

УДК 520.16

В. Н. Слюсар, В. И. Жданов, А. Н. Александров, Е. В. Федорова

Астрономическая обсерватория Киевского национального университета
имени Тараса Шевченко
ул. Обсерваторная 3, Киев, 04053
zhdanov@observ.univ.kiev.ua; alex@observ.univ.kiev.ua;
efedorova@ukr.net; vitaliy.slyusar@gmail.com

**Статистика кривых блеска удаленного источника,
микролинзированного системой точечных
и протяженных масс**

Рассматривается гравитационное микролинзирование удаленного источника стохастической системой точечных масс-звезд и протяженных масс, моделирующих сгустки темной материи. Размер каждого сгустка выбирался равным 5 или 10 его радиусов Эйнштейна. Для каждого набора параметров (оптическая глубина микролинзирования, размеры сгустков) сгенерированы по 100 реализаций поля коэффициентов усиления в предположении о пространственно однородном распределении микролинз с солитеровским распределением по массам. На этой основе рассчитаны автокорреляционные функции кривых блеска для разного относительного вклада сгустков в общую оптическую плотность микролинзирования $\rho_{tot} = 0.3$. Показано, что зависимость автокорреляционных функций от оптической плотности сгустков имеет немонотонный характер.

СТАТИСТИКА КРИВИХ БЛИСКУ ВІДДАЛЕНОГО ДЖЕРЕЛА, МІКРОЛІНЗОВАНОГО СИСТЕМОЮ ТОЧКОВИХ ТА ПРОТЯЖНИХ МАС, Слюсар В. М., Жданов В. І., Александров О. М., Федоров О. В. — Розглянуто гравітаційне мікролінзування віддаленого джерела стохастичною системою точкових мас-зір і протяжних мас, що моделюють згустки темної матерії. Розміри кожного згустка вибиралися рівними 5 або 10 його радіусам Ейнштейна. Для кожного набору параметрів (оптична глибина мікролінзування, розмір згустка) згенеровано по 100 реалізацій поля коефіцієнтів підсилення, припускаючи просторово однорідний розподіл мікролінз з солітерівським розподілом за масами. На цій основі розраховано автокореляційні функції

кривих блиску для різного відносного внеску згустків у загальну оптичну глибину мікролінзування $\tau_{tot} = 0.3$. Показано, що залежність поведінки автокореляційних функцій від оптичної глибини згустків має немонотонний характер.

STATISTICS OF LIGHT CURVES OF A DISTANT SOURCE MICROLENSSED BY A SYSTEM OF POINT AND EXTENDED MASSES, by Sliusar V. M., Zhdanov V. I., Alexandrov A. N., Fedorova E. V. — We study the gravitational microlensing of a distant source microlensed by a stochastic system of point masses-stars and extended clumps modeling dark matter subhalos. The size of each clump is assumed to be 5 or 10 Einstein radii according to its mass. For each set of initial parameters (optical depth of microlensing, size of the clump) we generated 100 realizations of magnification patterns considering spatially homogeneous distribution of microlenses with the Salpeter mass function. On the basis of this we calculated autocorrelation functions of light curves for different relative contributions of clumps with total optical depth $\tau_{tot} = 0.3$. It is found that the dependence of the autocorrelation functions upon the optical depth of the clumps is non-monotonous.

ВВЕДЕНИЕ

Как известно [15, 24], в современную эпоху основной вклад в среднюю космологическую плотность дают темная энергия, представляемая космологической постоянной, и небарионная темная материя (ТМ); обычная барионная материя составляет лишь 4.5 %. Однако микроструктура ТМ до настоящего времени неизвестна; в литературных источниках рассматривается большое множество элементарных частиц, которые могут претендовать на роль составляющих ТМ [12, 42]. Холодная ТМ, как предполагается, состоит из тяжелых частиц, которые имеют небольшие скорости и практически не взаимодействуют между собой и с барионным веществом. Общепринято, что ТМ дает основной вклад в массы галактик. Вместе с тем, как показывают численные расчеты [33, 34], гало галактик из холодной ТМ должны состоять из субгало меньших размеров, а те, в свою очередь, также имеют субструктуру и т. д. В идеале такое дробление структур холодной ТМ должно происходить до весьма малых масштабов; в разных литературных источниках рассматриваются мини-гало с массами до $10^6 M_{\odot}$ и даже до $10^{12} M_{\odot}$ и с пространственными масштабами порядка и больше размеров Солнечной системы [8, 9, 13, 33]. Предсказываемое такой иерархической картиной большое число субструктур ТМ [17, 21] не согласуется с наблюдаемым количеством карликовых галактик, в том числе спутников нашей Галактики. Обсуждение этих и других проблем моделей холодной материи и путей их решения можно найти в обзоре [12]. Отдельно отметим модели «теплой» ТМ, состоящей из относительно легких частиц с большими, чем в случае холодной ТМ, скоростями; благодаря этому подавляются возмущения плотности и

формирование протяженных структур ТМ на сравнительно малых масштабах [19, 29]. В любом случае наблюдательное доказательство наличия или отсутствия сгустков ТМ на малых масштабах позволило бы значительно ограничить выбор моделей ее микроструктуры.

