

**ФИЛЬТРОВАНИЕ СУСПЕНЗИИ С УБЫВАЮЩЕЙ
СКОРОСТЬЮ ПРИ ЛИНЕЙНОЙ КИНЕТИКЕ
МАССООБМЕНА**

В.Л. Поляков

Институт гидромеханики НАН Украины, г. Киев

Поступила 01.09.2010 г.

Представлено эффективное приближенное решение задачи фильтрования суспензии при заданных напорах на границах загрузки и линейной кинетике массообмена. Разработана процедура определения длительности фильтроцикла исходя из двух критериев, контролирующих качество фильтрата и производительность фильтра. На многочисленных примерах с типичными исходными данными выполнен обстоятельный анализ влияния различных факторов на указанную длительность.

Ключевые слова: выходная концентрация, производительность, суспензия, убывающая скорость, фильтрование, фильтр, фильтроцикл.

Введение. Фильтрование при доочистке природных и сточных вод в основном осуществляется с постоянной скоростью (удельным расходом) v . Реже практикуется режим с убывающей скоростью в силу различных причин объективного и субъективного характера. Тем не менее он является перспективным, так как обладает рядом важных преимуществ, в частности требует меньших капиталовложений, проще и дешевле в эксплуатации. Реализуется этот режим при фиксированных напорах на входе, выходе фильтровальных сооружений и сопровождается плавным снижением расхода мутных вод вследствие ухудшения фильтрационных условий в загрузке за счет постепенного накопления в порах гелеподобного осадка [1 – 4]. Фильтрование с переменным расходом теоретическими методами практически не исследовалось. Математические модели, описывающие процесс осветления суспензий при постоянной и убывающей скорости фильтрования, имеют много общего, но вместе с тем существуют и принципиальные отличия. При $v = \text{const}$ удается решать уравнения массопереноса и массообмена, лежащие в основе осветлительного блока модели [5], независимо от гидродинамического, что существенно облегчает теоретический анализ. В случае же $v = v(t)$ оба блока неразделимы и должны решаться совместно. Кроме того, коэффи-

коэффициенты массообмена тесно связаны со скоростью v и поэтому они здесь становятся переменными. Сама же скорость изначально неизвестна и должна определяться в ходе решения математической задачи фильтрации. Согласно многочисленным экспериментальным исследованиям функции $\alpha(v)$, $\beta(v)$ можно считать степенными [6, 7]:

$$\alpha = \alpha_v v^r, \quad \beta = \beta_v v^q. \quad (1)$$

где α – коэффициент скорости прилипания частиц суспензии; β – коэффициент скорости отрыва прилипших частиц. При этом часто показатель степени r ставится в прямую зависимость от механизма доставки подвижных частиц к первичным коллекторам (зернам, гранулам), который, в свою очередь, определяется размерами частиц. Например, контакт частиц диаметром $\sim 10^{-6}$ (коллоиды) с коллекторами происходит главным образом благодаря Броуновскому движению, и тогда $r = 1/3$. Авторы [8 – 10] проанализировали взаимосвязь между коэффициентом скорости прилипания взвеси α и размерами сорбирующих и сорбируемых частиц, а также скорости v . Ввиду отмеченного серьезного усложнения задачи фильтрации при $v = v(t)$ ее строгое решение ранее было построено для единственного частного случая ($r = q = 1$) [11]. Это решение используется далее в качестве эталона для оценки более общего, но приближенного решения.

Фильтр при работе как с постоянным, так и с переменным расходами должен обеспечивать высокое качество водоочистки. Поэтому в первую очередь эффективность его действия в обоих режимах оценивается с помощью единого критерия качества, который формулируется в виде условия

$$C_e \leq C_{e*}, \quad (2)$$

где C_e – выходная объемная (массовая) концентрация взвеси, C_{e*} – ее предельно допустимое значение в соответствии с санитарными нормами. Принципиальные различия, существующие на практике между указанными режимами, отражает другой (гидравлический) критерий, накладывающий жесткое ограничение на продолжительность осветлительного действия фильтра из-за уменьшения пропускной способности фильтрующего материала со временем. При сохранении скорости фильтрации постоянной образование и аккумуляция осадка в загрузке ведет к росту потерь напора, компенсировать который удастся только до определенных пор. В дальнейшем, однако, скорость фильтрации начинает снижаться. Тем не менее

еще некоторое время выход фильтрата будет оставаться достаточно высоким, что оправдывает продолжение эксплуатации фильтра и при убывающей скорости v . Если же фильтровальная установка действует с заданными на подводящем и отводящем коллекторах фиксированными напорами, то снижение v наблюдается уже в начале фильтроцикла, а со временем может стать достаточно существенным. При этом нередко складывается ситуация, когда качество фильтрата остается высоким, а производительность фильтра (произведение скорости фильтрования на площадь загрузки) снижается настолько, что его работа оказывается экономически невыгодной. Поэтому второй критерий оценки эффективности фильтра выражается в виде одного из следующих условий:

$$v \geq v_*, \quad v_c \geq v_{c*}, \quad (3)$$

где v_* , v_{c*} – предельно допустимые соответственно текущая и средняя за расчетный период скорости фильтрования (удельные производительности фильтра). Выполнение критерия (3) гарантирует экономически целесообразную интенсивность разделения суспензии в течение всего фильтроцикла. Обосновывать же значения v_* , v_{c*} следует с привлечением стоимостных показателей.

Постановка математической задачи и ее решение. Как известно [12 – 14], массоперенос и массообмен при плоском фильтровании суспензии через однородную загрузку могут быть описаны в случае линейной кинетики и переменного расхода уравнениями

$$n_e \frac{\partial C}{\partial t} + v(t) \frac{\partial C}{\partial z} + \frac{\partial S}{\partial t} = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \alpha(v(t)) C - \beta(v(t)) S, \quad (5)$$

где C , S – объемные концентрации взвеси и осажденных частиц суспензии; n_e – эффективная пористость. Таким образом, уравнение (4) устанавливает баланс между конвективным переносом мелкодисперсного вещества и его отложением в порах фильтрующего материала, накоплением в жидкости-носителе. Уравнение же (5) характеризует динамику содержания иммобилизованной взвеси, которая контролируется процессами осаждения взвешенных и отрыва прилипших частиц суспензии и, кроме того, обусловлена действием молекулярных, гидродинамических сил.

Уравнение движения жидкости в постепенно сокращающемся поровом пространстве при линейной фильтрации имеет вид:

$$v(t) = -k(S) \frac{\partial h}{\partial z}. \quad (6)$$

Здесь h – пьезометрический напор, k – коэффициент фильтрации, характеризующий сопротивление движению жидкости со стороны заиляемого фильтрующего материала и связанный с количеством осадка обобщенной эмпирической зависимостью [15]

$$k = k_0 \left[1 - \left(\frac{S_d}{n_0} \right)^{m_1} \right]^{m_2}, \quad (7)$$

где k_0 , n_0 – коэффициент фильтрации и пористость чистого фильтрующего материала; m_1 , m_2 – эмпирические константы ($m_1 \leq 1$, $m_2 \geq 1$); S_d – объемная концентрация осадка. Следует подчеркнуть, что осадок имеет гелеподобную структуру [16] и включает в своем составе, наряду с частицами суспензии, прочно связанную жидкость, доля которой, как правило, существенно больше. Для замыкания задачи (4) – (7) необходимо установить однозначную связь между концентрациями S и S_d . В работах [17, 18] предлагается линейная зависимость между ними, поэтому

$$S_d = \gamma S. \quad (8)$$

В общем случае коэффициент γ является функцией от S , так как доля связанной воды в агрегатах осадка по мере его накопления увеличивается. Следует отметить, что далее γ будет считаться постоянной величиной и может трактоваться как среднее за расчетный период значение соответствующей переменной.

