

Многомерные и поверхностные солитоны в нелинейной упругой среде

А. С. Ковалев, Е. С. Сыркин

*Физико-технический институт низких температур им. Б. И. Веркина НАН Украины
пр. Ленина, 47, г. Харьков, 61103, Украина
E-mail: kovalev@ilt.kharkov.ua*

Ж. А. Можен

*Laboratoire de Modelisation en Mecanique, Universite Pierre et Marie Curie
Paris, 75253, France*

Статья поступила в редакцию 31 января 2002 г., после переработки 11 февраля 2002 г.

Исследованы нелинейные сдвиговые волны в двумерных системах (в частности, поверхностные волны) при учете пространственной дисперсии упругой среды. Показано, что дисперсия играет важную роль в структурной и модуляционной устойчивости нелинейных волн, в значительной мере определяет направления локализации фононов в нелинейной локализованной волне и, в частности, возможность существования упругих поверхностных солитонов. С помощью асимптотической процедуры найдены решения для малоамплитудных двумерных упругих сдвиговых однопараметрических солитонов стационарного профиля и солитонов огибающей, а также для поверхностных солитонов, локализованных вблизи идеальной поверхности упругого полупространства. Такие локализованные возбуждения возможны лишь в среде с «фокусирующей» (мягкой) нелинейностью и положительной дисперсией $\partial^2\omega/\partial k^2 > 0$, где $\omega(k)$ — закон дисперсии линейных волн. Предложена процедура нахождения решений для поверхностных солитонов огибающей, локализованных у поверхности, покрытой слоем другого вещества. Проведено сравнение структуры поверхностных сдвиговых солитонов у идеальной поверхности и поверхности с пленочным покрытием.

Досліджено нелінійні зсувні хвилі в двовимірних системах (зокрема, поверхневі хвилі) при урахуванні просторової дисперсії пружного середовища. Показано, що дисперсія відіграє важливу роль у структурній та модуляційній стійкості нелінійних хвиль, в значній мірі визначає напрямки локалізації фононів в нелінійній локалізованій хвилі і, зокрема, можливість існування пружних поверхневих солітонів. За допомогою асимптотичної процедури знайдено розв'язки для малоамплітудних двовимірних пружних зсувних однопараметричних солітонів стаціонарного профілю та солітонів огинаючої, а також для поверхневих солітонів, які локалізовані поблизу ідеальної поверхні пружного напівпростору. Такі локалізовані збудження можливі лише в середовищі з «фокусуною» (м'якою) нелінійністю та позитивною дисперсією $\partial^2\omega/\partial k^2 > 0$, де $\omega(k)$ — закон дисперсії лінійних хвиль. Запропоновано процедуру знаходження розв'язків для поверхневих солітонів огинаючої, локалізованих біля поверхні, що вкрита шаром іншої речовини. Проведено порівняння структури поверхневих зсувних солітонів біля ідеальної поверхні та поверхні, що покрита плівкою.

PACS: 43.95.+y, 68.35.-p

В последнее время в связи с общим интенсивным развитием физики нелинейных явлений воз-

рос интерес к нелинейным упругим поверхностным волнам [1–17]. Вследствие концентрации

энергии в поверхностной волне в тонком приповерхностном слое влияние ангармоничности кристалла на свойства поверхностных волн существенно сильнее, чем на свойства объемных волн. Нелинейные свойства поверхностных волн наблюдались экспериментально в большом числе работ [12–14, 18–20]. Первым ярким свидетельством нелинейности поверхностных упругих волн стало обнаружение генерации высших гармоник в поверхностной волне у идеальной поверхности при возбуждении начального периодического синусоидального сигнала [18–20]. Наблюдаемая нелинейная волна носила нестационарный характер, обусловленный слабой дисперсией этой волны. В настоящее время в теории нелинейных волн хорошо известно, что стационарные нелинейные волны и солитоны возможны лишь при наличии конкурирующих факторов: нелинейности среды и дисперсии линейных волн [21]. Действительно, эксперименты с нелинейными поверхностными волнами Лява у поверхности, покрытой тонкой пленкой [14], продемонстрировали возможность существования нелинейных волн стационарного профиля. (Покрывающая пленка приводит к существенному увеличению дисперсии линейных поверхностных волн.) Теоретически вопрос о нелинейных поверхностных волнах, в простейшем случае чисто сдвиговых волн у идеальной поверхности, был рассмотрен в [2]. Некоторые конкретные вопросы динамики таких волн в этой модели изучали в [3–5]. Однако авторы [2–5] пренебрегли учетом пространственной дисперсии упругих волн. Позже в работах [6,7] было показано, что для существования нелинейных поверхностных волн учет пространственной дисперсии является весьма существенным. Для технических приложений нелинейных поверхностных волн (НПВ) важна возможность распространения устойчивых слабозатухающих импульсов или волновых пакетов НПВ. Хорошо известно, что подобными свойствами обладают динамические солитоны [21]. Впервые возможность распространения поверхностных упругих сдвиговых солитонов рассмотрена в [8,9], такие поверхностные солитоны также обсуждались в [10,11,15]. Однако авторы указанных статей исследовали поверхностные солитоны, распространяющиеся вдоль поверхности упругого полупространства, покрытого слоем более мягкого материала.

В настоящей работе рассмотрена возможность распространения упругих поверхностных сдвиговых солитонов вблизи идеальной поверхности кристалла и показано, что они имеют принципиально другой вид, чем солитоны у поверхности,

покрытой пленкой, и могут существовать лишь при вполне определенной комбинации знаков нелинейности и дисперсии среды.

Обсуждаемый вопрос имеет также принципиальное значение для общей теории распространения многомерных солитонов, поскольку существует связь между проблемой солитонов в неограниченной среде и нелинейными поверхностными волнами и поверхностными солитонами в полуограниченной среде с идеальной свободной границей. Нелинейная поверхностная волна представляет собой «половину» нелинейной волны, локализованной в неограниченной среде в направлении, перпендикулярном направлению распространения этой волны. В этом смысле поверхностный солитон эквивалентен «половине» трехмерного солитона, локализованного во всех трех направлениях, а проблема нелинейной поверхностной локализации подобна задаче о нелинейной фокусировке фононов.

Проблема локализации нелинейных акустических волн в многомерной среде принципиальна и нетривиальна. До сих пор многомерные солитоны исследовали главным образом в системах с сильной пространственной дисперсией (например, в магнитоупорядоченных средах с анизотропией типа ось легкого намагничивания [22], т.е. в случае, когда дисперсия $D = \partial^2 \omega_0(k) / \partial k^2$ отлична от нуля даже в пределе $k = 0$ (где k — волновое число линейных возбуждений, $\omega_0(k)$ — частота линейной волны и $\omega = \omega_0(k)$ — закон дисперсии линейных волн). В этом случае при нулевой групповой скорости $V = \partial \omega_0(k) / \partial k$ при $k = 0$ возникает возможность существования неподвижных многомерных радиально симметричных солитонов. При движении солитона происходит лишь его деформация в направлении распространения. Однако в нелинейных средах с акустическим законом дисперсии (нелинейная упругая среда или магнетик с легкоплоскостной анизотропией), в которых в пределе малых волновых чисел ($k \rightarrow 0$) дисперсия отсутствует ($D = 0$), а групповая скорость остается конечной, ситуация в корне отлична. (В случае нелинейной волны обычно вводят «нелинейный закон дисперсии» $\omega = \omega(k, A)$ [21], где A — амплитуда волны. При этом дисперсией называют величину $D = \partial^2 \omega(k, A) / \partial k^2 |_{A=0}$.) Вследствие движения фононов в определенном направлении с ненулевой групповой скоростью это и два перпендикулярных ему направления становятся неэквивалентными (спонтанное нарушение симметрии задачи) для образования солитонов, и условия локализации нелинейной волны (а также условия ее ус-

тойчивости) вдоль различных координат также становятся различными. Эти условия определяются знаками дисперсии D и нелинейности, которая в дальнейшем характеризуется параметром $N = \partial\omega(k, A)/\partial A^2$ [21]. При разных соотношениях знаков параметров D и N возможна локализация потока фононов в направлении их распространения, перпендикулярно ему (нелинейное каналирование фононов), а также во всех трех направлениях.