Эффекты гравитационного линзирования [1, 2, 4] дают один из многих способов исследования ТМ. По-видимому, наиболее ярким примером этого за последнее десятилетие является использование слабого линзирования для доказательства наличия ТМ в скоплении галактик «Пуля» (Bullet Cluster) [10, 11]. Перспективы использования гравитационно-линзовых эффектов конкретно для поиска субструктур ТМ (сгустков ТМ, субгало и т. п.) в разных диапазонах масс обсуждались в ряде работ [18, 41—43].

В теории гравитационного микролинзирования значительное число работ (в частности [2]) посвящены статистическим методам, несмотря на то, что их практическое применение часто наталкивается на трудности в связи с недостаточно длинными рядами наблюдений. Тем не менее, этими методами получен ряд интересных результатов, в том числе и связанных с исследованием вклада ТМ [23, 26, 27, 37, 39]. Отметим теоретический анализ влияния непрерывно распределенной ТМ на распределение вероятностей флуктуаций блеска [26, 27]. Однако в подавляющем большинстве подобных работ (в частности, в работах [3, 36]) рассматривается либо распределение точечных масс на фоне постоянной плотности непрерывно распределенной материи, либо проблема аномального отношения потоков, моделируемых с участием масс субгало ТМ порядка $10^6 M_{\odot}$ и более.

В настоящей работе рассматривается одна из возможностей для изучения относительно малых субструктур ТМ при помощи статистики кривых блеска во внегалактических гравитационно-линзовых системах (ГЛС) [1, 2, 4], а именно, анализируются возможности микролинзирования для выявления сгустков темной материи с массами и размерами того же порядка, что и массы звезд-микролинз. Фактически здесь речь идет о протяженных объектах любой природы, которые отличаются от обычных «точечных» микролинз лишь размерами. Вместе с тем в контексте вышеупомянутых проблем такая постановка задачи в первую очередь представляет интерес с точки зрения выбора моделей микроструктуры ТМ. Ниже основное внимание уделяется кривым блеска удаленного источника, микролинзированного стохастической системой однородно распределенных точечных масс и протяженных сферически-симметричных сгустков ТМ. Для исследования статистики рассматриваются наборы значительного числа реализаций поля микролинз (точечных и протяженных) и соответствующих им кривых блеска гауссовского источника, что дает возможность рассчитать автокорреляционные функции кривых блеска. Естественно, что результат зависит от размеров сгустков. Также очевидно, что когда типичный размер R сгустков значительно меньше типичного радиуса Эйнштейна R_E микролинз, наблюдаемая кривая блеска не будет отличаться от аналогичной кривой для точечных масс. В случае же $R \gg R_E$ результат моделирования будет мало отличаться от случая, когда то-

точные микролинзы находятся в поле непрерывно распределенной материи. Поэтому нетривиальный результат можно ожидать лишь при $R \sim R_E$. В нашей работе будут рассчитаны автокорреляционные функции кривых блеска с разным относительным содержанием сгустков и точечных микролинз для соотношения $R/R_E = 5$ и 10 .

ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Мы воспользуемся простой моделью [44], которая описывает систему N центрально-симметричных протяженных масс разных размеров, расположенных в одной плоскости («плоскость линзы») на расстоянии D_d от наблюдателя (в уравнении линзы используются расстояния по угловому диаметру).

Уравнения гравитационного микролинзирования получают стандартным образом [1, 2, 4], и в случае модели [44] имеют вид

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} + \sum_{i=1}^N \frac{R_{E,i}^2 (\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|^2 R_{c,i}^2}. \quad (1)$$

Здесь $R_{c,i}$ — характерный размер i -й протяженной массы M_i , \mathbf{x}_i — угловое положение ее центра на небе, $R_{E,i}$ — соответствующий угловой радиус кольца Эйнштейна: $R_{E,i}^2 = 4GM_i D_{ds} / (c^2 D_d D_s)$, D_s — расстояние между наблюдателем и источником, D_{ds} — расстояние между источником и линзой. Каждое слагаемое из суммы в правой части (1) соответствует распределению поверхностной плотности массы в плоскости линзы $R_{c,i}^2 M_i / [|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|^2 R_{c,i}^2]$. В данной работе для одной части микролинз («звезды») принималось $R_{c,i} \ll R_{E,i}$, а для другой (протяженные «сгустки» ТМ) — $R_{c,i} = R_{E,i}$ для двух значений $= 5$ и 10 . В Приложении также рассмотрен случай микролинзирования одним сгустком при наличии внешнего сдвига.

