$ .

Для побудови наближеного розв'язку рівняння (1) виконується заміна змінних

$$q = y_1, \quad dq/dt = -\delta y_1 + y_2, \quad (2)$$

і рівняння (1) зводиться до еквівалентної системи диференціальних рівнянь вигляду:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -\delta y_1 + y_2 \\ \dot{y}_2 = -2\delta y_2 + \varepsilon H_2(y_1, y_2) \end{cases} \quad (3)$$

де  $H_2(y_1, y_2) = F(y_1, -\delta y_1 + y_2) = H_2(y)$ .

Систему (3) можна записати наступним чином:

$$\dot{y} = \begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = Wy + \varepsilon H(y), \quad (4)$$

$$\text{де } W = \begin{pmatrix} -\delta & 1 \\ 0 & -\delta \end{pmatrix}, \quad H(y) = \begin{pmatrix} 0 \\ H_2(y) \end{pmatrix}.$$

Тут  $H(y)$  залежить від типу нелінійності в колі і буде наведено нижче.

Розв'язок системи (4) будемо шукати у вигляді

$$y = \varphi(t, z) = \begin{pmatrix} U(t, z) \\ V(t, z) \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

де  $z$  – нова невідома вектор – функція змінної  $t$ .

Функції  $U(t, z)$  та  $V(t, z)$  зобразимо наступним чином:

$$U(t, z) = u_{10}z_1 + u_{01}z_2 + u_{20}z_1^2 + u_{11}z_1z_2 + u_{02}z_2^2 + u_{30}z_1^3 + u_{21}z_1^2z_2 + u_{12}z_1z_2^2 + u_{03}z_2^3 + \dots, \quad (6)$$

$$V(t, z) = v_{10}z_1 + v_{01}z_2 + v_{20}z_1^2 + v_{11}z_1z_2 + v_{02}z_2^2 + v_{30}z_1^3 + v_{21}z_1^2z_2 + v_{12}z_1z_2^2 + v_{03}z_2^3 + \dots,$$

де  $u_{10}, v_{10}, \dots, u_{03}, v_{03}, \dots$  – деякі невідомі функції, залежні від змінної  $t$ , явний вигляд яких визначається рекурентним чином.

Враховуючи те, що

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \frac{dz}{dt}, \quad (7)$$

де  $\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial z_1} & \frac{\partial U}{\partial z_2} \\ \frac{\partial V}{\partial z_1} & \frac{\partial V}{\partial z_2} \end{pmatrix}$ , система рівнянь (4) перетвориться до вигляду

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \dot{z} = W\varphi + \varepsilon H(\varphi). \quad (8)$$

Беручи до уваги умову  $\det\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) \neq 0$ , невідомі функції  $U(t, z), V(t, z)$  будемо визначати так, щоб виконувалася рівність

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = W\varphi - \frac{\partial\varphi}{\partial z} Wz + \varepsilon H(\varphi). \quad (9)$$

Зауважимо, що співвідношення (9) забезпечують можливість зведення системи (4) до лінійної системи  $\dot{z} = Wz$ , загальний розв'язок якої має вигляд:

$$z_1 = (C_1 + C_2 t)e^{-\delta t}, \quad z_2 = C_2 e^{-\delta t}, \quad (10)$$

де  $C_1, C_2$  – сталі інтегрування, які визначаються з відповідних початкових умов.

Враховуючи вирази (6) і те, що

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial t} \\ \frac{\partial V}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{du_{10}}{dt}z_1 + \frac{du_{01}}{dt}z_2 + \frac{du_{20}}{dt}z_1^2 + \frac{du_{11}}{dt}z_1z_2 + \frac{du_{02}}{dt}z_2^2 + \dots \\ \frac{dv_{10}}{dt}z_1 + \frac{dv_{01}}{dt}z_2 + \frac{dv_{20}}{dt}z_1^2 + \frac{dv_{11}}{dt}z_1z_2 + \frac{dv_{02}}{dt}z_2^2 + \dots \end{pmatrix}, \quad (11)$$