Направление фильтрации не является принципиальным для формализации и расчета удаления взвеси, за исключением особых случаев, когда возможно изменение структурных свойств загрузки, как, например, ее псевдооживление при интенсивном восходящем потоке ($v > 5$ м/ч), и поэтому не оговаривается. Для входного сечения принимается нулевая отметка ($z = 0$). Вертикальная ось направлена в сторону течения жидкости и поэтому при высоте загрузки L выходное сечение имеет отметку L ($z = L$).

На входе в загрузку задается постоянная величина искомой концентрации взвеси:

$$z = 0, \quad C = C_0. \quad (9)$$

Если же исходная объемная концентрация примеси меняется со временем, то в расчетах достаточно взять ее среднее значение. Однородные условия для концентраций C , S должны приниматься на движущемся фронте загрязнения, тогда они приобретут вид [11, 19]:

$$\tau(z, t) = \int_0^t V(\lambda) d\lambda - n_e z = 0, \quad C = S = 0. \quad (10)$$

Кстати, часто принимаемые начальные однородные условия ($t = 0$) существования указанного фронта не учитывают, что, впрочем, практически не сказывается на точности долгосрочных прогнозов фильтрации. Если потери напора в подводящих и отводящих коммуникациях малосущественные, то на входе в фильтр и на выходе из него допустимо задавать постоянные напоры H_u , H_d , а значит, и потери напора в загрузке будут неизменными:

$$z = 0, \quad h = H_u; \quad z = L, \quad h = H_d. \quad (11)$$

Согласно (10) использование вместо времени t переменной τ дает возможность несколько упростить систему уравнений (4), (5). С учетом (1) ее можно записать как

$$\frac{\partial C}{\partial z} + \frac{\partial S}{\partial \tau} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial \tau} = \alpha_v v^{r-1} C - \beta_v v^{q-1} S. \quad (12)$$

Далее в постановку задачи вводим безразмерные переменные и параметры:

$$\bar{C} = \frac{C}{C_0}, \quad \bar{S} = \frac{S}{n_0 C_0}, \quad \bar{t} = \frac{v^0 t}{n_0 L}, \quad \bar{z} = \frac{z}{L}, \quad \tilde{h} = \frac{h - H_d}{H_u - H_d}, \quad \bar{v} = \frac{v}{v^0}, \quad \bar{k} = \frac{k}{k_0},$$

$$\bar{\alpha} = \alpha_v L v^{0r-1}, \quad \bar{\beta} = \beta_v n_0 L v^{0q-1}, \quad \bar{v}_c = \frac{v_c}{v^0}, \quad \bar{n}_e = \frac{n_e}{n_0},$$

где v^0 – начальная скорость фильтрования, которую можно выразить через другие параметры задачи:

$$v^0 = k_0 \frac{H_u - H_d}{L},$$

а значение k_0 можно вычислить, например, по формуле Козени-Кармана. Тогда исходную задачу (4) – (11) запишем в виде

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial \bar{S}}{\partial \bar{\tau}} = 0, \quad (13)$$

$$\frac{\partial \bar{S}}{\partial \bar{\tau}} = \bar{\alpha} \bar{v}^{r-1} \bar{C} - \bar{\beta} \bar{v}^{q-1} \bar{S}, \quad (14)$$

$$\bar{v} = -\bar{k}(\bar{S}) \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \bar{z}}, \quad (15)$$

$$\bar{k} = \left[1 - (\gamma C_0 \bar{S})^{m_1} \right]^{m_2}, \quad (16)$$

$$\bar{z} = 0, \quad \bar{C} = 1; \quad \bar{\tau} = 0, \quad \bar{C} = \bar{S} = 0, \quad (17)$$

$$\bar{z} = 0, \quad \tilde{h} = 1; \quad \bar{z} = 1, \quad \tilde{h} = 0. \quad (18)$$

Для получения приближенного решения задачи (14) – (18) (построить строгое решение задачи ввиду ее большой сложности не представляется возможным) переменную скорость \bar{v} предварительно осредняли в пределах расчетного периода $[0, \bar{T}]$. В результате

$$\bar{v}_c = \frac{1}{\bar{T}} \int_0^{\bar{T}} \bar{v}(\bar{t}) d\bar{t}. \quad (19)$$

Данный параметр можно трактовать как среднюю за расчетный период гидравлическую нагрузку. Благодаря плавности и почти линейному ха-

рактору изменения во времени основных физико-химических характеристик подобное осреднение позволило найти близкое к точному приближенное решение. Детально выкладки и его обоснование изложены в работе [13]. Процедура осреднения \bar{v} распространялась и на коэффициенты $\bar{\alpha}(\bar{v})$, $\bar{\beta}(\bar{v})$ [13]. Поэтому уравнения (13), (14) можно записать в виде:

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial \bar{S}}{\partial \bar{\tau}_c} = 0, \quad \frac{\partial \bar{S}}{\partial \bar{\tau}_c} = \bar{\alpha} \bar{v}_c^{r-1} \bar{C} - \bar{\beta} \bar{v}_c^{q-1} \bar{S}, \quad (20)$$

где $\bar{\tau}_c = \bar{v}_c \bar{t} - \bar{n}_c \bar{z}$.

Строгое решение уравнений (20) при постоянных коэффициентах и условиях (17) найдено ввиду линейности трансформированной задачи с помощью интегрального преобразования Лапласа и описывается зависимостями [13]

$$\begin{aligned} \bar{C}(\bar{z}, \bar{\tau}_c) = & e^{-\bar{\alpha} \bar{v}_c^{r-1} \bar{z}} \left[e^{-\bar{\beta} \bar{v}_c^{q-1} \bar{\tau}_c} I_0 \left(2 \sqrt{\bar{\alpha} \bar{\beta} \bar{v}_c^{r+q-2} \bar{z} \bar{\tau}_c} \right) + \right. \\ & \left. + \bar{\beta} \bar{v}_c^{q-1} \int_0^{\bar{\tau}_c} e^{-\bar{\beta} \bar{v}_c^{q-1} \lambda} I_0 \left(2 \sqrt{\bar{\alpha} \bar{\beta} \bar{v}_c^{r+q-2} \bar{z} \lambda} \right) d\lambda \right], \end{aligned} \quad (21)$$

$$\bar{S}(\bar{z}, \bar{\tau}_c) = \bar{\alpha} \bar{v}_c^{r-1} e^{-\bar{\alpha} \bar{v}_c^{r-1} \bar{z}} \int_0^{\bar{\tau}_c} e^{-\bar{\beta} \bar{v}_c^{q-1} \lambda} I_0 \left(2 \sqrt{\bar{\alpha} \bar{\beta} \bar{v}_c^{r+q-2} \bar{z} \lambda} \right) d\lambda, \quad (22)$$

где $I_0(x)$ – функция Бесселя мнимого аргумента первого рода нулевого порядка. Из формул (21), (22) вытекают важные следствия, а именно: рост содержания взвеси в фильтрате и накопление осадка во входном сечении при $\bar{t} \gg 1$ происходят следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{C}_e(\bar{t}, \bar{v}_c) = \bar{C}(0, \bar{t}, \bar{v}_c) = & e^{-\bar{\alpha} \bar{v}_c^{r-1}} \left[e^{-\bar{\beta} \bar{v}_c^{q-1} \bar{t}} I_0 \left(2 \sqrt{\bar{\alpha} \bar{\beta} \bar{v}_c^{r+q-1} \bar{t}} \right) + \right. \\ & \left. \bar{\beta} \bar{v}_c^{q-1} \int_0^{\bar{v}_c \bar{t}} e^{-\bar{\beta} \bar{v}_c^{q-1} \lambda} I_0 \left(2 \sqrt{\bar{\alpha} \bar{\beta} \bar{v}_c^{r+q-2} \lambda} \right) d\lambda \right], \end{aligned} \quad (23)$$

$$\bar{S}_0(\bar{t}, \bar{v}_c) = \bar{S}(0, \bar{t}, \bar{v}_c) = \frac{\bar{\alpha}}{\beta} \bar{v}_c^{r-q} (1 - e^{-\beta \bar{v}_c^q \bar{t}}). \quad (24)$$

Однако для использования формул (21) – (24) в конкретных расчетах необходимо определить пока неизвестный параметр \bar{v}_c .