Коэффициент усиления можно представить аналитической формулой [6, 44]

$$K = \frac{I(\mathbf{Y}(\mathbf{x})) d^2 \mathbf{x}}{I(\mathbf{y}) d^2 \mathbf{y}},$$

где $\mathbf{y} = \mathbf{Y}(\mathbf{x})$ — уравнение линзы, $I(\mathbf{x})$ — профиль поверхностного распределения яркости в плоскости источника. В вычислительном плане расчет по этой формуле эквивалентен известному методу «ray-shooting» [16, 30, 40]. Далее все кривые блеска рассчитаны для источника с гауссовским распределением яркости по диску. С учетом результатов работ [5, 22, 32, 44] следует ожидать, что видоизменение модели источника незначительно повлияет на результаты статистических оценок, по крайней мере для класса компактных источников.

Для построения кривых блеска, т. е. фактически зависимостей коэффициента усиления $K(t)$ от времени, в случае конкретной реализации поля микролинз предполагалось, что источник движется по пря-

мой. Размер участка траектории, на которой производились вычисления, выбирался так, чтобы избежать влияния краевых эффектов. Микролинзы считались неподвижными. Имея 100 реализаций поля микролинз и соответствующих им кривых блеска $K(t)$, мы рассчитывали автокорреляционные функции

$$A(\tau) = \langle K(t)K(t+\tau) \rangle / \langle K \rangle^2, \quad (2)$$

где

$$K = \sqrt{\langle [K(t)]^2 \rangle}, \quad (3)$$

скобки означают усреднение по всем реализациям кривых блеска с заданным значением оптической плотности протяженных масс ρ_{cl} и точечных масс ρ_p . Для проверки результатов моделирования в отдельных симуляциях мы использовали до 200 реализаций.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Положения и массы микролинз в системе выбирались случайным образом; центры микролинз разбрасывались согласно однородному распределению внутри круга радиуса R_{field} ; этот радиус выбирался достаточно большим, чтобы минимизировать влияние краевых эффектов и обеспечить необходимую сходимость результатов. Рассматривались микролинзы двух типов: массы малых размеров $R_{c,i} \ll R_{E,i}$ (практически точечные массы, для которых ненулевое значение $R_{c,i}$ выбиралось в целях регуляризации) и протяженные массы с размерами порядка нескольких $R_{E,i}$ («сгустки» ТМ). В каждой реализации генерировался набор масс в соответствии с распределением Солпитера [25] с показателем степени -2.35 в диапазоне масс $M_i = [0.4...10]M_\odot$. Суммарная оптическая плотность ρ_{tot} поля микролинз, а также относительное содержание точечных масс с плотностью ρ_p и «сгустков» с плотностью ρ_{cl} в каждой реализации были одинаковыми, $\rho_{cl} + \rho_p = \rho_{tot}$. Технически для введения в рассмотрение сгустков сначала генерировался набор реализаций распределения точечных масс внутри круга радиуса R_{field} , затем в каждой реализации случайно выбранная часть точечных масс заменялась протяженными с тем же значением M_i и с размером $R_{c,i} = R_{E,i}$, где коэффициент во всем наборе реализаций оставался одним и тем же.

Здесь мы рассмотрели значение $\rho_{tot} = 0.3$, значения ρ_{cl} в разных наборах составляли $\rho_{cl} = 5$ и 10 . Значение ρ_p в разных симуляциях варьировалось от 0.01 до 0.2. Другие параметры приведены в таблице; выбран масштаб $R_{E,\odot} = [4GM_\odot D_{ds} / (c^2 D_d D_s)]^{1/2} = 1$. Далее величины t , записываем в единицах $R_{E,\odot}$ (впрочем, основные результаты качественно не зависят от выбора массы, т. е. нормировка на M_\odot здесь совершенно условна).

Значения параметров численных расчетов

Размер поля	200
Размер пикселя	0.05
Количество пикселей	$1.25 \cdot 10^7$
Длина пути источника	20
Размер гауссовского источника	0.2
Оптическая плотность $_{tot}$	0.03
Размер сгустков	5; 10
Оптическая плотность сгустков $_{cl}$	0.01...0.2
Количество реализаций	100

В таблице имеются как параметры, связанные с характеристиками исследуемых объектов (оптическая плотность микролинзирования, размеры источников и сгустков, вклад последних в оптическую плотность), так и технические параметры, которые определяют качество численных расчетов (размеры и количество пикселей, количество реализаций). Следует отметить, что выбор оптимальных значений технических параметров, как обычно, представляет собой компромисс между точностью вычислений и затрачиваемым временем. Этот выбор производился путем тестирования сходимости результатов. В частности, было проведено сравнение автокорреляционных функций кривых блеска при $R_{field} = 200$ и $R_{field} = 100$: разница между полученными функциями была значительно меньшей, чем в случае разных оптических глубин сгустков.