рівняння системи (9) набудуть наступного вигляду:

$$\begin{aligned} & \frac{du_{10}}{dt}z_1 + \frac{du_{01}}{dt}z_2 + \frac{du_{20}}{dt}z_1^2 + \frac{du_{11}}{dt}z_1z_2 + \frac{du_{02}}{dt}z_2^2 + \frac{du_{30}}{dt}z_1^3 + \frac{du_{21}}{dt}z_1^2z_2 + \frac{du_{22}}{dt}z_1z_2^2 + \frac{du_{03}}{dt}z_2^3 = \\ & = v_{10}z_1 + (v_{01} - u_{10})z_2 + (\delta u_{20} + v_{20})z_1^2 + (v_{11} - 2u_{20} + \delta u_{11})z_1z_2 + (\delta u_{02} + v_{02} - u_{11})z_2^2 + \\ & + (2\delta u_{30} + v_{30})z_1^3 + (2\delta u_{21} + v_{21} - 3u_{30})z_1^2z_2 + (2\delta u_{12} - 2u_{21} + v_{12})z_1z_2^2 + (2\delta u_{03} + v_{03} - u_{12})z_2^3. \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} & \frac{dv_{11}}{dt}z_1 + \frac{dv_{12}}{dt}z_2 + \frac{dv_{21}}{dt}z_1^2 + \frac{dv_{22}}{dt}z_1z_2 + \frac{dv_{23}}{dt}z_2^2 + \frac{dv_{31}}{dt}z_1^3 + \frac{dv_{32}}{dt}z_1^2z_2 + \frac{dv_{33}}{dt}z_1z_2^2 + \frac{dv_{34}}{dt}z_2^3 = \\ & = -v_{10}z_2 + \delta v_{20}z_1^2 + (\delta v_{11} - 2v_{20})z_1z_2 + (\delta v_{02} - v_{11})z_2^2 + 2\delta v_{30}z_1^3 + (2\delta v_{21} - 3v_{30})z_1^2z_2 + \\ & + (2\delta v_{12} - 2v_{21})z_1z_2^2 + (2\delta v_{03} - v_{12})z_2^3 + \varepsilon H_2(z), \end{aligned} \quad (13)$$

де  $H_2(z)$  залежить від типу і вигляду характеристики нелінійного елемента і записується з урахуванням (5), (6).

Невідомі функції  $u_{10}, u_{01}, v_{10}, v_{01}, u_{20}, u_{11}, u_{02}, v_{20}, v_{11}, v_{02}, \dots$  визначаються з рівнянь, які отримуються з (12), (13) шляхом прирівнювання коефіцієнтів при однакових степенях  $z_1, z_2$  в лівій і правій частинах співвідношень (12), (13).

Необхідно відзначити, що функції  $u_{10}, v_{10}, \dots, u_{03}, v_{03}$  набувають однакового вигляду для послідовного  $RLC$ -кола незалежно від того, який з елементів є нелінійним, і визначаються як частинні розв'язки системи диференціальних рівнянь (12), (13):

$$\begin{aligned} u_{10} = 1, \quad u_{01} = 0, \quad v_{10} = 0, \quad v_{01} = 1, \\ u_{20} = u_{11} = u_{02} = 0, \quad v_{20} = v_{11} = v_{02} = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Подальший аналіз проведемо з урахуванням особливостей нелінійних елементів і знайдемо наближені розв'язки системи (4) для кожного виду нелінійного розрядного кола.

1. Для кола, що містить **нелінійну індуктивність** з феромагнітним осердям, нелінійність якої описується співвідношенням [2]

$$\psi = Ldq / dt - \varepsilon (dq / dt)^3, \quad (15)$$

з урахуванням закону Кірхгофа можна записати:

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{q}{LC} = -\varepsilon \frac{3}{L} \left[ \frac{R}{L} \left( \frac{dq}{dt} \right)^3 + \frac{q}{LC} \left( \frac{dq}{dt} \right)^2 \right]. \quad (16)$$

Застосуємо для аналізу описану вище методику. Функція  $H_2(z)$  при такому типі нелінійної залежності з урахуванням рівностей (5), (6) буде мати вигляд:

$$H_2(z) = r \{ \delta^4 z_1^3 - 4\delta^3 z_1^2 z_2 + 5\delta^2 z_1 z_2^2 - 2\delta z_2^3 \}. \quad (17)$$