Для установления связи между \bar{v}_c и \bar{t} уравнение (15) интегрируется в пределах от 0 до \bar{z} , и тогда, с учетом условия (18), при $\bar{z} = 1$ приведенный напор можно записать как

$$\tilde{h}(\bar{z}, \bar{t}, \bar{v}_c) = \bar{V} \int_{\bar{z}}^1 \frac{d\eta}{\bar{k}(\bar{S}(\eta, \bar{t}; \bar{v}_c))}. \quad (25)$$

Используя условие (18) при $\bar{z} = 0$, находим выражение для скорости фильтрования

$$\bar{v}(\bar{t}, \bar{v}_c) = \left(\int_0^1 \frac{d\eta}{\bar{k}(\bar{S}(\eta, \bar{t}; \bar{v}_c))} \right)^{-1}. \quad (26)$$

И, наконец, путем осреднения обеих частей равенства (26) в соответствии с (19) окончательно запишем следующее уравнение относительно \bar{v}_c :

$$\int_0^{\bar{t}} \left(\int_0^1 \frac{d\bar{z}}{\bar{k}(\bar{S}(\bar{z}, \xi; \bar{v}_c))} \right)^{-1} d\xi - \bar{v}_c \bar{t} = 0. \quad (27)$$

Фактически здесь имеет место представление функции $\bar{v}_c(\bar{t})$ в неявной форме. Ее значения легко найти подбором с помощью широко известных пакетов программ математического анализа (Mathcad, Matlab и др.)

Итак, построенное приближенное решение выражается зависимостями (21) – (27) и дает возможность проводить разнообразный теоретический анализ. Чтобы еще раз убедиться в его высокой точности, выполнено сопоставление с известным строгим решением [11] на типичных примерах. Последнее решение является частным, так как найдено только для $r = q = 1$. Согласно ему относительные концентрации при $\bar{t} \gg 1$ имеют вид:

$$\bar{C}(\bar{z}, W) = e^{-\bar{\alpha}\bar{z}} \left[e^{-\bar{\beta}W} I_0(2\sqrt{\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{z}W}) + \bar{\beta} \int_0^W e^{-\bar{\beta}\lambda} I_0(2\sqrt{\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{z}\lambda}) d\lambda \right], \quad (28)$$

$$\bar{S}(\bar{z}, W) = \bar{\alpha} e^{-\bar{\alpha}\bar{z}} \int_0^W e^{-\bar{\beta}\lambda} I_0(2\sqrt{\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{z}\lambda}) d\lambda, \quad (29)$$

где $W(\bar{t}) = \int_0^{\bar{t}} \bar{v}(\xi) d\xi$. Время же поступления на единицу поверхности загрузки объема суспензии W составит:

$$\bar{t} = \int_0^W \int_0^1 \frac{d\bar{z}}{\bar{k}(\bar{S}(\bar{z}, \xi))} d\xi. \quad (30)$$

Формула для расчета $\bar{v}(\bar{t})$ в данной ситуации совпадает с (26).

Представленное приближенное решение позволяет надежно обосновывать важнейшие технологические, конструктивные параметры и, в первую очередь, длительность фильтроцикла \bar{t}_f . В последнем случае необходимо, опираясь на критерии (1), (2), вычислить по соответствующим формулам относительные характерные времена \bar{t}_p , \bar{t}_v . Для определения \bar{t}_v следует задаться, например, минимально допустимой средней скоростью фильтрования \bar{v}_{c*} и решить элементарным подбором уравнение

$$\int_0^{\bar{t}_v} \left(\int_0^1 \frac{d\bar{z}}{\bar{k}(\bar{S}(\bar{z}, \bar{t}_v; \bar{v}_{c*}))} \right)^{-1} d\xi - \bar{v}_{c*} \bar{t}_v = 0. \quad (31)$$

Сложнее рассчитывать время \bar{t}_p , поскольку неизвестна скорость \bar{v}_{cp} ($\bar{v}_{cp} = \bar{v}_c(\bar{t}_p)$) и приходится одновременно находить \bar{t}_p , \bar{v}_{cp} , решая совместно уравнения

$$\begin{aligned} \bar{C}_e e^{\bar{\alpha} \bar{v}_{cp}^{-1}} &= e^{-\bar{\beta} \bar{v}_{cp}^{q-1} \bar{t}_p} I_0 \left(2 \sqrt{\bar{\alpha} \bar{\beta} \bar{v}_{cp}^{r+q-2} \bar{t}_p} \right) + \\ \bar{\beta} \bar{v}_{cp}^{q-1} \int_0^{\bar{v}_{cp} \bar{t}_p} & e^{-\bar{\beta} \bar{v}_{cp}^{q-1} \lambda} I_0 \left(2 \sqrt{\bar{\alpha} \bar{\beta} \bar{v}_{cp}^{r+q-2} \lambda} \right) d\lambda, \end{aligned} \quad (32)$$

$$\int_0^{\bar{t}_p} \left(\int_0^1 \frac{d\bar{z}}{\bar{k}(\bar{z}, \bar{t}_p; \bar{v}_{cp})} \right)^{-1} - \bar{v}_{cp} \bar{t}_p = 0. \quad (33)$$

Для этого рекомендуется на базе этих уравнений построить два графика зависимости между \bar{v}_{cp} и \bar{t}_p . Координаты точки их пересечения и дадут искомую пару значений. Относительную же продолжительность фильтроцикла при убывающей скорости фильтрования суспензии следует определять как минимальное из времен \bar{t}_p , \bar{t}_v , т.е.

$$\bar{t}_f = \min(\bar{t}_p, \bar{t}_v). \quad (34)$$

Обсуждение результатов расчетов. В первую очередь была проверена правомочность применения приема осреднения скорости фильтрования суспензии, благодаря которому выведены все расчетные формулы и уравнения. Выбраны типичные для условий работы современных фильтровальных установок значения коэффициентов $\bar{\alpha}$ (4; 6; 8), $\bar{\beta}$ (0,005) и исходная концентрация взвеси ($C_0 = 10^{-5}$). Также во всех примерах для коэффициента γ принимали единственное характерное значение, равное 20. Предметом расчетов по точным и приближенным формулам стало изменение со временем выходной объемной концентрации \bar{C}_e . На рис.1 показаны кривые $\bar{C}_e(\bar{t})$, рассчитанные по (23) и (28). Минимальное расхождение между точными и приближенными кривыми наблюдалось лишь в конце расчетного периода. В целом же указанные кривые при одних и тех же значениях $\bar{\alpha}$ располагались настолько близко друг к другу, что почти сливались. Более детальное сопоставление приближенного и точного частного решений проведено в [13]. В результате есть все основания утверждать, что предлагаемые для инженерных расчетов формулы позволяют находить характеристики фильтрования в реальных диапазонах их изменения с наибольшей точностью.