РЕЗУЛЬТАТЫ

Примеры расчета коэффициентов усиления показаны на рис. 1. Распределения коэффициентов усиления для разного относительного содержания сгустков (при одинаковом $_{tot} = 0.3$) заметно различаются. Для полученных кривых блеска (коэффициентов усиления) были рассчитаны автокорреляционные функции $A(\)$ (рис. 2) для двух вариантов $= R_{c,i}/R_{E,i}$ при разных относительных содержаниях точечных и протяженных масс.

Для определенных значений радиуса сгустков в области < 3 имеет место немонотонное поведение кривых $A(\)$. Так, для $= 5$ при увеличении параметра $_{cl}$ от нуля до 0.1 кривые $A(\)$ опускаются, после значения 0.18 эти кривые поднимаются, а потом снова опускаются. Из рис. 2, а видно, что кривая с $_{cl} = 0.2$ идет выше всех в области < 3 , но зато быстрее убывает при > 4 , из-за чего имеются пересечения с другими кривыми. Для больших сгустков ($= 10$) зависимость от их вклада менее выражена, однако здесь также видна немонотонность изменения кривых в зависимости от $_{cl}$, особенно в интервале от 0.01 до 0.15. В обоих случаях ($= 5, 10$), когда сгустки дают основной вклад в $_{tot}$, убывание $A(\)$ как функции < 3 делается более резким.

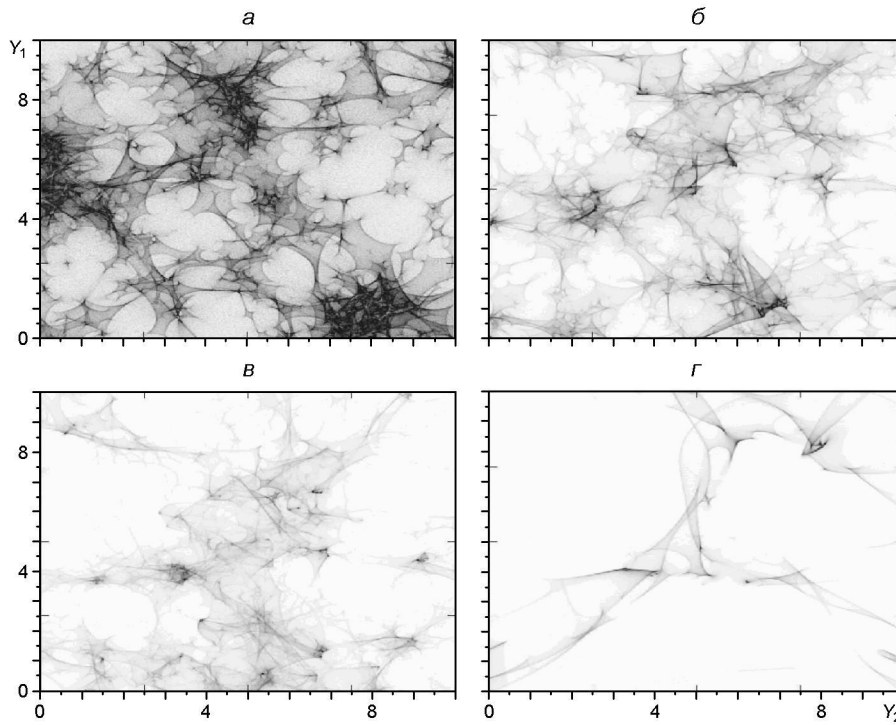


Рис. 1. Карта коэффициентов усиления для системы точечных и протяженных микролинз: а—г — для $\epsilon_l = 0.01, 0.1, 0.15$ и 0.2 соответственно. Суммарная оптическая плотность $\tau_{tot} = 0.3, 5$

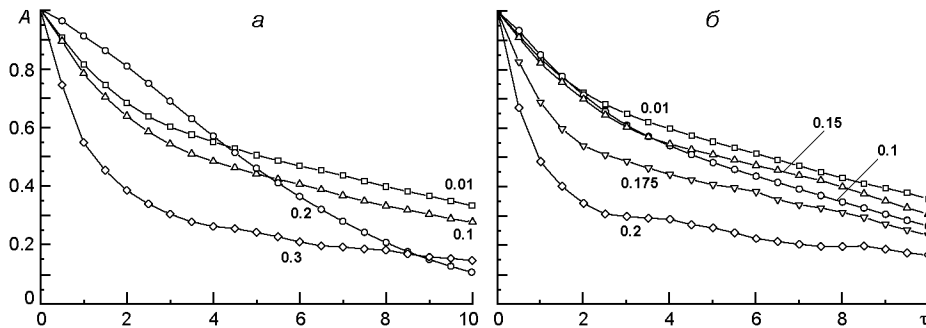


Рис. 2. Автокорреляционная функция (2) при разных значениях ϵ_l (числа у кривых): а — для $\tau_{tot} = 5$, б — для $\tau_{tot} = 10$