1. Нелинейные волны в ангармонической цепочке и многомерной среде

Традиционно нелинейную динамику упругих систем изучали на примере одномерных ангармонических цепочек. Рассматриваемым ниже чисто сдвиговым волнам в трехмерной среде в случае, когда смещения в волне зависят лишь от одной пространственной координаты (x), отвечает так называемая одномерная β -модель Ферми–Паста–Улама, которая в длинноволновом пределе описывается модифицированным уравнением Буссинеска [21]:

$$mu_{tt} = \alpha a^2 u_{xx} + \alpha \chi a^4 u_{xxxx} + \beta a^4 u_x^2 u_{xx}, \quad (1)$$

где m — масса атома, a — постоянная решетки, α — характеристика гармонического межчастичного взаимодействия, β — константа ангармонического взаимодействия ближайших соседей и u — поперечное смещение атома из положения равновесия. Второе слагаемое в правой части (1) описывает дисперсию линейных волн и определяет знак параметра D . Обычно дисперсия $D \approx -3\sqrt{\alpha}a^3k/\sqrt{m}$ предполагается отрицательной ($\chi > 0, D < 0$). В частности, при учете только центральных сил взаимодействия ближайших соседей $\chi = \chi_0 = 1/12 > 0$. Однако при учете изгибной жесткости одномерной цепочки или учете возможной слоистости реального трехмерного кристалла дисперсия может быть и положительной ($D > 0, \chi < 0$). Примерами могут служить Nb_3Sn , Hg^{203} , MoS_2 , MoSe_2 [26]. Важным является выбор знака параметра β при ангармоническом слагаемом. Авторы [2–6] выбирали параметр β отрицательным, что выглядит естественным для поперечных колебаний. Однако в работах [10, 11] выбиралась положительная нелинейность ($\beta > 0$), экспериментально наблюдаемая в образцах LiNbO_3 , в которых такой знак β , по-видимому, связан с сильным пьезоэлектрическим эффектом. Еще раз подчеркнем, что речь идет об ангармонизмах трехмерных кристаллов. При исследова-

нии солитонных возбуждений в ангармонических цепочках обычно выбирается положительный знак нелинейного слагаемого ($\beta > 0$) при отрицательной дисперсии ($\chi > 0$). Однако в общем случае представляется физически более оправданным (во всяком случае для простых ангармонических упругих сред) выбор отрицательной (мягкой) нелинейности с $\beta < 0$, что следует из нулевых асимптотик потенциала межчастичного взаимодействия на больших расстояниях.

При соответствующем выборе масштабов координаты, времени и смещений $[x] = a$, $[t] = a/c$, $[u] = \sqrt{|\beta|/\alpha}$, где $c = a\sqrt{\alpha/m}$ — скорость звука, легко переписать (1) в безразмерном виде:

$$u_{tt} = u_{xx} + \chi u_{xxxx} + \delta u_x^2 u_{xx}, \quad (2)$$

Где $\delta = \text{sgn}(\beta)$ — знаковая функция ($\delta = \pm 1$).

В линейном пределе спектр волн вида $u = A \sin(kx - \omega t)$ имеет вид $\omega_0^2(k) = k^2 - \chi k^4$ с групповой скоростью $V \approx 1 - 3\chi k^2/2$ и дисперсией $D \approx -3\chi k$ в пределе малых волновых чисел $k \rightarrow 0$. Для слабонелинейных волн закон дисперсии модернизируется следующим образом [21]:

$$\omega^2(k) = k^2 - \chi k^4 + \delta k^4 A^2/4, \quad (3)$$

$$D \approx -3\chi k, \quad N \approx \delta k^3/8.$$

Следовательно, знак нелинейности N определяется знаком параметра β : $\text{sgn} N = \text{sgn} \beta$.

По виду «нелинейного закона дисперсии» (3) можно судить об устойчивости нелинейных периодических волн стационарного профиля. Согласно критерия Лайтхилла [23], одномерные нелинейные пространственно периодические волны постоянной амплитуды модуляционно неустойчивы при выполнении неравенства $DN < 0$, т.е. $\delta\chi > 0$. Развитие этой неустойчивости приводит к образованию динамических солитонов огибающей.

Модифицированное уравнение Буссинеска (2) не является полностью интегрируемым, и обычно обсуждаются лишь его точные решения для однопараметрических солитонов стационарного профиля вида $u = u(x - Vt)$, зависящих лишь от одного параметра — скорости солитона V . Деформация в таком нелинейном возбуждении имеет стандартный солитонный вид [21]:

$$w = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\sqrt{6(V^2 - 1)}/\delta}{\text{ch} \left[\sqrt{(V^2 - 1)}/\chi (x - Vt) \right]}. \quad (4)$$

Очевидно, что такие солитоны существуют только при выполнении соотношений

$$\chi > 0, \delta > 0, V > 1 \tag{5}$$

или

$$\chi < 0, \delta < 0, V < 1,$$

т.е. при $\delta\chi > 0$, что согласуется с критерием Лайтхилла.

Более сложные решения типа двухпараметрических солитонов огибающей (бризеров) можно получить лишь приближенно в пределе их малой амплитуды с помощью той или иной асимптотической процедуры (см., например, [8]). Нам представляется наиболее удобной процедура, предложенная в [24] для нелинейного уравнения Клейна–Гордона и обобщенная в [25] на случай эволюционных уравнений со звуковым законом дисперсии типа $\omega_0^2(k) = k^2 - \chi k^4$. Для решений типа солитонов огибающей функция $u(x, t)$ может быть представлена в виде следующего разложения:

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \{f_{2n+1}(\zeta) \sin(2n+1)\theta + \varphi_{2n+1}(\zeta) \cos(2n+1)\theta\}, \tag{6}$$

где $\zeta = x - Vt$, $\theta = kx - \omega t$, а функции f_s , φ_s и скорость солитона V раскладываются в степенные ряды

$$\begin{aligned} f_s &= \sum_{m=0}^{\infty} f_{s,s+2m} \varepsilon^{s+2m}, \\ \varphi_s &= \sum_{m=0}^{\infty} \varphi_{s,s+2m+1} \varepsilon^{s+2m+1}, \\ V &= V(k) + \varepsilon^2 \lambda(k) + \dots, \end{aligned} \tag{7}$$