Функції  $u_{03}, v_{03}, \dots$  визначимо як частинні розв'язки системи диференціальних рівнянь (12), (13):

$$\begin{aligned} u_{30} = \varepsilon r \delta^2 / 4, \quad v_{30} = -\varepsilon r \delta^3 / 2, \\ u_{21} = -\varepsilon r \delta / 4, \quad v_{21} = 5\varepsilon r \delta^2 / 4, \\ u_{12} = 3\varepsilon r / 8, \quad v_{12} = -5\varepsilon r \delta / 4, \\ u_{03} = 0, \quad v_{03} = 3\varepsilon r / 8. \end{aligned} \quad (18)$$

Таким чином, підставляючи отримані вище значення функцій  $u_{10}, v_{10}, \dots, u_{03}, v_{03}, \dots$  в (6) та враховуючи заміни (3) і (2), одержимо формули для наближеного розв'язку рівняння (15):

$$q = (C_1 + C_2 t) e^{-\delta t} + \varepsilon \frac{r \delta^2}{4} (C_1 + C_2 t)^3 e^{-3\delta t} - \varepsilon \frac{r \delta}{4} (C_1 + C_2 t)^2 C_2 e^{-3\delta t} + \varepsilon \frac{3}{8} r (C_1 + C_2 t) C_2^2 e^{-3\delta t}, \quad (19)$$

$$\begin{aligned} i = -\delta (C_1 + C_2 t) e^{-\delta t} + C_2 e^{-\delta t} - \varepsilon \frac{3r \delta^3}{4} (C_1 + C_2 t)^3 e^{-3\delta t} + \varepsilon \frac{3r \delta^2}{2} (C_1 + C_2 t)^2 C_2 e^{-3\delta t} - \\ - \varepsilon \frac{13r \delta}{8} (C_1 + C_2 t) C_2^2 e^{-3\delta t} + \varepsilon \frac{3}{8} r C_2^3 e^{-3\delta t}. \end{aligned} \quad (20)$$

Сталі інтегрування  $C_1, C_2$  визначаються з початкових умов

$$q|_{t=0} = Q, \quad dq / dt|_{t=0} = 0 \quad (21)$$

і їхні наближені значення мають вигляд:

$$C_1 = Q - \varepsilon \frac{3}{8} r \delta^2 Q^3, \quad C_2 = \delta Q + \varepsilon \frac{r \delta^3}{8} Q^3.$$

2. У випадку розряду **нелінійного конденсатора** з сегнетодіелектриком, кулон-вольтна характеристика якого має вигляд [2]

$$u_c = q / C + dq^3, \quad (22)$$

процеси у колі описуються рівнянням

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{q}{LC} + \frac{d}{L} q^3 = 0. \quad (23)$$

Введемо додаткові позначення:

$$k = L^{-1}; \quad d = \varepsilon - \text{малий параметр}. \quad (24)$$

Використовуюючи описану вище методику з урахуванням (24), рівняння (23) можна звести до системи рівнянь (12) і (13), в яких  $H_2(z)$  має вигляд:

$$H_2(z) = kz_1^3. \quad (25)$$

Частинними розв'язками цих диференціальних рівнянь є функції:

$$\begin{aligned} u_{30} &= -\varepsilon k / 4\delta^2, & v_{30} &= -\varepsilon k / 2\delta, \\ u_{21} &= -3\varepsilon k / 4\delta^3, & v_{21} &= 3\varepsilon k / 4\delta^2, \\ u_{12} &= -9\varepsilon k / 8\delta^4, & v_{12} &= 3\varepsilon k / 4\delta^3, \\ u_{03} &= -3\varepsilon k / 4\delta^5, & v_{03} &= -3\varepsilon k / 4\delta^5. \end{aligned} \quad (26)$$

Підставляючи отримані значення функцій  $u_{10}, v_{10}, \dots, u_{03}, v_{03}, \dots$  з (14), (26) в (6) та враховуючи заміни (2) та (3), одержимо