ОБСУЖДЕНИЕ

В настоящей работе рассчитаны автокорреляционные функции $A(\tau)$ кривых блеска при различных относительных содержаниях точечных и протяженных микролинз для суммарной оптической плотности $\tau_{tot} = 0.3$. Размеры протяженных микролинз выбирались сравнимыми с радиусами Эйнштейна точечных микролинз. Фактически вместо кривых блеска рассматривались зависимости коэффициентов усиления от

времени. Эти зависимости, а значит и автокорреляционные функции, в принципе можно оценивать из наблюдений. Из полученных результатов следует, что, по крайней мере для рассмотренных параметров поля микролинз, функции $A(\dots)$ заметно изменяются при изменении относительного содержания сгустков, которые могут представлять кластеризованную темную материю. Интересным моментом является не-монотонное поведение $A(\dots)$ в зависимости от вклада сгустков, что отражает сложное взаимодействие полей отдельных микролинз при формировании каустик системы.

В нашей работе речь идет прежде всего о принципиальной возможности выявления эффектов кластеризации ТМ — при появлении в будущем достаточно длинных и точных рядов наблюдений. Такая возможность связана с наличием внегалактических ГЛС, где ожидаемый вклад τ_{TM} имеет достаточную величину. Согласно известным оценкам в галактиках плотность массы, сосредоточенной в звездах, значительно больше плотности массы ТМ в гало. Однако для внегалактического микролинзирования важна оптическая плотность, которая пропорциональна поверхностной плотности массы, т. е. массы, спроектированной на плоскость, ортогональную к лучу зрения. Поэтому принятые в данной работе отношения оптической плотности звезд и ТМ на луче зрения в ГЛС достаточно реалистичны. Например, если для галактики с массой звезд $5 \cdot 10^{10} M_{\odot}$ и массой гало ТМ $2 \cdot 10^{12} M_{\odot}$ принять размеры, 15 и 200 кпк соответственно [31], то грубая оценка дает отношение оптической плотности ТМ к аналогичной величине для звезд, равное примерно 3. Кроме того, не исключено, что в перспективе будут открыты линзирующие объекты, где содержание ТМ значительно больше. Так, если для ряда известных ГЛС отношение массы к светимости линзирующих галактик оценивается на уровне $M/L \sim 2...4$ [20], то для некоторых сфероидальных карликовых галактик $M/L \sim 100$ [35].

ПРИЛОЖЕНИЕ.

МИКРОЛИНЗИРОВАНИЕ ОДНИМ ПРОТЯЖЕННЫМ СГУСТКОМ

Здесь мы рассматриваем критические кривые и каустики для модели линзы, образованной одиночным «сгустком» с внешним приливным сдвигом. Для сравнения заметим, что для аналогичных моделей с точечной массой или сингулярной изотермической сферой в начале координат эти вопросы хорошо исследованы.

В случае рассматриваемой модели уравнение (1) принимает вид следующей системы:

$$Y_1 - X_1 - 1 = \frac{1}{r^2} - \frac{1}{R^2}, \quad Y_2 - X_2 - 1 = \frac{1}{r^2} - \frac{1}{R^2}, \quad (4)$$

где Y_1, Y_2 — координаты источника (в его плоскости), X_1, X_2 — координаты изображения в плоскости линзы; начало координат находится в центре «сгустка» и в соответствующей точке плоскости ис-

точника, координаты нормированы на R_E , $R = R_c / R_E$, — параметр сдвига, $r^2 = X_1^2 + X_2^2$. Далее также используется величина — полярный угол в плоскости (X_1, X_2) .

Система (4) инвариантна относительно отражения координат. Замена знака эквивалентна повороту картины на $\pi/2$. Поэтому достаточно рассмотреть положительные значения α . Якобиан отображения (4) равен

$$J(X_1, X_2) = \frac{r^2 - R^2 - 1}{r^2 - R^2} \cdot 2 \cdot 2r^2 \frac{r^2 - R^2 - 1}{(r^2 - R^2)^3} \cdot 2 \frac{r^2 \cos(2\alpha)}{(r^2 - R^2)^2}. \quad (5)$$

Критические кривые находим из условия $J(X_1, X_2) = 0$, которое приводит к уравнению

$$f(x, \alpha) = (1 - R^2)Z^3 - 2 \cos(2\alpha)Zx - Z(1 - 2R^2) - 2R^2, \quad (6)$$

где $x = r^2$, $Z = x + R^2$.

Функция $f(x, \alpha)$ является полиномом 3-й степени по x . При $R = 0$ уравнение (4) описывает известную модель Чанг-Рефсдала (см. [1]); в этом случае критическая кривая в полярных координатах описывается функцией

$$r^2 = (1 - R^2)^{-1} (\cos(2\alpha) \sqrt{1 - \cos^2(2\alpha)} + 1).$$

Очевидно, при $R = 0$ одно из решений уравнения (6) должно стремиться к этому выражению.