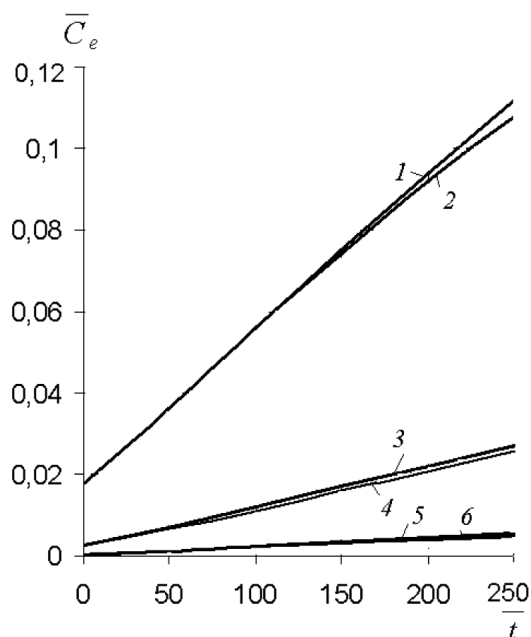


Рис. 1. Изменение относительной выходной объемной концентрации взвеси \bar{C}_e со временем \bar{t} : 1, 3, 5 – приближенное; 2, 4, 6 – точное решения. 1, 2 – $\bar{\alpha} = 4$; 3, 4 – $\bar{\alpha} = 6$; 5, 6 – $\bar{\alpha} = 8$.

С целью иллюстрации значительных возможностей приближенного решения при прогнозировании развития физико-механической обстановки в загрузке и обосновании рациональных технологических, а также конструктивных параметров выполнен обстоятельный количественный анализ. При этом основное внимание было уделено оценке значимости адгезионного процесса, характеризуемого параметрами α , r . Предметом расчетов стали концентрации взвешенных и осажденных частиц, текущая и средняя скорости фильтрования, времена защитного действия загрузки и допустимого снижения производительности фильтра. В многочисленных примерах, за исключением исходной концентрации взвеси C_0 , использовали относительные величины, что способствовало большей общности результатов. Было принято единое значение $\bar{\beta}$ (0,005), а значение \bar{n}_e без сколько-нибудь заметного ущерба для точности вычислений при $\bar{t} \gg 1$ полагалось равным нулю. Остальные параметры менялись дискретно или непрерывно в широких пределах, что позволило охватить разнообразные ситуации, возникающие на фильтровальных сооружениях. Считалось, что связь между массообменными коэффициентами $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$ и скоростью \bar{v} имеет степенной характер (1). При этом

скорость мобилизации осажденных частиц была прямо пропорциональной v ($q = 1$). При выборе значений r в выражении для α (1) учитывали особенности реализации разных механизмов доставки взвешенных частиц к зернам или гранулам, а именно: перехват ($r = 7/8$), броуновская диффузия ($r = 1/3$) и седиментация ($r = -1/5$). Тем не менее выполненный анализ значимости механизмов носит скорее ориентировочный характер, поскольку их вклад в удаление примеси учтен лишь отчасти. В действительности, α_v , $\bar{\alpha}$ также связаны с r вследствие их зависимости от размеров частиц суспензии и масштаба v^{0r-1} . Поскольку для практики фильтрования первоочередное значение имеет время эффективной работы фильтра, то акцент был сделан на расчете характерных времен \bar{t}_p , \bar{t}_v и, в конечном итоге, относительной длительности фильтроцикла \bar{t}_f . Для их определения привлекались критерии (2), (3) и требовалось, во-первых, обеспечить снижение содержания примеси как минимум на порядок ($\bar{C}_{e*} = 0,1$), во-вторых, не допустить чрезмерного снижения (средней) производительности фильтра ($\bar{v}_{e*} = 0,9; 0,8$ и $0,7$).

В первой серии примеров исходная концентрация взвеси была неизменной ($C_0 = 2,5 \cdot 10^{-5}$). Изучали влияние на качество осветления суспензии вышеупомянутых механизмов ($r = 7/8; 1/3; -1/5$) сорбционных свойств фильтрующего материала ($\bar{\alpha} = 4; 6; 8$). Кривые роста выходной концентрации \bar{C}_e со временем рассчитывали по (23), (27) и представлены на рис.2. Наибольшую чувствительность концентрация \bar{C}_e проявляет по отношению к коэффициенту $\bar{\alpha}$. Так, при $\bar{\alpha} = 4$ наблюдается значительный проскок взвеси через загрузку (кривая 1), и при $\bar{t} = 400$ (32 ч непрерывной работы фильтра при $n_0 = 0,4$, $L = 1$ м, $v^0 = 5$ м/ч) \bar{C}_e достигает значения $0,134$, так что при $\bar{C}_{e*} < 0,134$ промывать ее следует раньше (при $\bar{C}_{e*} = 0,1$ $\bar{t}_p \approx 265$). С увеличением $\bar{\alpha}$ до 6 количество частиц в фильтрате резко сокращается. Теперь максимальное значение \bar{C}_e при $r = 1/3$ составляет всего $0,026$, и если не предъявляются слишком жесткие требования к качеству водоочистки, то целесообразно продолжение работы фильтра при условии, конечно, что его производительность снизилась незначительно. Окончательное же принятие технологических решений должно опираться на данные параллельного расчета

переменных величин $\bar{C}_e(\bar{t})$ и \bar{v}_c (или $\bar{v}(\bar{t})$). Наконец, частицы суспензии на выходе из фильтра практически отсутствуют на протяжении всего расчетного периода при $\bar{\alpha} = 8$ (см. рис. 2, кривая 5). Менее существенными для осветлительного процесса являются способы доставки подвижных частиц к неподвижным (включая осадок), на что указывает небольшое расхождение кривых 2 – 4, которые получены при $\bar{\alpha} = 6$ и разных значениях r . Уменьшение r , означающее более медленное ослабление адгезии частиц к зернам со временем, способствует усилению выноса примеси из фильтра. С другой стороны, снижение скорости воды в порах загрузки ведет к продлению пребывания здесь взвешенных частиц и, следовательно, их более полному осаждению. Если преобладает второй фактор, то со временем качество фильтрата может даже улучшаться, что подтверждается кривой 5.

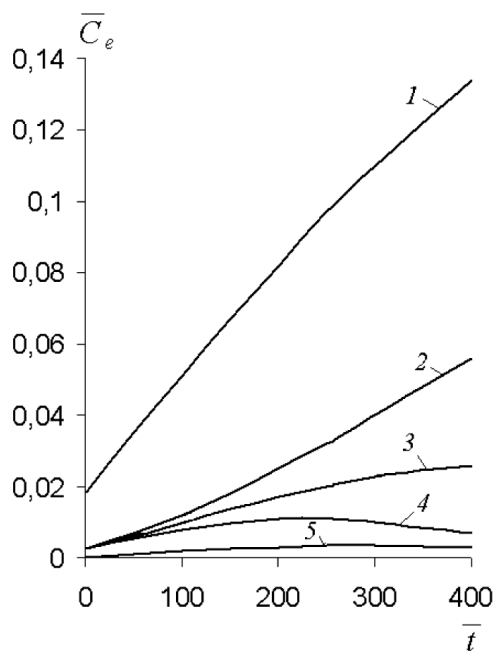


Рис. 2. Изменение относительной выходной объемной концентрации взвеси со временем: 1, 3, 5 – $r = 1/3$; 2 – $r = 7/8$; 4 – $r = -1/5$. 1 – $\bar{\alpha} = 4$; 2 – 4 – $\bar{\alpha} = 6$; 5 – $\bar{\alpha} = 8$.