где малым параметром разложения (связанным с амплитудой солитона) является величина

$$\varepsilon = \sqrt{|\omega^2 - \omega_0^2(k)|}, \tag{8}$$

в которой функция $\omega_0(k)$ соответствует закону дисперсии линейных волн. (Производные по фазе ζ имеют порядок малости ε : $\partial/\partial\zeta \sim \varepsilon$.) Решение для двухпараметрического солитона огибающей в основном приближении и при малых значениях k имеет вид

$$u \approx \sqrt{\frac{8(\omega^2 - k^2 + \chi k^4)}{\delta k^4}} \times \operatorname{sech} \left[\sqrt{\frac{\omega^2 - k^2 + \chi k^4}{3\chi k^2}} (x - Vt) \right] \sin(kx - \omega t), \tag{9}$$

$$V \approx 1 - \frac{3}{2} \chi k^2,$$

где в качестве двух независимых динамических параметров решения могут быть выбраны волновой вектор k и частота ω нелинейной волны, локализованной в солитоне. При этом скорость солитона является однозначной функцией этих двух параметров $V = V(k, \omega)$. Как видно из (9), в основном приближении по амплитуде малоамплитудного солитона зависимость $V = V(k, \omega)$ для солитона совпадает с зависимостью групповой скорости линейной волны от волнового числа. Из выражения (9) следует, что одномерные солитоны огибающей существуют лишь при выполнении неравенств

$$\chi > 0, \delta > 0, V < 1, \omega > \omega_0(k) \tag{10}$$

или

$$\chi < 0, \delta < 0, V > 1, \omega < \omega_0(k),$$

т.е. при $\delta\chi > 0$, что вновь согласуется с критерием Лайтхилла.

Из вида солитонного решения (9) следует, что в пределе нулевой дисперсии ($\chi \rightarrow 0$) солитон коллапсирует, т.е. область его локализации стремится к нулю. Более того, легко показать, что отношение амплитуд второй и основной гармоник равно $f_3/f_1 = \varepsilon/(36k^4\chi)$ и, следовательно, истинным параметром асимптотического разложения является величина $\varepsilon^2/(k^4\chi)$, расходящаяся в бездисперсионном пределе $\chi \rightarrow 0$. Это указывает на важность учета пространственной дисперсии в рассматриваемой проблеме.

Полученные условия существования одномерных солитонов различного типа легко представить на плоскости $(\tilde{\omega}, V)$, где V — скорость солитона и $\tilde{\omega} = \omega - kV$ — частота внутренних осцилляций солитона огибающей в системе отсчета, движущейся со скоростью V . (При этом в качестве двух независимых параметров солитонного решения выступают не k и ω , а V и $\tilde{\omega}$.) В линейном пределе (для линейных волн) из закона дисперсии $\omega_0^2(k) = k^2 - \chi k^4$ следует такая зависимость $\tilde{\omega}_0 = \tilde{\omega}_0(V)$:

$$\tilde{\omega}_0 \approx \left(\frac{2}{3}\right)^{3/2} \frac{1}{\sqrt{\chi}} (1 - V)^{3/2}, \tag{11}$$

где V — групповая скорость линейной волны.

На рис. 1 эти параболы представлены в виде тонких линий. Заштрихованные области вблизи них на рис. 1,а и 1,б соответствуют рассмотренным здесь малоамплитудным солитонам огибающей, зависящим от одной пространственной

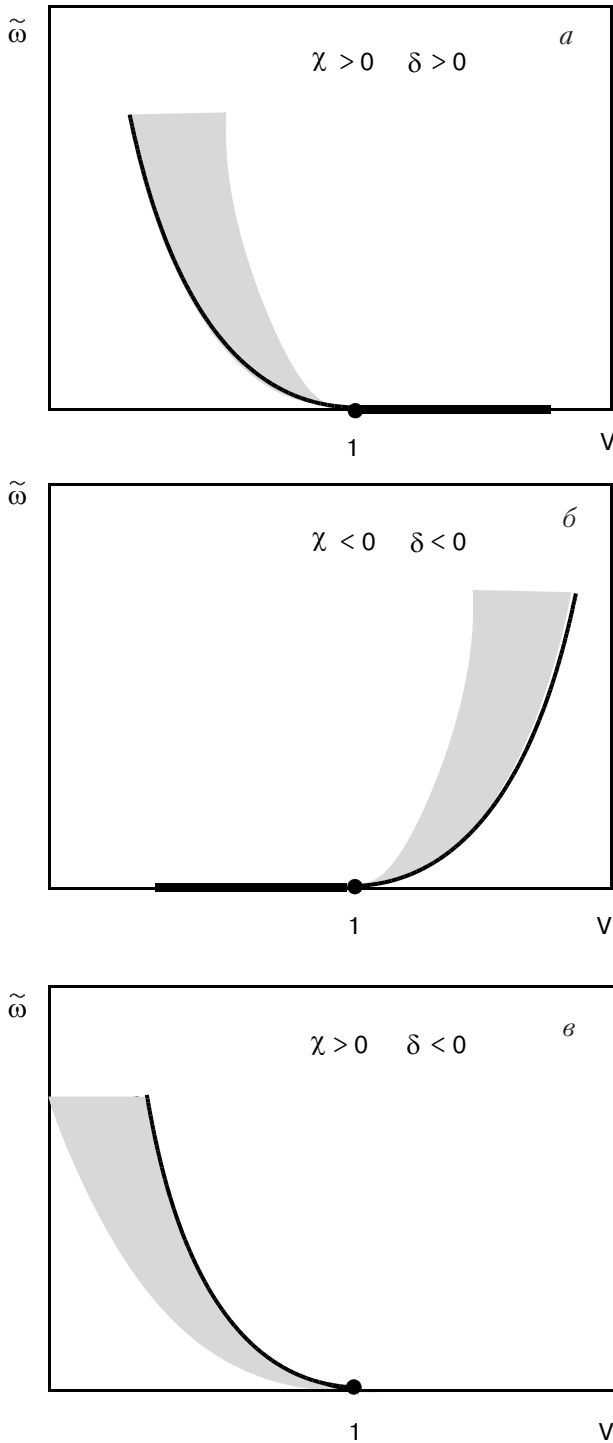


Рис. 1. Законы дисперсии линейных волн (тонкие линии), области существования малоамплитудных одномерных солитонов огибающей (заштрихованы на 1,а и 1,б) и линии, отвечающие однопараметрическим солитонам стационарного профиля (жирные) модифицированного уравнения Буссинеска: $\chi > 0, \delta > 0$ (а); $\chi < 0, \delta < 0$ (б); $\chi > 0, \delta < 0$ (в). Заштрихованная область на 1,в отвечает каналированию фононов или нелинейным поверхностным волнам.

переменной. Жирные линии (рис. 1,а и 1,б) отвечают малоамплитудным однопараметрическим солитонам стационарного профиля, зависящим от одной пространственной переменной. Заштрихованная область на рис. 1,в отвечает каналированию фононов или нелинейным поверхностным волнам.