Далее мы ограничимся докритическими значениями сдвига ($|\alpha| < \pi/2$). При отсутствии сдвига ($\alpha = 0$) уравнение (6) факторизуется:

$$(Z - 1)(Z^2 - Z - 2R^2) = 0.$$

При этом для r^2 получаем два решения:

$$r_{(1)}^2 = 1 - R^2, \quad r_{(2)}^2 = \frac{1}{2}(\sqrt{8R^2 - 1} + 1) - R^2.$$

Таким образом, критические кривые имеют вид двух окружностей, которые существуют при $R^2 < 1$. При $R^2 > 1$ критические кривые не существуют. Заметим, что образом окружности $r_{(1)}^2 = 1 - R^2$ является начало координат $Y_1 = Y_2 = 0$, а образом второй критической окружности служит каустика, которая также имеет вид окружности.

Для нахождения критических кривых проще всего провести численное исследование корней полинома $f(x, \alpha)$ при некоторых значениях параметров, а точки бифуркации, в которых изменяется количество решений, найти аналитически. Как показывает такой анализ, при $|\alpha| < \pi/2$ функция $f(x, \alpha)$ всегда имеет три действительных корня при всех значениях α , причем один из них является отрицательным. Нам, очевидно, интересуют только положительные корни. Соответственно, изменение числа решений может происходить только когда один из корней проходит через нуль. Это соответствует условию $f(0, \alpha) = 0$. Поскольку

$$f(0, \alpha) = R^2[R^2(1 - \cos(2\alpha)) - 1][R^2(1 + \cos(2\alpha)) - 1],$$

бифуркационные значения параметра $R > 0$, при которых может происходить изменение числа решений (при любых значениях α), равны

$$R = (1 - \epsilon)^{1/2}, \quad R = (1 + \epsilon)^{1/2},$$

В результате получаем, что при $0 < R < R_1$ есть две критических кривых системы (4), которые являются замкнутыми и охватывают начало координат; при $R = R_1$ внутренняя кривая стягивается в точку; при $R_1 < R < R_2$ остается одна критическая кривая, которая также стягивается в точку и исчезает при $R > R_2$.

После отыскания вида критических кривых в полярных координатах $r = r(\theta)$, находим их декартово параметрическое представление $(X_1(\theta), X_2(\theta))$, затем из уравнений (4) находим соответствующие каустики $(Y_1(\theta), Y_2(\theta))$.

Из уравнений (4) без труда находим изображение точечного источника, расположенного в начале координат $Y_1 = Y_2 = 0$.

Кроме тривиального решения $X_1^{(1)} = X_2^{(1)} = 0$ в общем случае возможны еще четыре:

$$X_1^{(2,3)} = 0, \quad X_2^{(2,3)} = \sqrt{1 - R^2},$$

$$X_1^{(4,5)} = \sqrt{1 - R^2}, \quad X_2^{(4,5)} = 0,$$

(в скобках указан номер решения). Все они существуют, если $0 < R < 1/\sqrt{1 - \epsilon}$, т. е. когда источник находится внутри двух каустик. Если соотношение параметров таково, что $1/\sqrt{1 - \epsilon} < R < 1/\sqrt{1 + \epsilon}$, то решения с номерами 4 и 5 теряют смысл, и остаются три изображения. Если же $1/\sqrt{1 + \epsilon} < R$, то «выживает» только первое решение — одно изображение. Мы еще раз убедились, что бифуркации происходят именно при тех значениях параметров, которые были найдены ранее.

Для иллюстрации на рис. 3, а показаны каустики, соответствующие значениям параметров $\epsilon = 0.4, R = 0.6$; на рис. 3, б — каустика, соответствующая значениям $\epsilon = 0.4$ и $R = 0.9$. Дополнительно укажем, что при $R = 0$ каустика, обозначенная сплошной линией, стягивается в точку (начало координат), при $R = 1/\sqrt{1 - \epsilon}$ она сжимается в вертикальном направлении; при $R = 1/\sqrt{1 + \epsilon}$ каустика, обозначенная штрихами, стягивается к вертикальному отрезку.

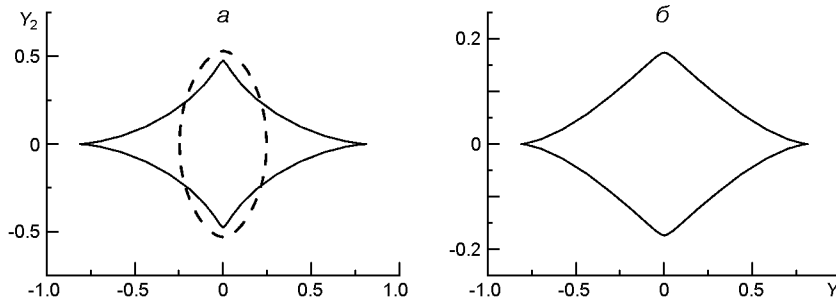


Рис. 3. Каустики для модели «сгусток с внешним полем»: а — для $\epsilon = 0.4, R = 0.6$; б — для $\epsilon = 0.4, R = 0.9$

Авторы благодарны Ю. Н. Кудре за полезные обсуждения.