$$\begin{aligned} q &= (C_1 + C_2 t) e^{-\delta t} - \varepsilon \frac{k}{4\delta^2} (C_1 + C_2 t)^3 e^{-3\delta t} - \varepsilon \frac{3k}{4\delta^3} (C_1 + C_2 t)^2 C_2 e^{-3\delta t} - \\ &\quad - \varepsilon \frac{9k}{8\delta^4} (C_1 + C_2 t) C_2^2 e^{-3\delta t} - \varepsilon \frac{3k}{4\delta^5} C_2^3 e^{-3\delta t}, \\ i &= (-\delta C_1 + C_2) e^{-\delta t} - \delta C_2 t e^{-\delta t} + \varepsilon \frac{3k}{4\delta} (C_1 + C_2 t)^3 e^{-3\delta t} + \varepsilon \frac{3k}{2\delta^2} (C_1 + C_2 t)^2 C_2 e^{-3\delta t} + \\ &\quad + \varepsilon \frac{15k}{8\delta^3} (C_1 + C_2 t) C_2^2 e^{-3\delta t} + \varepsilon \frac{9k}{8\delta^4} C_2^3 e^{-3\delta t}. \end{aligned} \quad (27)$$

З урахуванням початкових умов (21) наближені значення сталих інтегрування набудуть вигляду:

$$C_1 = Q + \varepsilon \frac{23k}{8\delta^2} Q^3, \quad C_2 = \delta Q - \varepsilon \frac{19k}{8\delta} Q^3.$$

3. Нелінійність **активного опору**, як правило, (коли нелінійність не лежить в основі функціонування пристрою) описується співвідношенням [2]:

$$R = R_0(1 + \varepsilon i^2). \quad (28)$$

З урахуванням рівняння Кірхгофа для послідовного RLC-кола з нелінійним опором можна записати:

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{q}{LC} + \varepsilon \frac{R}{L} \left( \frac{dq}{dt} \right)^3 = 0. \quad (29)$$

Використовуюючи описану вище методику, рівняння (29) можна звести до системи рівнянь (12), (1), де  $H_2(z)$  описується співвідношенням:

$$H_2(z) = 2\delta \left\{ -\delta^3 z_1^3 + 3\delta^2 z_1^2 z_2 - 3\delta z_1 z_2^2 + z_2^3 \right\}, \quad (30)$$

а функції  $u_{30}, v_{30}, \dots, u_{03}, v_{03}, \dots$  мають вигляд:

$$\begin{aligned} u_{30} &= \varepsilon \delta^2 / 2, & v_{30} &= -\varepsilon \delta^3, \\ u_{21} &= 0, & v_{21} &= 3\varepsilon \delta^2 / 2, \\ u_{12} &= 3\varepsilon / 4, & v_{12} &= -3\varepsilon \delta / 2, \\ u_{03} &= \varepsilon / 4\delta, & v_{03} &= \varepsilon / 4. \end{aligned} \quad (31)$$

Тоді, аналогічно з попереднім випадком, підставляючи (14) і (31) у (5) і (6) та враховуючи заміни (2) і (3), маємо:

$$q = (C_1 + C_2 t) e^{-\delta t} + \varepsilon \frac{\delta^2}{2} (C_1 + C_2 t)^3 e^{-3\delta t} + \varepsilon \frac{3}{4} (C_1 + C_2 t) C_2^2 e^{-3\delta t} + \frac{\varepsilon}{4\delta} C_2^3 e^{-3\delta t}, \quad (32)$$

$$\begin{aligned} i &= -\delta(C_1 + C_2 t) e^{-\delta t} + C_2 e^{-\delta t} - \frac{3}{2} \varepsilon \delta^3 (C_1 + C_2 t)^3 e^{-3\delta t} + \frac{3}{2} \varepsilon \delta^2 (C_1 + C_2 t)^2 C_2 e^{-3\delta t} - \\ &\quad - \frac{9}{4} \varepsilon \delta (C_1 + C_2 t) C_2^2 e^{-3\delta t}. \end{aligned} \quad (33)$$

Наближені значення сталих інтегрування для рівнянь (32), (33) знаходимо з початкових умов (21):

$$C_1 = Q - \varepsilon \frac{3}{2} \delta^2 Q^3, \quad C_2 = \delta Q + \varepsilon \frac{3}{4} \delta^3 Q^3.$$