Обсуждавшиеся выше решения описывают солитоны в трехмерной среде в случае, если они локализованы только в одном направлении — направлении распространения нелинейной волны (вдоль оси x). Ниже мы покажем, что возможны ситуации, когда нелинейная волна может локализоваться в направлении, перпендикулярном распространению, в двух направлениях, перпендикулярных ему, или во всех трех направлениях в трехмерном пространстве. Ограничимся рассмотрением кубического ангармонического кристалла, в котором волна распространяется вдоль одного из основных кристаллографических направлений, когда чисто сдвиговая волна отщепляется от волн с другими поляризациями. Впервые нелинейные поверхностные волны в таком кристалле рассматривали в работах [2,3,5], но без учета пространственной дисперсии волн. Эта дисперсия была учтена в работах [6,7], где нелинейные сдвиговые волны исследовали в рамках следующего уравнения, являющегося трехмерным обобщением уравнения (2):

$$\begin{aligned}
 u_{tt} = & u_{xx} + u_{zz} + u_{yy} + \chi(u_{xxxx} + u_{zzzz} + u_{yyyy} + \\
 & + \mu u_{xxzz} + \mu u_{xxyy} + \mu u_{yyzz}) + \\
 & + \delta \{ u_x^2 u_{xx} + u_z^2 u_{zz} + u_y^2 u_{yy} + \lambda [(u_x^2 u_z)_z + (u_z^2 u_x)_x + \\
 & + (u_x^2 u_y)_y + (u_y^2 u_x)_x + (u_z^2 u_y)_y + (u_y^2 u_z)_z] \} = 0.
 \end{aligned}
 \tag{12}$$

Ниже в основном будет рассмотрено распространение волн со сдвиговой горизонтальной поляризацией и со смещениями, зависящими от двух пространственных координат, и лишь в одном случае (при обсуждении трехмерных солитонов, локализованных во всех трех измерениях) — от всех трех координат. Геометрия изучаемой проблемы следующая: волна распространяется вдоль оси x , смещения атомов направлены вдоль оси y , в случае поверхностных волн и поверхностных солитонов плоскость поверхности совпадает с плоскостью xy , перпендикулярной направлению оси z , амплитуда волны зависит от координат x и z и (в большинстве рассматриваемых случаев) не зависит от координаты y (см. рис. 4,б). При этом $\partial/\partial y = 0$, и уравнение (12) существенно упрощается. Если волна распростра-

няется вдоль оси x и однородна в направлении оси z , то ее нелинейный закон дисперсии по-прежнему имеет вид соотношения (3). Однако теперь вопрос об устойчивости нелинейной волны может быть поставлен в более широком смысле. Критерий Лайтхилла $DN < 0$ ($\delta\chi > 0$) определяет теперь лишь модуляционную неустойчивость однородной волны относительно продольных флуктуаций (вдоль оси x). Вопрос о поперечной устойчивости (в направлении осей z и y) легко решается в частном случае, когда $\mu = 2$ и $\lambda = 1/3$. При этом частота зависит только от модуля волнового вектора, и нелинейный закон дисперсии сохраняет вид (3), где $k = \sqrt{k_x^2 + k_z^2 + k_y^2}$. При этом, как показано в [23], однородная нелинейная волна неустойчива относительно поперечных возмущений при $N < 0$ ($\delta < 0$). Таким образом, при $\chi < 0$ и $\delta > 0$ однородная нелинейная волна устойчива по всем направлениям и ее локализация невозможна. При $\chi > 0$ и $\delta > 0$ волна локализуется в направлении своего распространения и возможно образование обсуждавшихся выше одномерных солитонов в трехмерном пространстве. При $\chi > 0$ и $\delta < 0$ волна локализуется в направлении, перпендикулярном её распространению, и возможно каналирование фононов и существование устойчивых поверхностных нелинейных волн. Наконец, однородная волна неустойчива по всем направлениям при одновременном выполнении неравенств $N < 0$ и $D > 0$. Поэтому можно ожидать, что двумерные и трехмерные акустические солитоны могут существовать лишь в средах с положительной дисперсией и мягкой нелинейностью (при $\chi < 0$ и $\delta < 0$).

Выше рассмотрена локализация нелинейной волны в направлении ее распространения. Перейдем к исследованию возбуждений, локализованных в поперечном и в обоих направлениях.

2. Каналирование фононов, поверхностные волны и двумерные солитоны

Рассмотрим сначала систему с отрицательной дисперсией и мягкой нелинейностью: $D < 0$ ($\chi > 0$) и $N < 0$ ($\delta < 0$). Это наиболее естественная ситуация для сдвиговых волн. При этом нелинейная волна модуляционно устойчива в направлении своего распространения, но неустойчива в поперечных направлениях, что приводит к локализации фононов в этих направлениях. Это явление можно назвать каналированием фононов. В этом случае необходимо искать решение уравнения (12), периодичное вдоль направления распространения (оси x) и локализованное в направле-

нии осей z и y . Ограничимся случаем, когда решение не зависит от y . Естественно, в конечном итоге развитие поперечной неустойчивости приведет к локализации волны и в направлении оси y , но мы не будем рассматривать этот процесс. В малоамплитудном пределе решение находится с помощью следующего асимптотического разложения [6]:

$$u(x, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f_{2n+1, 2n+2m+1}(z) \varepsilon^{2n+2m+1} \sin(2n+1)\theta, \quad (13)$$

где $\theta = kx - \omega t$ и $\varepsilon = \sqrt{\omega_0^2(k) - \omega^2}$, и в основном приближении имеет вид [6]

$$u \approx \sqrt{\frac{8(k^2 - \chi k^4 - \omega^2)}{k^4}} \times \operatorname{sech} \left[\sqrt{\frac{k^2 - \chi k^4 - \omega^2}{1 - \chi \mu k^2}} z \right] \sin(kx - \omega t), \quad (14)$$

где k и ω — два произвольных параметра солитонного решения.

Это выражение внешне напоминает решение (9), но имеет другую область существования на плоскости параметров $(\tilde{\omega}, V)$: частоты таких каналирующих фононов при фиксированном волновом векторе или групповой скорости лежат ниже частот линейных волн (заштрихованная область на рис. 1, в). В бездисперсионном пределе $\chi \rightarrow 0$ решение (14) совпадает с полученным в работе [2], однако легко показать, что отношение амплитуд гармоник в разложении (13) имеет порядок $f_{s+1, s+1}/f_{s, s} \sim \varepsilon/\chi k^2$. Следовательно, решение (14) имеет смысл (асимптотический ряд сходится) только при учете дисперсии среды в области $k^2 - \chi k^4 - \omega^2 \ll \chi^2 k^4$.

До сих пор мы говорили лишь о каналировании нелинейных фононов в бесконечной трехмерной упругой среде. Однако решение (13), (14) описывает также и нелинейные поверхностные сдвиговые волны вблизи идеальной поверхности полуограниченного кристалла. Действительно, граничное условие на свободной границе $z=0$, следующее из уравнения (12), имеет вид

$$[u_z (1 + \delta u_z^2/3 + \delta \lambda u_x^2) + \chi u_{zzz} + \chi \mu u_{xxz}]_{z=0} = 0, \quad (15)$$

и решение (14), очевидно, ему удовлетворяет. (Мы не касаемся в настоящей статье принципиального вопроса о необходимости формулировки дополнительных граничных условий для уравне-

ния (12), содержащего высшие пространственные производные вплоть до четвертой включительно. Фактически они сводятся к требованию выполнения условий длинноволности рассмотрения.)

Наконец, исследуем вопрос о многомерных и поверхностных солитонах, локализованных в трех измерениях. Как указывалось выше, такие нелинейные возбуждения могут существовать только в случае среды с положительной пространственной дисперсией и мягкой нелинейностью ($\chi < 0, \delta < 0$). Второе неравенство является естественным для сдвиговых волн и должно выполняться в большинстве веществ. Первое неравенство является необычным, поскольку в большинстве материалов дисперсия линейных волн отрицательна. Тем не менее кристаллы с положительной дисперсией при малых частотах существуют (см. [26]).