1. Захаров А. Ф. Гравитационные линзы и микролинзы. — М.: Янус-К, 1997.—328 с.
2. Минаков А. А., Вакулик В. Г. Статистический анализ гравитационного микролинзирования. — К.: Наук. думка, 2010.—262 с.
3. Цветкова В. С., Шульга В. М., Вакулик В. Г. и др. Поиск темной материи с использованием явления сильного гравитационного линзирования // Кинематика и физика небес. тел.—2009.—**25**, № 1.—С. 28—37.
4. Яцків Я. С., Александров О. М., Вавилова І. Б. та ін. Загальна теорія відносності: випробування часом. — К.: ГАО НАН України, 2005.—288 с.
5. Alexandrov A. N., Sliusar V. M., Zhdanov V. I. Caustic crossing events and source models in gravitational lens systems // Ukr. J. Phys.—2011.—**56**, N 4.—P. 389—400.
6. Alexandrov A. N., Zhdanov V. I. Asymptotic expansions and amplification of a gravitational lens near a fold caustic // Mon. Notic. Roy. Astron. Soc.—2011.—**417**, N 1.—P. 541—554.
7. Alexandrov A. N., Zhdanov V. I., Fedorova E. V. Asymptotic formulas for the magnification of a gravitational lens system near a fold caustic // Astron. Lett.—2010.—**36**, N 5.—P. 344—353.
8. Berezhinsky V., Dokuchaev V., Eroshenko Yu. Remnants of dark matter clumps // Phys. Rev. D.—2008.—**77**, N 8.—id. 083519(13).
9. Berezhinsky V. S., Dokuchaev V. I., Eroshenko Yu. N. Formation and internal structure of superdense dark matter clumps and ultracompact minihaloes // J. Cosmology and Astroparticle Physics.— 2013.—**11**.—id. 059(13).
10. Clowe D., Bradač M., Gonzalez A., et al. A direct empirical proof of the existence of dark matter // Astrophys. J.—2006.—**648**.—P. L109—L113.
11. Clowe D., Gonzalez A., Markevitch M. Weak-lensing mass reconstruction of the interacting cluster 1E 0657-558: direct evidence for the existence of dark matter // Astrophys. J.—2004.—**604**, N 2.—P.596—603.
12. Del Popolo A. Non-baryonic dark matter in cosmology // Int. J. Modern Phys. D.—2014.—**23**, N 3.—id. 1430005(109).
13. Diemand J., Moore B., Stadel J. Earth-mass dark-matter haloes as the first structures in the early Universe // Nature.—2005.—**433**, N 7024.—P. 389—391.
14. Eichner T., Seitz S., Bauer A. Golden gravitational lensing systems from the Sloan lens ACS Survey-II. SDSS J1430+4105: a precise inner total mass profile from lensing alone // Mon. Notic. Roy. Astron. Soc.—2014.—**427**, N 3.—P. 1918—1939.
15. Hinshaw G., Larson D., Komatsu E., et al. Nine-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) observations: Cosmological parameter results // Astrophys. J. Suppl.—2013.—**208**, N 2.—id. 19(25).
16. Kayser R., Refsdal S., Stabell R. Astrophysical applications of gravitational microlensing // Astron. and Astrophys.—1986.—**166**.—P. 36—48.
17. Klypin A., Kravtsov A. V., Valenzuela O., et al. Where are the missing galactic satellites? // Astrophys. J.—1999.—**522**, N 1.—P. 82—92.
18. Li F., Erickcek A. L., Law N. M. A new probe of the small-scale primordial power spectrum: astrometric microlensing by ultracompact minihalos // Phys. Rev. D.—2012.—**86**.—id. 043519(17).
19. Lovell M., Eke V., Frenk C., et al. The haloes of bright satellite galaxies in a warm dark matter universe // Mon. Notic. Roy. Astron. Soc.—2012.—**420**, N 3.—P. 2318—2324.
20. Lubin L. M., Fassnacht C. D., Readhead A. C. S., et al. A Keck survey of gravitational lens systems. I. Spectroscopy of SBS 0909+532, HST 1411+5211, and CLASS B2319+051 // Astrophys. J.—2000.—**119**, N 2.—P. 451—459.
21. Moore B., Ghigna S., Governato F., et al. Dark matter substructure within galactic halos // Astrophys. J.—1999.—**524**, N 1.—P. L19—L22.
22. Mortonson M. J., Schechter P. L., Wambsganss J. Size is everything: Universal features of quasar microlensing with extended sources // Astrophys. J.—2005.—**628**.—P. 594—603.