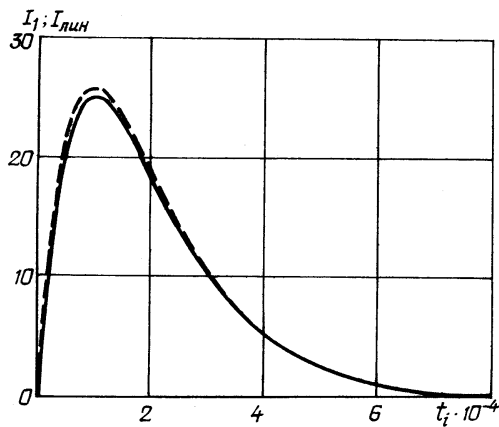


Рис. 1

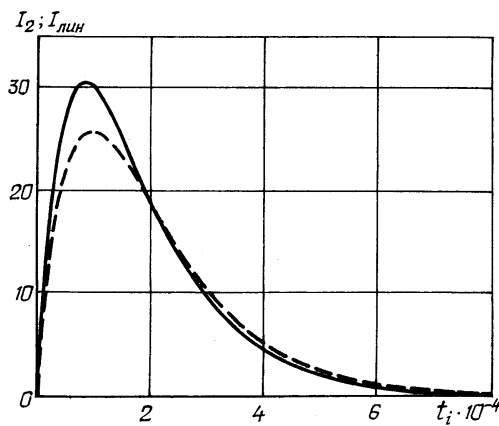


Рис. 2

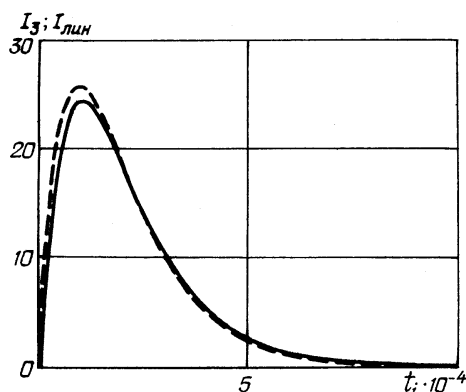


Рис. 3

Для порівняння впливу нелінійності різних елементів кола на процеси в ньому (для трьох розглянутих варіантів) побудовано графіки залежностей струму від часу (рис.1–3). Величина малого параметру нелінійних характеристик вибиралася виходячи із співвідношення між лінійною та нелінійною складовими:

$$k = \frac{R_n}{R_l} = \frac{\Psi_n}{\Psi_l} = \frac{Q_n}{Q_l} \approx 0,01.$$

На всіх графіках неперервною лінією відображено струм у нелінійному колі, пунктирною – у лінійному.

Як видно з рис. 1–3, в усіх випадках, незалежно від того, який з елементів кола нелінійний, існує точка перетину між графіками, що відображають лінійний та нелінійний процеси на відрізьку спаду струму. У випадку нелінійності конденсатора (рис. 2) точка перетину спостерігається і на відрізьку зростання струму. Це свідчить про те, що нелінійність, залежно від моменту часу, може збільшувати, або зменшувати струм у колі.

Крім того, ці графіки наочно демонструють, що при нелінійній характеристиці конденсатора, абсолютна величина різниці між лінійною та нелінійною характеристиками більша, ніж при нелінійності характеристик індуктивності (рис. 1) та опору (рис. 3). Зазначимо, що при нелінійності конденсатора екстремум струму набуває більшого значення, ніж в лінійному випадку, а при нелінійності індуктивності та опору – навпаки, має менше значення, ніж у лінійному випадку.

**Висновки:** Таким чином, за допомогою оригінального аналітичного методу проаналізовано кола розряду конденсатора на індуктивно-активне навантаження при по-черговій нелінійності усіх елементів кола за умови лінійності останніх в режимах роботи, близьких до резонансних. Одержані графіки наочно демонструють відмінності поведінки процесів у лінійному та нелінійному колах в залежності від того, який з елементів нелінійний.

1. Потороча В.В., Кравченко О.П., Самойленко В.Г., Шидловська Н.А. Побудова наближених розв'язків слабо збурених диференціальних рівнянь теорії нелінійних електричних кіл // В зб.: Крайові задачі для диференціальних рівнянь. – Чернівці, 2006. – №14. – С. 168–175.

2. Филиппов Е. Нелинейная электротехника. – М.: Энергия, 1976. – 496 с.

3. Шидловська Н.А., Самойленко В.Г., Кравченко О.П. Аналітичний метод дослідження нелінійних розрядних кіл // Техн. електродинаміка. – 2009. – №5. – С. 3–6.

Надійшла 18.06.2009