Прежде всего исследуем трехмерные солитоны огибающей, локализованные в двух направлениях (x и z). Им соответствует заштрихованная область на рис. 1,б (совпадающая с областью существования одномерных солитонов огибающей модифицированного уравнения Буссинеска). Малоамплитудные решения для многомерных солитонов огибающей можно искать в виде разложения (6)–(8) с $\varepsilon = \sqrt{\omega_0^2(k) - \omega^2}$, предполагая теперь, что функции f_{rs} и φ_{rs} зависят не только от фазы $\zeta = x - Vt$, но и от координаты z . Сложность в данном случае заключается в том, что уже на первом шаге асимптотической процедуры возникает нелинейное уравнение в частных производных, которое может быть решено лишь численно. (Соответственно и все последующие шаги могут быть выполнены только численно.) В основном (резонансном) приближении с точностью до ε имеем

$$u \approx \varepsilon f_{11}(\zeta, z) \sin \theta \equiv \varepsilon f(\zeta, z) \sin \theta, \quad (16)$$

где функция $f(\zeta, z)$ слабо зависит от своих «медленных» переменных. При продольной локализации нелинейной волны убывание ее амплитуды определялось малым параметром $\varepsilon: \partial/\partial\zeta \sim \varepsilon$, как это следует из (9). С другой стороны, при поперечной локализации волны, как следует из (14), область локализации также определяется этим малым параметром: $\partial/\partial z \sim \varepsilon$. Поэтому естественно предположить, что и в случае двумерного солитона огибающей (16) зависимость функции $f(\zeta, z)$ от ее аргументов будет определяться одним и тем же параметром ε . Тогда, оставляя в уравнении (12) основные слагаемые порядка величины

ε^3 ($f \sim \partial/\partial\zeta \sim \partial/\partial z \sim \varepsilon$), получаем для функции f следующее уравнение:

$$f_{\zeta\zeta}(3\chi k^2) - f_{zz} + \varepsilon^2 f - \varepsilon^2 k^4 f^3/4 = 0. \quad (17)$$

(В коэффициенте при первом слагаемом мы приближенно заменили $V^2 \approx 1 - 3\chi k^2$ и в коэффициенте при втором слагаемом положили $1 - \chi\mu k^2 \approx 1$.) Как и из рассмотрения устойчивости однородных нелинейных волн, из (17) следует, что многомерные локализованные солитоны огибающей существуют лишь при выполнении условий $\chi < 0, \delta < 0, \omega < \omega_0(k)$. Вводя удобный масштаб координат и амплитуды поля

$$\varepsilon\zeta/\sqrt{3|\chi|k^2} = \xi, \quad \varepsilon z = \eta, \quad f k^2/2 = g, \quad (18)$$

представим уравнение (17) в радиально-симметричном безразмерном виде:

$$g_{\xi\xi} + g_{\eta\eta} - g + g^3 = 0. \quad (19)$$

Радиально-симметричные решения этого уравнения детально изучены как качественными [27], так и численными [28,29] методами. (Хорошо известны также и аналогичные центрально-симметричные решения соответствующих уравнений в трехмерном пространстве, где двумерный лапласиан в (19) заменяется на трехмерный, и решение зависит и от координаты y .) Имеется бесконечный набор таких симметричных решений, параметризуемых числом нулей в зависимости поля от радиальной координаты. Наименьшей энергией обладает решение с монотонным убыванием поля g с радиусом $r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$. Амплитуда поля в центре двумерного солитона $g(z = x - Vt = 0) = 2,2$. (В трехмерном солитоне огибающей степень локализации выше, и амплитуда в центре солитона при той же частоте и скорости больше: $g_{3D}(0) \approx 4,5$.) Профиль огибающей двумерного солитона $g = g(\xi)$ приведен на рис. 2. В исходных переменных решение для двумерного солитона имеет вид

$$u = \frac{2\varepsilon}{k^2} g \left(\varepsilon \frac{x - Vt}{\sqrt{3|\chi|k^2}}, \varepsilon z \right) \sin(kx - \omega t), \quad (20)$$

где скорость солитона V зависит от параметров k и ω и в основном приближении совпадает с групповой скоростью линейных волн с тем же значением k . Из (20) следует, что области локализации солитона в разных направлениях Δx и Δz имеют разную величину:

$$\frac{\Delta x}{\Delta z} \sim k\sqrt{|\chi|}. \quad (21)$$

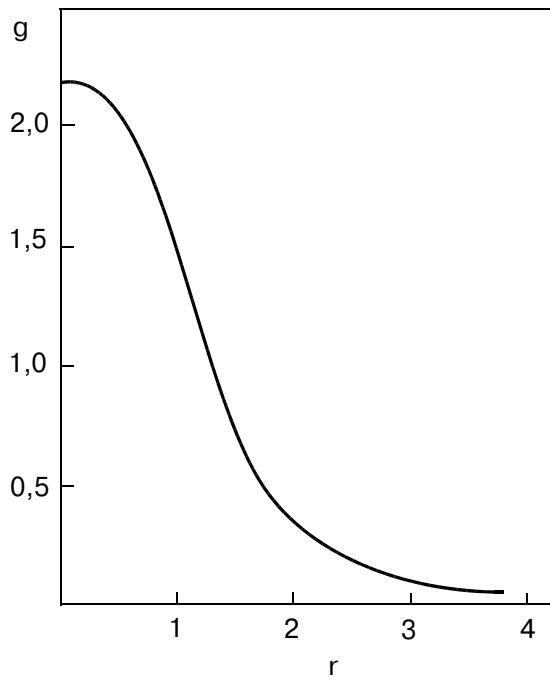


Рис. 2. Профиль огибающей двумерного динамического двухпараметрического солитона упругих сдвиговых смещений (в безразмерных переменных).

Как видно из этого выражения, в длинноволновом пределе $\Delta x \ll \Delta z$ и солитон сильно сплюснут в направлении своего распространения (см. рис. 4, *a*). На этом рисунке изображена ситуация, когда солитон локализован во всех трех направлениях и описывается уравнением (19) с трехмерным лапласианом.

Поскольку решение (20) удовлетворяет условию (15), оно также описывает и локализованный вблизи идеальной поверхности солитон огибающей поверхностной сдвиговой волны. Поскольку поверхностные волны возбуждаются обычно полосовыми излучателями, а для развития поперечной неустойчивости требуется конечное время, рассмотренные нами двумерные поверхностные солитоны (локализованные лишь в одном направлении в плоскости поверхности) вполне могут наблюдаться. Заметим, что в работе [13], где, по-видимому, впервые экспериментально наблюдались поверхностные солитоны, утверждается, что условия эксперимента соответствовали взятым нами знакам дисперсии и нелинейности ($D > 0$, $N < 0$).

Необходимо подчеркнуть, что в данном случае локализация нелинейной волны в плоскости поверхности и вблизи нее вызвана одной и той же физической причиной — нелинейностью упругой среды.