Скорость осаждения взвеси и величина S_0 прежде всего зависят от сорбционной способности материала загрузки, что следует из приведенных на рис.3 результатов вычислений по выражениям (24), (27). Естественно, что наиболее высокая концентрация иммобилизованных частиц во вход-

ном сечении наблюдается при $\bar{\alpha} = 8$ (кривая 1), а наименьшая – при $\bar{\alpha} = 4$ (кривая 5). Разброс кривых, соответствующих разным значениям r , заметно меньше. Максимальное значение \bar{S}_0 в рассчитанных примерах составило 1542, что намного уступает предельному $4 \cdot 10^4$ (вычислено при $C_0 = 2,5 \cdot 10^{-5}$, $S_0 = n_0$ как $n_0 / (n_0 C_0)$). Таким образом, при $\gamma = 20$, согласно (8), безразмерная объемная концентрация осадка на входе в загрузку составит уже $\gamma \bar{S}_0 = 3,084 \cdot 10^4$. Однако реальная грязеемкость, которая в принятой модели в явном виде не присутствует, но в действительности ограничивает накопление осадка, обычно вдвое или около того меньше n_0 . Поэтому существует большая вероятность предельного насыщения осадком верхней части пористой толщ со временем и тогда в дальнейшем частицы будут проходить через нее транзитом, задерживаясь уже в нижней части (нисходящее фильтрование). Такую ситуацию данные рис. 3 не отражают, а математическая модель нуждается в серьезной корректировке.

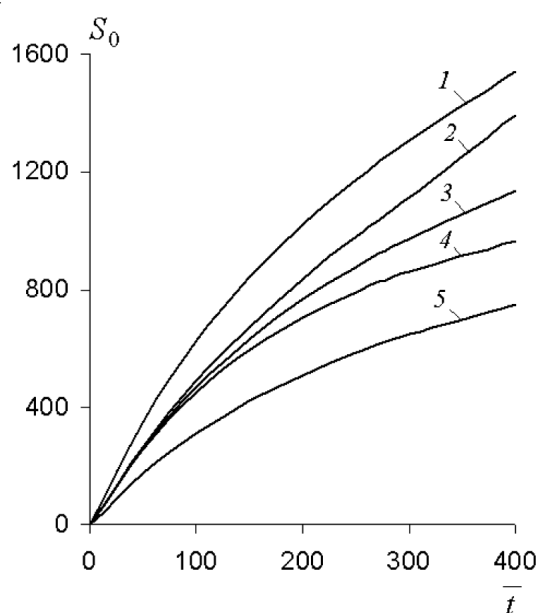


Рис. 3. Изменение относительной объемной концентрации осадка (S_0) во входном сечении загрузки: 1, 3, 5 – $r = 1/3$; 2 – $r = -1/5$; 4 – $r = 7/8$. 1 – $\bar{\alpha} = 8$; 2 – 4 – $\bar{\alpha} = 6$; 5 – $\bar{\alpha} = 4$.

В связи с привлечением для оценки действия фильтра в режиме переменного расхода специального критерия, вводящего ограничения на производительность (3), большое значение приобретает определение

динамики средней и текущей скоростей фильтрования. Имея соответствующие кривые $\bar{v}_c(\bar{t})$, $\bar{v}(\bar{t})$, сравнительно легко найти относительные времена \bar{t}_{cv} , \bar{t}_v , за которые эти скорости снизятся до экономически обоснованных минимально допустимых значений \bar{v}_{c*} , \bar{v}_* .

На рис.4 показано убывание функционального параметра \bar{v}_c со временем. Расчеты \bar{v}_c выполняли при тех же значениях r , $\bar{\alpha}$, что и \bar{C}_e . По истечении определенного времени решать вопрос о продолжении (или прекращении) работы фильтра целесообразно, опираясь на анализ кривых $\bar{C}_e(\bar{t})$ и $\bar{v}_c(\bar{t})$ (или $\bar{v}(\bar{t})$) с привлечением их предельно допустимых значений \bar{C}_{e*} и \bar{v}_{c*} (или \bar{v}_*).

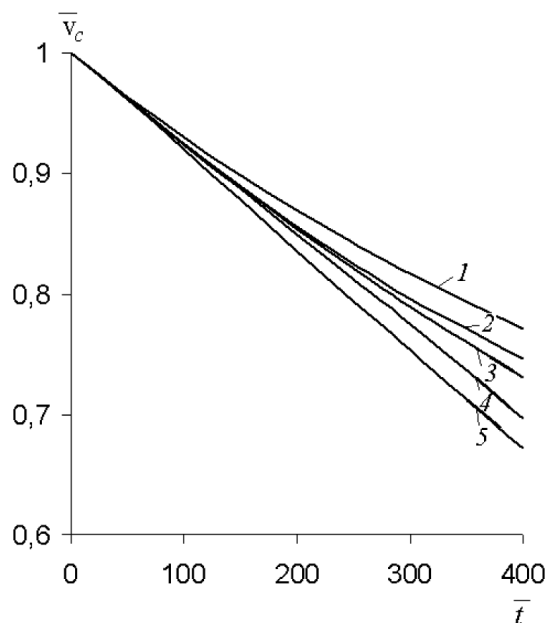


Рис. 4. Изменение относительной средней скорости фильтрования суспензии (\bar{v}_c) со временем: 1, 3, 5 – $r = 1/3$; 2 – $r = 7/8$; 4 – $r = -1/5$. 1 – $\bar{\alpha} = 4$; 2 – $\bar{\alpha} = 6$; 5 – $\bar{\alpha} = 8$.

Если воспользоваться для наглядности данными рис. 2 и 4 (или рис. 5 с данными расчетов текущей скорости фильтрования) и выбрать пример $\bar{\alpha} = 4$, то ему соответствуют кривые 1, показанные на этих рисунках. Благодаря более равномерному распределению по высоте меньшего количества осадка снижение средней и текущей производительности

фильтра в такой ситуации происходит заметно медленнее, чем в других примерах. Поэтому даже при $\bar{C}_{e*} = 0,1$ на момент $\bar{t}_p = 265$ сохраняются довольно высокие скорости \bar{v}_c (0,833) и \bar{v} (0,672). При ужесточении требований к качеству фильтрата ($\bar{C}_{e*} = 0,05$) промывку фильтра придется проводить намного раньше ($\bar{t}_p = 100$), хотя значения средней и текущей производительности снижаются соответственно всего на 7 и 14%. Иная картина наблюдается при значении $\bar{\alpha} = 8$, которому соответствуют кривые 5 на рис. 2, 4, 5. Здесь качество водоочистки вообще перестает лимитировать работу фильтра. В то же время происходит резкое снижение его производительности, и определять время начала промывки следует только исходя из кривых $\bar{v}_c(\bar{t})$ или $\bar{v}(\bar{t})$ и значений \bar{v}_{c*} или \bar{v}_* .

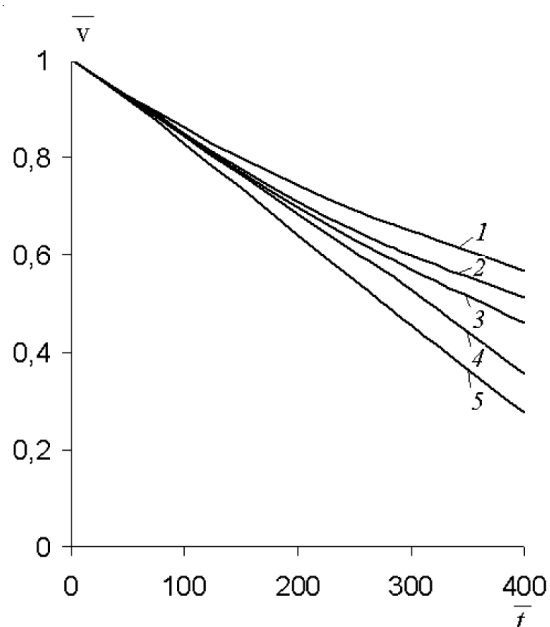


Рис. 5. Изменение относительной скорости фильтрации суспензии (\bar{v}) со временем: 1, 3, 5 — $r = 1/3$; 2 — $r = 7/8$; 4 — $r = -1/5$. 1 — $\bar{\alpha} = 4$; 2 — 4 — $\bar{\alpha} = 6$; 5 — $\bar{\alpha} = 8$.