23. *Paczynski B.* Gravitational microlensing at large optical depth // *Astrophys. J.*—1986.—**301**.—P. 503—516.
24. *Planck Collaboration.* Planck 2013 results. XVI. Cosmological parameters. — arXiv: 1303.5076.
25. *Salpeter E.* The luminosity function and stellar evolution // *Astrophys. J.*—1955.—**121**.—P. 161—167.
26. *Schechter P. L., Wambsganss J.* Quasar microlensing at high magnification and the role of dark matter: Enhanced fluctuations and suppressed saddle points // *Astrophys. J.*—2002.—**580**.—P. 685—695.
27. *Schechter P. L., Wambsganss J., Lewis G. F.* Qualitative aspects of quasar microlensing with two mass components: Magnification patterns and probability distributions // *Astrophys. J.*—2004.—**613**.—P. 77—85.
28. *Schmidt R., Webster R. L., Lewis G. F.* Weighing a galaxy bar in the lens Q2237 + 0305 // *Mon. Notic. Roy. Astron. Soc.*—1998.—**295**, N 2.—P. 488—496.
29. *Schneider A., Smith R. E., Macci A. V., Moore B.* Nonlinear evolution of cosmological structures in Warm Dark Matter models // *Mon. Notic. Roy. Astron. Soc.*—2012.—**424**, N 1.—P. 684—698.
30. *Schneider P., Weiss A.* Apparent number density enhancement of quasars near foreground galaxies due to gravitational lensing — Part two — The amplification probability distribution and results // *MPA Rep.*—1987.—**311**.—P. 46—62.
31. *Shull J. M.* Where do galaxies end? // *Astrophys. J.*—2014.—**784**, N 2.—id. 142(10).
32. *Sliusar V. M., Zhdanov V. I., Alexandrov A. N.* Simulations of the gravitational microlensing: extended source models and impact of binary stars // *J. Phys. Stud.*—2012.—**16**.—P. 8—22.
33. *Springel V., Wang J., Vogelsberger M., et al.* The Aquarius Project: the subhaloes of galactic haloes // *Mon. Notic. Roy. Astron. Soc.*—2008.—**391**.—P. 1685—1711.
34. *Stadel J., Potter D., Moore B., et al.* Quantifying the heart of darkness with GALO—a multibillion particle simulation of a galactic halo // *Mon. Notic. Roy. Astron. Soc.*—2009.—**398**.—P. L21—L25.
35. *Swaters R. A., Sancisi R., van Albada T. S., van der Hulst J. M.* Are dwarf galaxies dominated by dark matter? // *Astrophys. J.*—2011.—**729**.—P. 118—129.
36. *Tsvetkova V. S., Vakulik V. G., Shulga V. M., et al.* PG1115+080: variations of the A2/A1 flux ratio and new values of the time delays // *Mon. Notic. Roy. Astron. Soc.*—2010.—**406**.—P. 2764—2776.
37. *Tuntsov A. V., Lewis G. F.* Microlensing in phase space — II. Correlations analysis // *Mon. Notic. Roy. Astron. Soc.*—2006.—**370**.—P. 105—120.
38. *van de Ven G., Falcon-Barroso J., McDermid R. M., et al.* The Einstein cross: Constraint on dark matter from stellar dynamics and gravitational lensing // *Astrophys. J.*—2010.—**719**, N 2.—P. 1481—1496.
39. *Wambsganss J.* Probability distributions for the magnification of quasars due to microlensing // *Astrophys. J.*—1992.—**386**.—P. 19—29.
40. *Wambsganss J., Paczynski B., Schneider P.* Interpretation of the microlensing event in QSO 2237+0305 // *Astrophys. J.*—1990.—**358**.—P. L33—L36.
41. *Zackrisson E., Asadi S., Wiik K., et al.* Hunting for dark halo substructure using submilliarcsecond-scale observations of macrolensed radio jets // *Mon. Notic. Roy. Astron. Soc.*—2013.—**431**, N 3.—P. 2172—2183.
42. *Zackrisson E., Riehm T.* Gravitational lensing as a probe of cold dark matter subhalo // *Adv. Astron.*—2010.—**2010**.—id. 478910(14).
43. *Zakharov A.* Lensing by exotic objects // *General relativity and gravitation.* —2010.—**42**, N 9.—P. 2301—2322.
44. *Zhdanov V. I., Alexandrov A. N., Fedorova E. V., Sliusar V. M.* Analytical methods in gravitational microlensing // *Int. Scholarly Res. Notic. Astron. and Astrophys.*—2012.—**2012**.—id. 906951(21).

Статья поступила в редакцию 29.04.14