Перейдем к рассмотрению двумерных и поверхностных однопараметрических солитонов стационарного профиля, т.е. двумерных аналогов решения (4). По-прежнему будем рассматривать волны, распространяющиеся вдоль оси x со скоростью V , т.е. решения вида $u = u(x - Vt, z)$. Как указывалось, такие состояния возможны при $\chi < 0$, $\delta < 0$ и $V^2 \leq 1$ (см. рис. 1, *b*). Из решения (4) для одномерных солитонов следует, что в пределе $1 - V^2 \ll 1$ решение становится малоамплитудным и слаболокализованным:

$$u_x \sim \sqrt{1 - V^2} \ll 1, \quad \partial/\partial x \sim \sqrt{1 - V^2} \ll 1.$$

При этом слагаемые $u_{tt} - u_{xx}$, χu_{xxxx} и $\delta u_x^2 u_{xx}$ в уравнении (12) становятся величинами одного порядка ($\sim (1 - V^2)^2$). Предположим, что зависимость от координаты z также слабая ($\partial/\partial z \ll 1$) и оставим только основное слагаемое, зависящее от производных по координате z : u_{zz} . Тогда этот член будет порядка $(1 - V^2)^2$, а производная по координате z порядка $\partial/\partial z \sim 1 - V^2$. При этом отброшенные в (12) слагаемые будут порядка $(1 - V^2)^3$ и $(1 - V^2)^4$. В основном приближении уравнение (12) сводится к следующему:

$$(1 - V^2)u_{xx} + u_{zz} - |\chi|u_{xxxx} - u_x^2 u_{xx} = 0. \quad (22)$$

Удобно использовать следующие новые координаты и смещения:

$$\xi = \frac{\sqrt{1 - V^2}(x - Vt)}{\sqrt{|\chi|}}, \quad \eta = \frac{(1 - V^2)z}{\sqrt{|\chi|}}, \quad \varphi = \frac{u}{\sqrt{6|\chi|}}, \quad (23)$$

в терминах которых уравнение для продольной деформации $w = \varphi \xi$ принимает вид

$$w_{\xi\xi} + w_{\eta\eta} - w_{\xi\xi\xi\xi} - 2(w^3)_{\xi\xi} = 0. \quad (24)$$

Видно, что это уравнение имеет иную структуру, чем уравнение (19) для двумерных солитонов огибающей. Оно напоминает стационарную версию уравнения Кадомцева–Петвиашвили [30] при замене в нем квадратичной нелинейности на кубическую: $(w^2)_{\xi\xi} \rightarrow (w^3)_{\xi\xi}$. Солитонное решение уравнения Кадомцева–Петвиашвили хорошо известно [31]. Оно имеет совершенно иной вид, чем для двухпараметрического солитона (20). Прежде всего, его асимптотики не экспоненциальные, как в одномерных солитонах, а степенные. Кроме того, в направлении движения поле при удалении от центра солитона убывает немонотонно. Эти свойства сохраняются и в упругих сдвиговых солитонах стационарного профиля, описываемых уравнением (24). Формаль-

но это уравнение совпадает с уравнением для малоамплитудных нелинейных волн стационарного профиля в двумерном легкоплоскостном ферромагнетике, полученном и исследованном в [32]. Поэтому профиль солитонного решения (24) можно определить из сравнения с данными численного моделирования магнитной динамики легкоплоскостного магнетика при скоростях нелинейных возбуждений, близких к скорости спиновых волн, проведенных недавно С. Комиасом (частное сообщение). Распределение продольной деформации в солитоне представлено на рис. 3 в виде двух сечений: вдоль движения $w(\xi, \eta=0)$ и в перпендикулярном направлении $w(\eta, \xi=0)$. Видно, что это решение имеет качественно такой же вид, что и солитон Кадомцева–Петвиашвили: в направлении распространения профиль имеет немонотонный характер. Несмотря на то, что минимумы на рис. 3 невелики по сравнению с центральным максимумом, вследствие медленного убывания деформации с расстоянием роль областей отрицательной деформации очень велика. По-видимому, как и в уравнении Кадомцева–Петвиашвили, в нашем случае полная деформация в солитоне равна нулю: $\int w d\xi d\eta = 0$. Во всяком случае вычисление полной намагниченности в движущемся магните солитоне в пределе больших его скоростей (когда магнитная и упругая системы фактически эквивалентны) показывает, что эта величина становится

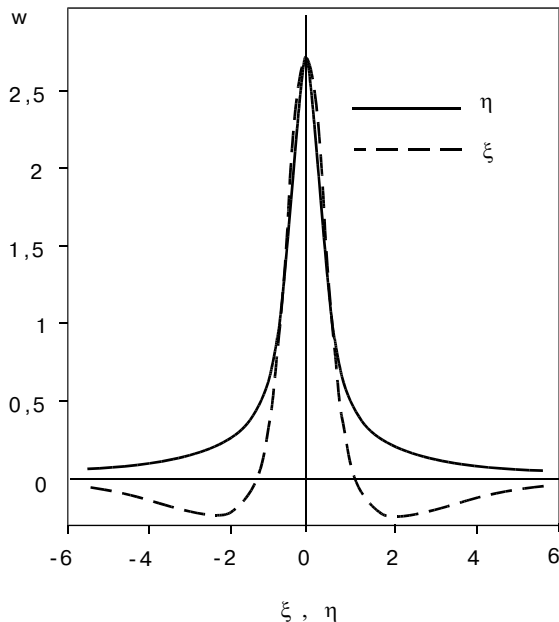


Рис. 3. Распределение деформации в двумерном солитоне стационарного профиля (в безразмерных переменных).

аномально малой, что отвечает аномально малой полной деформации в акустическом солитоне. Напомним, что в одномерном случае в движущемся солитоне стационарного профиля (4) полная деформация отлична от нуля: $\int w dx = \sqrt{24\chi/\delta} \neq 0$. Возможно, перечисленные выше свойства однопараметрических двумерных солитонов являются общими для систем со звуковым спектром линейных возбуждений. Качественно подобную приведенной на рис. 3 форму имеют, например, поверхностные рэлеевские солитоны [16,17].

Если в солитонном решении перейти к исходным переменным, то его характерный размер в направлении распространения $\Delta x \sim 1/\sqrt{1-V^2}$, в то время как в перпендикулярном направлении размер будет существенно большим:

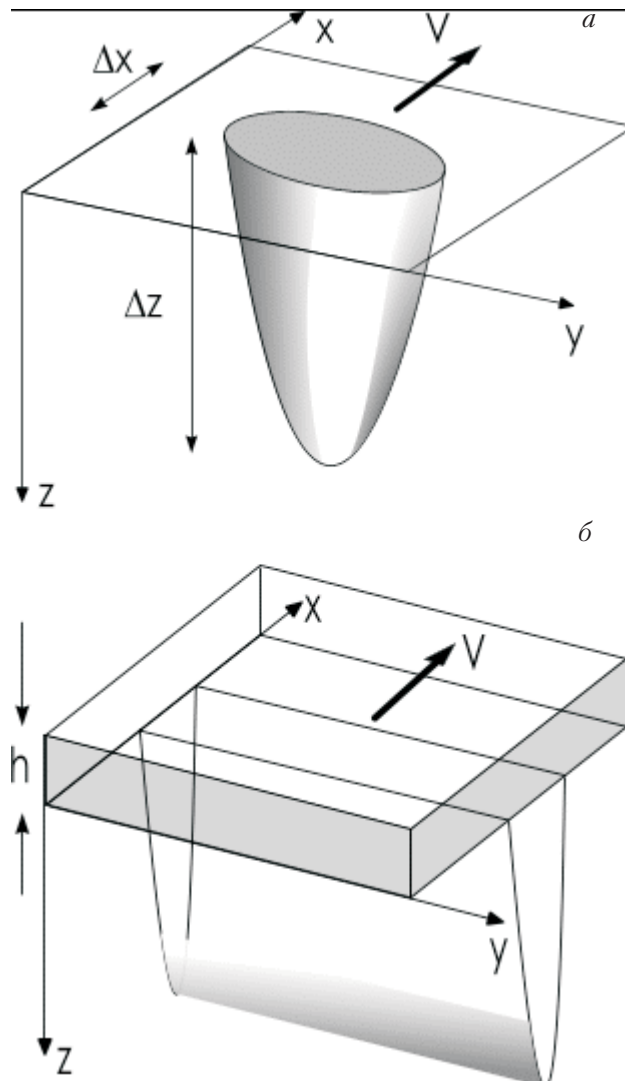


Рис. 4. Профиль поверхностного солитона, локализованного у идеальной поверхности (а) и около поверхности, покрытой пленкой другого вещества (б).