Таким образом, здесь, как и в других типичных случаях, решающее значение для получения от фильтровальной установки максимальной отдачи при убывающей скорости v приобретает время \bar{t}_v . Поэтому далее были рассмотрены особенности его изменения при варьировании сорбционных свойств загрузки и исходного содержания взвеси.

На рис. 6 показан возможный характер сокращения времени \bar{t}_v при непрерывном повышении адгезионной способности фильтрационного материала от слабой ($\bar{\alpha} = 2$) до сильной ($\bar{\alpha} = 10$) и разных механизмах доставки подвижных частиц к зернам ($r = 7/8; 1/3; -1/5$). Рассчитывали \bar{t}_v при $C_0 = 2,5 \cdot 10^{-5}$ и трех предельных значениях \bar{v}_{c*} (0,9; 0,8; 0,7) на базе уравнения (31) с учетом (22).

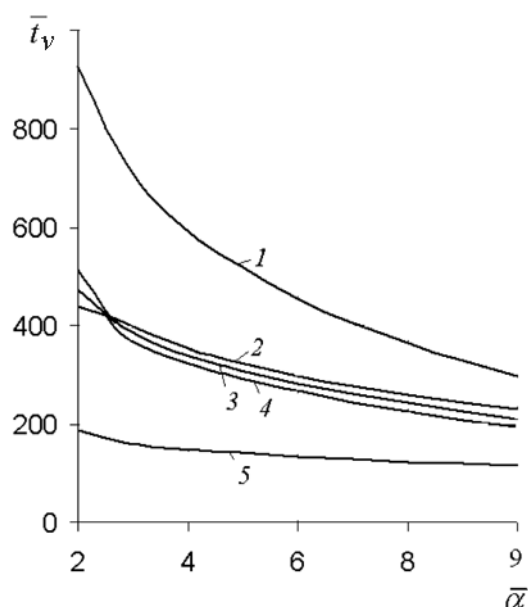


Рис. 6. Зависимость \bar{t}_v от $\bar{\alpha}$: 1, 4, 5 – $r = 1/3$; 2 – $r = 7/8$; 3 – $r = -1/5$.
1 – $\bar{v}_{c*} = 0,7$; 2 – 4 – $\bar{v}_{c*} = 0,8$; 5 – $\bar{v}_{c*} = 0,9$.

Большие значения \bar{t}_v при $\bar{\alpha} = 22,5$ объясняются значительным проскоком частиц, начиная уже с момента достижения загрязнением выходного сечения загрузки, и активным участием в осветлительном процессе также ее дальнего участка. Влияние r на \bar{t}_v в принятом широком диапазоне значений $\bar{\alpha}$ проявляется по-разному. При снижении \bar{v}_{c*} время \bar{t}_v резко возрастает. Также это время связано с концентрацией C_0 , о чем свидетельствуют данные рис.7. Расчеты кривых $\bar{t}_v(C_0)$ выполняли при $r = 1/3$ по тем же формулам, но уже для двух значений $\bar{\alpha}$ и \bar{v}_{c*} . Снижение C_0 до $2 \cdot 10^{-5}$ и ниже ведет к ускоренному росту \bar{t}_v .

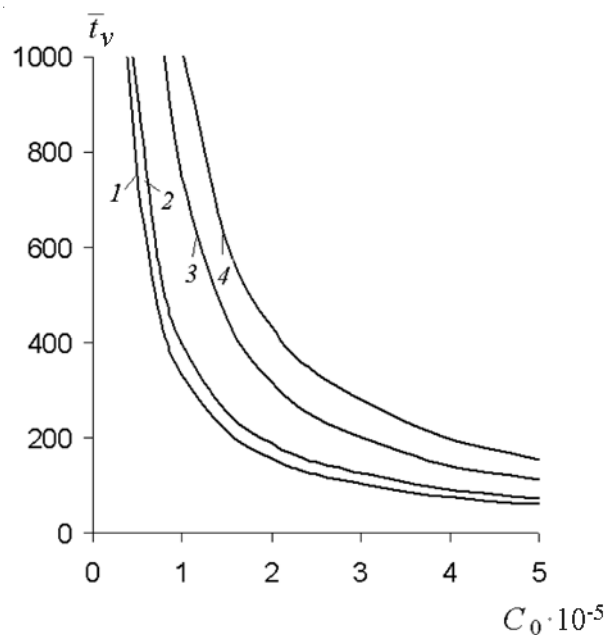


Рис. 7. Зависимость \bar{t}_v от C_0 : 1, 3 – $\bar{\alpha} = 8$; 2, 4 – $\bar{\alpha} = 4$. 1, 2 – $\bar{v}_{c^*} = 0,9$; 3, 4 – $\bar{v}_{c^*} = 0,8$.

Малое осаждение взвеси при $C_0 < 10^{-5}$ обуславливает очень медленное ухудшение проницаемости загрязняемой среды и, как следствие, длительное снижение производительности до минимально допустимого уровня. И здесь уместно подчеркнуть, что, в отличие от режима с $v = \text{const}$, результаты расчетов всех характеристик, включая и обе концентрации, при фильтрации с убывающей скоростью во многом зависят от характера уменьшения коэффициента k по мере заиления загрузки. В нашей работе использован один частный случай зависимости (16) ($m_1 = 1, m_2 = 3$), который чаще других реализуется в гидравлических исследованиях фильтрации.

При определении длительности фильтроцикла t_f , согласно (34), необходимо знать времена t_p, t_v , меньшее из которых и отождествляется с t_f . Соотношение между относительными величинами \bar{t}_p, \bar{t}_v зависит от модельных параметров, особенно от $\bar{\alpha}, C_0$. Поэтому специально были выполнены две серии расчетов примеров с целью выявления специфики влияния указанных параметров на безразмерную длительность \bar{t}_f . Параллельно рассчитывали \bar{t}_p, \bar{t}_v , основываясь на уравнениях (32), (33) и (31), соответственно с использованием типичных относительных значе-

ний критериальных параметров \bar{C}_{e*} (0,05), \bar{v}_{c*} (0,9; 0,8; 0,7). На рис. 8 показана взаимосвязь между \bar{t}_f и $\bar{\alpha}$ для $r = 1/3$ и $7/8$, а также $C_0 = 2,5 \cdot 10^{-5}$. Кроме того, на нем вплоть до значения $\bar{t}_p = 800$ показана зависимость \bar{t}_p от $\bar{\alpha}$ (кривые 1, 2).