$\Delta z \sim 1/(1-V^2) \gg \Delta x$ (см. рис. 4,а). Однако теперь сплюснутость солитона в направлении распространения определяется не волновым вектором (как в солитоне огибающей), а скоростью солитона стационарного профиля.

Поскольку найденное солитонное решение симметрично относительно оси $z=0$, оно как и в предыдущих случаях описывает поверхностные сдвиговые солитоны (в данном случае — стационарного профиля), локализованные в направлениях x и z и распространяющиеся вдоль идеальной поверхности упругого трехмерного полупространства.

3. Солитоны, локализованные у поверхности с пленочным покрытием и у плоского дефекта

В предыдущем разделе рассмотрены солитоны различного вида в трехмерной упругой среде и вблизи идеальной поверхности полупространства и указаны условия их существования (комбинация знаков нелинейности и дисперсии среды). Однако если поверхность ангармонического кристалла покрыта пленкой другого материала (или при наличии в кристалле плоского дефекта), условия существования поверхностных солитонов или солитонов, локализованных у дефектной плоскости, могут измениться. Впервые на возможность существования таких сдвиговых поверхностных солитонов обращено внимание в работах [10,11]. В такой постановке экспериментальное обнаружение солитонов у поверхности и вблизи плоского дефекта представляется более вероятным, поскольку при толщине покрывающего слоя или границы раздела между двумя средами $h \gg a$ дисперсия линейных волн, локализованных у поверхности или дефекта, может существенно превосходить «собственную» дисперсию объемных упругих волн. В результате нелинейная стационарная волна или солитон образуются за существенно меньшие времена (когда еще можно не учитывать затухание), а деформации в стационарной волне уменьшаются, что оправдывает длинноволновое рассмотрение проблемы. Однако если в предыдущем разделе локализация волны в двух направлениях обусловлена нелинейностью, то теперь нелинейность обеспечивает локализацию лишь в направлении распространения солитона, а локализация в поперечном направлении обусловлена наличием плоского дефекта или поверхностного слоя (т.е. существует и в линейном пределе). При этом для локализации линейной волны необходимо, чтобы ее частоты лежали ниже спектра объемных попе-

речных волн, что накладывает условия на характеристики дефектного слоя и приводит к отрицательной эффективной дисперсии поверхностных сдвиговых волн в противоположность положительной дисперсии, рассмотренной в предыдущем разделе. Более того, как показано в [10,11], в данном случае солитоны существуют только при «жесткой» нелинейности среды ($N > 0$). Это условие противоположно условию существования солитонов в однородной среде или у идеальной поверхности. Фактически теперь рассматривается нелинейная волна Лява [33]. Поскольку нелинейность обеспечивает локализацию волны лишь в продольном направлении, свойства возникающих солитонов специфичны. Хотя в предыдущем разделе рассмотрены двумерные решения, однако, как указано, в трехмерной среде нелинейность приводит к локализации во всех трех направлениях. В обсуждаемом здесь случае волна локализуется у поверхности, а в плоскости поверхности — только в направлении распространения. Таким образом, в трехмерном случае солитоны остаются двумерными (см. рис. 4,б).

Для сравнения поверхностных солитонов различного типа приведем вначале способ простого качественного получения решения в среде с пленочным покрытием. Рассмотрим полупространство, покрытое тонкой пленкой (толщиной h) материала, отличающегося от объемного только плотностью. Очевидно, что в случае плоского дефекта симметричные локализованные возбуждения будут описываться теми же решениями, что и в полупространстве, покрытом пленкой, если толщина плоского дефекта будет равна $2h$. Как известно [33], в линейной среде волны Лява существуют лишь в случае, когда плотность в пленке ρ_0 больше плотности вещества в объеме ρ ($\rho_0 / \rho = s > 1$), и закон дисперсии таких волн при малых волновых числах имеет следующий вид:

$$\omega_0^2 = k^2 - h^2 v^2 k^4, \quad (25)$$

где $v = s - 1$ — характеристика капиллярных эффектов, скорость звука в объеме полупространства, как и выше, полагается равной единице. Видно, что линейные волны Лява имеют отрицательную дисперсию ($D = -3h^2 v^2 k < 0$). Эта дисперсия определяет убывание амплитуды поверхностной волны при удалении от поверхности: $u \sim \exp(-\gamma z)$, где $\gamma \approx hk^2 v \sim D^2$. В длинноволновом пределе ($hk \ll 1$) имеем $\gamma / k \approx hkv \ll 1$, т.е. изменение поля вдоль координаты z происходит гораздо медленнее, чем вдоль координаты x : $\partial/\partial z \ll \partial/\partial x$. Поэтому при рассмотрении мало-

амплитудных нелинейных локализованных волн Лява, не зависящих от координаты y , в уравнении (12) можно пренебречь всеми нелинейными слагаемыми, содержащими производные по координате z , и оставить лишь главное слагаемое $\sim u_x^2 u_{xx}$. Кроме того, в этом уравнении можно отбросить все «внутренние» дисперсионные линейные слагаемые вследствие наличия эффективной дисперсии, связанной с пленкой. Как видно из (25), ее наличие определяется дисперсионным слагаемым $\sim h^2 v^2 u_{xxxx}$, которое при $hv \gg a$ превосходит самое большое дисперсионное слагаемое $a^2 \chi u_{xxxx}$ в (12), связанное с собственной дисперсией объемных волн. Таким образом, в объеме вместо (12) можно ограничиться уравнением

$$u_{tt} = u_{xx} + u_{zz} + \delta u_x^2 u_{xx}, \quad z > 0, \quad (26)$$

которое должно быть дополнено эффективным граничным условием. Проще всего его получить, интегрируя аналогичное (26) уравнение для пленки по ее толщине ($-h < z < 0$):

$$hsu_{tt} = hu_{xx} + u_z + h\delta u_x^2 u_{xx}, \quad z = 0. \quad (27)$$

Этот подход дает правильный результат для спектра волн Лява в случае длинных волн с $k \ll 1/h$: в линейном пределе из (26), (27) следует закон дисперсии

$$\omega_0^2 = k^2 - h^2 (s\omega_0^2 - k^2)^2, \quad (28)$$

совпадающий при $k \ll 1/h$ с точным выражением для закона дисперсии волн Лява и выражением (25). Формально этот же закон дисперсии может быть получен следующим образом. В линейном приближении из (27) в области вблизи границы среды и пленки следует

$$\frac{\partial}{\partial z} \approx h \left(s \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right). \quad (29)$$