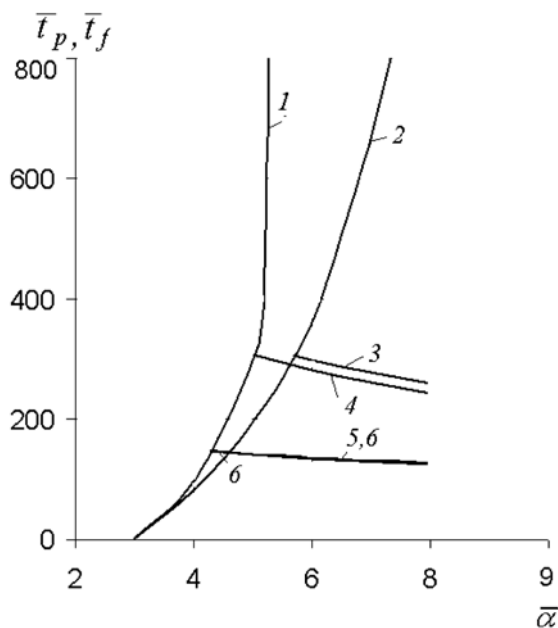


Рис. 8. Зависимость \bar{t}_f, \bar{t}_p от $\bar{\alpha}$: 1, 2 – \bar{t}_p ; 1 и 4, 1 и 6, 2 и 3, 2 и 5 – \bar{t}_f .
1, 3, 5 – $r = 1/3$; 2, 4, 6 – $r = 7/8$. 3, 4 – $\bar{v}_{c*} = 0,8$; 5, 6 – $\bar{v}_{c*} = 0,9$.

Сравнивая указанные кривые с соответствующими кривыми $\bar{t}_f(\bar{\alpha})$ (каждая из них состоит из двух участков – фрагмента кривой $\bar{t}_p(\bar{\alpha})$ и участка кривой $\bar{t}_v(\bar{\alpha})$), можно сделать вывод о возможной серьезной ошибке в искомой продолжительности рабочего периода фильтра из-за неоправданного игнорирования второго критерия (3). Начинаются кривые $\bar{t}_p(\bar{\alpha})$ в единой точке с абсциссой $\bar{\alpha} = 3$. При этом $\bar{t}_p = 1$, т.е. выходная концентрация взвеси имеет предельно допустимое значение сразу после прохождения фронтом загрязнения загрузки. С усилением сорбционной способности фильтрующего материала время \bar{t}_p быстро растет, причем при $r = 1/3$ кривая 1 (см. рис. 8) имеет вертикальную асимптоту ($\bar{\alpha} \approx 5,3$).

Следовательно, при $\bar{\alpha} \geq 5,3$ установленный санитарный норматив ($\bar{C}_{e^*} = 0,05$) вследствие убывания скорости \bar{v} и замедленного уменьшения $\bar{\alpha}$ со временем вообще не достигается. Кривые $\bar{t}_v(\bar{\alpha})$, в отличие от $\bar{t}_p(\bar{\alpha})$, имеют малый отрицательный уклон, а уравниваются \bar{t}_p и \bar{t}_v в единственной для каждого примера точке пересечения указанных кривых, где \bar{t}_f и будет максимальным. Однако поскольку такой оптимум в любом конкретном случае наблюдается при строго определенных $\bar{\alpha}$, C_0 , то подобную ситуацию следует рассматривать как исключительную и практически недостижимую. Обычно же при реальных значениях $\bar{\alpha}$, C_0 будет выполняться или условие $\bar{t}_p > \bar{t}_v$, или $\bar{t}_p < \bar{t}_v$. Значит \bar{t}_f меньше максимального (при оптимальном сочетании $\bar{\alpha}$ и C_0). Вместе с тем уменьшение \bar{t}_f при $\bar{\alpha} > 5$ незначительное и выбор $\bar{\alpha}$ в таких пределах несущественно сказывается на \bar{t}_f . Сходную форму, но, по сути, иной характер имеют графики зависимости \bar{t}_f от C_0 , рассчитанные при $r = 7/8$; $\bar{\alpha} = 4; 6$; $\bar{v}_{e^*} = 0,8; 0,9$ (рис. 9).

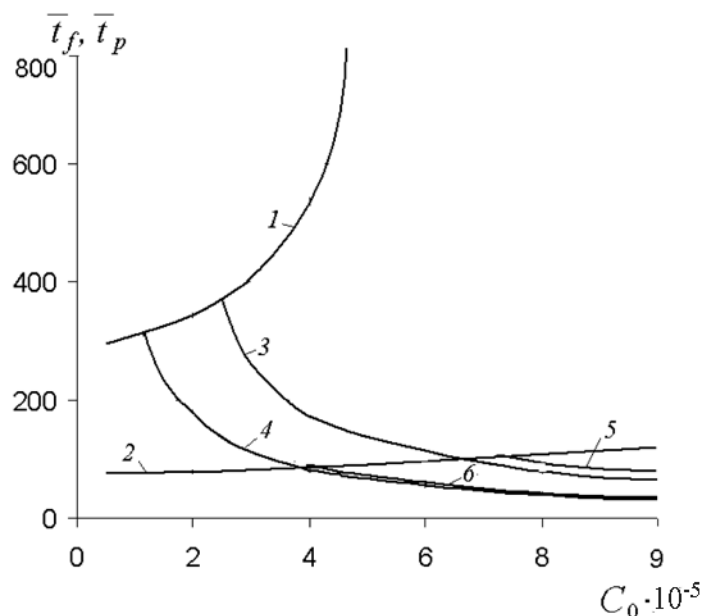


Рис. 9. Зависимость \bar{t}_f , \bar{t}_p от C_0 : 1, 2 — \bar{t}_p ; 1 и 3, 1 и 4, 2 и 5, 2 и 6 — \bar{t}_f . 2, 5, 6 — $\bar{\alpha} = 4$; 1, 3, 4 — $\bar{\alpha} = 6$. 3, 5 — $\bar{v}_{e^*} = 0,8$; 4, 6 — $\bar{v}_{e^*} = 0,9$.

Здесь существенно различается поведение уже кривых $\bar{t}_p(C_0)$ для обоих значений $\bar{\alpha}$. Во-первых, при умеренной способности пористой среды задерживать взвесь ее защитное действие ослаблено, что выражается в относительной малости \bar{t}_p . Во-вторых, это время с ростом C_0 увеличивается медленно в связи с существенным выносом частиц из фильтра (см. рис.9, кривая 2). Иная картина имеет место в случае хорошо сорбирующего фильтрующего материала. Тогда из-за значительной неравномерности накопления осадка по высоте скорость фильтрования быстро снижается, что ведет к продлению пребывания частиц суспензии в порах. Тем самым существенно возрастает вероятность их иммобилизации. По этой же причине с повышением C_0 резко увеличивается время \bar{t}_p (кривая 1) и сокращается \bar{t}_f (кривые 3, 4). В итоге длительность фильтроцикла при $\bar{\alpha} = 4$ оказывается не очень чувствительной к концентрации C_0 и совершенно иначе она реагирует на ее изменение при $\bar{\alpha} = 6$.

В заключение приведен пример расчета длительности фильтроцикла при фиксированном перепаде напоров на границах загрузки для конкретных условий фильтрования, характеризуемых следующим набором значений модельных и технологических параметров: $\alpha_v = 17,5 \text{ ч}^{-1}$, $\beta_v = 0,01 \text{ ч}^{-1}$, $r = 1/3$ (мелкодисперсная взвесь с диаметром частиц порядка 10^{-6} м), $q = 1$, $v^0 = 5 \text{ м/ч}$, $L = 1 \text{ м}$, $n_0 = 0,4$, $\gamma = 15$, $m_1 = 1$, $m_2 = 3$, $C_0 = 2,5 \cdot 10^{-5}$, $v_{c*} = 3,75 \text{ м/ч}$ (допускается снижение скорости фильтрования примерно вдвое), $C_{e*1} = 2,5 \cdot 10^{-6}$, $C_{e*2} = 10^{-6}$ (удовлетворительное и высокое качество водоочистки).

Относительные характерные времена \bar{t}_v , \bar{t}_p были определены с помощью одного из стандартных пакетов программ математического анализа. Предварительно вычислены безразмерные параметры: $\bar{\alpha} = 6$, $\bar{\beta} = 0,004$, $\bar{v}_{c*} = 0,75$, $\bar{C}_{e*1} = 0,04$, $\bar{C}_{e*2} = 0,04$. Согласно (16) время находили из уравнения (31) с учетом $\bar{k}(\bar{S})$ и следующего выражения для концентрации:

$$\bar{S}(\bar{z}, \bar{t}; \bar{v}_c) = \bar{\alpha} \bar{v}_c^{-\frac{2}{3}} e^{-\bar{\alpha} \bar{v}_c^{-\frac{2}{3}} \bar{z}} \int_0^{\bar{v}_c \bar{t}} e^{-\bar{\beta} \lambda} I_0 \left(2 \sqrt{\bar{\alpha} \bar{\beta} \bar{v}_c^{-\frac{2}{3}} \bar{z} \lambda} \right) d \lambda.$$

Установлено, что указанному уравнению удовлетворяет значение $\bar{t}_v = 547,9$, которому, в свою очередь, соответствует размерное t_v , равное 21,9 ч. Далее, исходя из формулы (23) при $\bar{v}_c = \bar{v}_{c*} = 0,75$, находили такие значения $\bar{t}_{c1}, \bar{t}_{c2}$, при которых \bar{C}_e равно \bar{C}_{e*1} или C_{e*2} . В результате $\bar{t} = 620$, $t_{c1} = 24,8$ ч, а $\bar{t}_{c2} = 440$, и, следовательно, $t_{c2} = 17,6$ ч. В первом случае $t_{c1} > t_v$, значит, производительность фильтровальной установки снизится до минимально допустимой прежде, чем защитная способность загрузки исчерпается. Поэтому $t_f = t_v = 21,9$ ч. Во втором случае уже $t_v > t_{c2}$, и искомая длительность контролируется критерием качества водоочистки. Тогда $\bar{t}_f = \bar{t}_p$, а значение \bar{t}_p и соответствующее ему значение \bar{v}_c можно найти путем решения системы уравнений (32), (33). В результате $\bar{t}_p = 352$, $\bar{v}_c = 0,823$, так что окончательно $t_f = 14,1$ ч.

Выводы. Режим фильтрования суспензии с убывающим расходом имеет ряд преимуществ по сравнению с режимом с постоянным расходом, которые предопределили его достаточно широкое применение на практике и хорошие перспективы на будущее. Однако ввиду существенных трудностей математического характера изучен он достаточно слабо.

В связи с постоянством потерь напора в загрузке (постоянный перепад напоров на ее границах) при определении длительности фильтроцикла необходимо исходить не только из защитной способности фильтрующей среды, но и из экономических соображений, в соответствии с которыми не допускается снижение производительности фильтра ниже определенного уровня.

Вследствие сложности математической задачи фильтрования суспензии с убывающей скоростью построено ее эффективное приближенное решение, которое прошло тщательную проверку путем сопоставления с частным точным. Вытекающие из него расчетные формулы и уравнения могут служить надежным инструментом для прогноза удаления взвеси из суспензии в указанном режиме ее осветления, обоснования конструктивных и технологических параметров.

Адгезионная способность загрузки, исходное содержание примеси оказывают существенное влияние на характерные времена – защитного действия загрузки и достижения минимально допустимой производительности фильтра. В результате длительность фильтроцикла меняется в зависимости от модельных параметров адгезии, начальной загрязненности в широких пределах. Формально можно указать такие значения этих

параметров, при которых длительность фильтроцикла становится максимальной.

Скорость фильтрования суспензии через хорошо сорбирующую загрузку при постоянном перепаде напоров на ее границах со временем быстро снижается, что обуславливает минимальный проскок частиц суспензии в течение продолжительного времени. В таких случаях длительность фильтроцикла, как правило, определяется гидравлическими факторами и должна устанавливаться с учетом экономических показателей.

Резюме. Представлено ефективний наближений розв'язок задачі фільтрування суспензії при заданих напорах на границях завантаження і лінійній кінетиці масообміну. Розроблено процедуру визначення тривалості фільтроциклу виходячи з двох критеріїв, які контролюють якість фільтрату і продуктивність фільтра. На багаточисленних прикладах з типовими вихідними даними виконано ґрунтовний аналіз впливу різних факторів на вказану тривалість.

V.L. Polyakov

SUSPENSION FILTRATION AT DECLINING RATE AND LINEAR MASS-EXCHANGE KINETICS

Summary

An effective approximate solution to the filtration task has been presented at constant head loss and linear mass-exchange kinetics. Procedure of calculating filter operation time has been developed coming from two criteria controlling filtrate quality and filter productivity. A detailed analysis has been performed of different factors effect on the operation time at numerous examples with typical initial data.

Список литературы

- [1] *Грабовский П.А., Ларкина Г.М.* // Химия и технология воды. – 1984. – 6, №6. – С. 546 – 551.
- [2] *Akgiray O., Saatci A.M.* // Water Res. –1998. – 32, N 7. – P. 2095 – 2105.
- [3] *Chaundry F.H.* // J. Environ. Eng. Div. ASCE. – 1987. – 113, №4. – P. 834 – 851.
- [4] *Cleasby J.L.* // Water Sci. and Technol. – 1993. – 27, №10. – P.151–164.
- [5] *Тугай А.М., Олійник О.Я., Тугай Я.А.* Продуктивність водозабірних свердловин в умовах кольматажу. – Харків: ХНАМГ, 2004. – 240 с.

- [6] *Алексеев В.С., Коммунар Г.М.* // Водные ресурсы .– 1974. – № 5. – С. 170 – 177.
- [7] *Сенявин М.М., Венецианов Е.В., Аюкаев Р.И.* // Там же. – 1977. – № 2. – С.157 – 170.
- [8] *Gross M.J., Albinger O., Jewett D.G. Logan B.E., Bales R.C., Arnold R.G.* // Water Res. – 1995. – **29**. – P. 1151 – 1158.
- [9] *McDowell L.M., Hunt J.R., Sitar N.* // Water Resour. Res. – 1986. – **22**. – P. 1901 – 1921.
- [10] *Rajagopalan R., Tien C.* // A.I.Ch.E. – 1976. – **22**. – P. 523 – 533.
- [11] *Поляков В.Л.* // Доп. НАН України. – 2005. – № 4. – С. 48 – 54.
- [12] *Грабовський П.О., Горобченко А.І.* // Наук. вісн. буд-ва. – Харків: ХДТУБА ХОТВ АБУ. – 2003. – Вип.22. – С. 132 – 136.
- [13] *Поляков В.Л.* // Доп. НАН України. – 2010. – № 5. – С. 57 – 63.
- [14] *Миңц Д.М.* Теоретические основы технологии очистки воды. – М.: Стройиздат, 1964. – 156 с.
- [15] *Венецианов Е.В., Рубинштейн Р.Н.* Динамика сорбции из жидких сред – М.: Наука, 1983. – 237 с.
- [16] *Бугай Н.Г., Кривоног А.И., Кривоног В.В.* // Прикл. гідромеханіка. – 2004. – **6 (78)**. – № 2. – С.27 – 43.
- [17] *Поляков В.Л.* // Химия и технология воды. – 2009. – **31**, № 6. – С. 605 – 618.
- [18] *Ojha C.S.P., Graham N.J.D.* // Water Res. – 1993. – **27**, N 3. – P. 377 – 387.
- [19] *Веригин Н.Н., Коммунар Г.М.* // Тр.ВНИИ "ВОДГЕО". – М., 1978. – Вып.74. – С. 120 – 124.