(О соотношении $\partial/\partial z \sim \partial^2/\partial x^2$ для поверхностных волн мы упоминали выше.) Подставляя оператор (29) в линейризованное уравнение (26), вновь приходим к спектру волн Лява (28). Если же такую подстановку провести в нелинейном уравнении (26), то получим модифицированное уравнение Буссинеска (2) с эффективной дисперсией $\chi = h^2 v^2$:

$$u_{tt} = u_{xx} + h^2 v^2 u_{xxxx} + \delta u_x^2 u_{xx}. \quad (30)$$

Поскольку теперь дисперсия отрицательна ($D < 0$), солитонные решения существуют лишь при «жесткой» нелинейности ($\delta > 0, N > 0$), т.е. условия существования солитона прямо противо-

положны таковым вблизи идеальной поверхности. Само решение (30) имеет вид выражения (9) с $\chi = h^2 v^2$. Воспользовавшись зависимостью от z , характерной для линейных волн Лява, $u \sim \exp(-\gamma z)$ с $\gamma = \sqrt{k^2 - \omega^2} \approx hvk^2$, имеем окончательное приближенное решение для поверхностных солитонов вблизи поверхности с пленочным покрытием:

$$u \approx \frac{2\sqrt{2}\varepsilon}{\sqrt{\delta}k^2} \operatorname{sech} \left(\frac{\varepsilon(x - Vt)}{\sqrt{3}hvk} \right) \times \sin(kx - \omega t) \exp(-hvk^2 z), \quad (31)$$

Где $\varepsilon = \sqrt{\omega^2 - k^2 + h^2 v^2 k^4}$ и $V \approx 1 - 3h^2 v^2 k^3 / 2$. Из решения (31) и точного выражения для параметра локализации волны Лява γ видно, что частоты солитонов при заданном значении k лежат в интервале $k^2 - h^2 v^2 k^4 < \omega^2 < k^2$. Приведенный выше вывод солитонного решения носит качественный характер. Строгий метод нахождения солитонного решения приведен в Приложении.

Из (31) следует, что область локализации в плоскости поверхности $\Delta x \sim hvk/\varepsilon$ определяется тем же выражением, что и в случае идеальной поверхности, но с эффективным дисперсионным параметром. Однако размер солитона в направлении оси z определяется теперь величиной $\Delta z \sim 1/(hvk^2)$, совершенно иной, чем при идеальной поверхности ($\Delta z \sim 1/\varepsilon$). Соотношение размеров солитона в разных направлениях

$$\frac{\Delta x}{\Delta z} \sim khv \frac{k^2 hv}{\varepsilon} \quad (32)$$

отличается от такового в случае идеальной поверхности множителем $k^2 hv/\varepsilon$, который может быть произвольным.

Таким образом, видно, что многомерные сдвиговые солитоны в однородной среде и в среде с плоским дефектом и поверхностные солитоны вблизи идеальной поверхности и поверхности, покрытой тонкой пленкой, могут иметь существенно различную структуру.

Приложение

Рассмотрим систему уравнений (26), (27) для смещений $u(x, z, t)$ в объеме ангармонического кристалла и на его поверхности $u(x, z = 0, t) = U(x, t)$. Для малоамплитудных слаболокализованных поверхностных солитонов в «резонансном» приближении решение (26), (27) можно записать в виде

$$u = a(x - Vt, z) \sin(kx - \omega t) + b(x - Vt, z) \cos(kx - \omega t), \quad (\text{П.1})$$

$$U = A(x - Vt) \sin(kx - \omega t) + B(x - Vt) \cos(kx - \omega t), \quad (\text{П.2})$$

где частота слабо отличается от частоты линейных поверхностных волн Лява $\omega_0(k)$: $\omega^2 - \omega_0^2(k) = \varepsilon^2 \ll 1$; зависимость функций a, b, A, B от аргумента $(x - Vt)$ медленная: $\partial/\partial x \sim \varepsilon$, а порядок функций a, b, A, B следующий: $a \sim A \sim \varepsilon, b \sim B \sim \varepsilon^2$. (Зависимость от координаты z не связана теперь с малым параметром ε .) Введем характеристику отклонения частоты от закона дисперсии объемных линейных волн $\gamma = \sqrt{k^2 - \omega^2}$. Подставляя разложения (П.1), (П.2) в уравнения (26), (27) и приравнявая нулю слагаемые при $\sin(kx - \omega t)$ и $\cos(kx - \omega t)$, получаем с точностью до ε^3 следующую систему уравнений:

$$a_{zz} - \gamma^2 a = (V^2 - 1)a_{xx} + 2(k - V\omega)b_x + \delta k^4 a^3/4, \quad (\text{П.3})$$

$$b_{zz} - \gamma^2 b = -2(k - V\omega)a_x, \quad (\text{П.4})$$

$$h(sV^2 - 1)A_{xx} + h(k^2 - s\omega^2)A + 2h(k - sV\omega)B_x + h\delta k^4 A^3/4 - a_z(z=0) = 0, \quad (\text{П.5})$$

$$h(k^2 - s\omega^2)B - 2h(k - sV\omega)A_x - b_z(z=0) = 0. \quad (\text{П.6})$$

Представив функции a и b в виде разложений по степеням малого параметра ε : $a = a_1\varepsilon + a_3\varepsilon^3 + \dots$, $b = b_2\varepsilon^2 + b_4\varepsilon^4 + \dots$, и выписав слагаемые с точностью до ε^3 , получим систему уравнений для нахождения величин a_1, a_3 и b_2 :

$$\varepsilon: \quad a_{1zz} - \gamma^2 a_1 = 0, \quad (\text{П.7})$$

$$\varepsilon^2: \quad b_{2zz} - \gamma^2 b_2 = -2(k - V\omega)a_{1x}, \quad (\text{П.8})$$

$$\varepsilon^3: \quad a_{3zz} - \gamma^2 a_3 = (V^2 - 1)a_{1xx} + \delta k^4 a_1^3/4 + 2(k - V\omega)b_{2x}. \quad (\text{П.9})$$

Решение этой системы для волн, локализованных у поверхности, имеет очевидный вид:

$$a = f(x) e^{-\gamma z} - f_{xx} \times \left\{ \frac{(k - V\omega)^2}{2\gamma^2} z^2 + \frac{(k - V\omega)^2}{2\gamma^3} z + \frac{(V^2 - 1)}{2\gamma} z \right\} e^{-\gamma z} + \frac{\delta k^4}{32\gamma^2} f^3 e^{-3\gamma z}, \quad (\text{П.10})$$

$$b = f_x \frac{(k - V\omega)}{\gamma} z e^{-\gamma z}. \quad (\text{П.11})$$

Находя отсюда значения $a, a_x, a_{xx}, a_z, b, b_x, b_z$ при $z=0$ и подставляя их в уравнения (П.5), (П.6), получаем следующие два уравнения для нахождения функции $f(x)$ и параметра V :

$$\varepsilon^3: \quad \left[h(sV^2 - 1) + \frac{(k - V\omega)^2}{2\gamma^3} + \frac{(V^2 - 1)}{2\gamma} \right] f_{xx} + [\gamma + h(k^2 - s\omega^2)]f + \frac{\delta k^4}{32} \left[\frac{h(k^2 - s\omega^2)}{\gamma^2} + 8h + \frac{3}{\gamma} \right] f^3 = 0, \quad (\text{П.12})$$

$$\varepsilon^2: \quad [2h(k - sV\omega) + (k - V\omega)/\gamma]f_x = 0. \quad (\text{П.13})$$

Из уравнения (П.13) следует зависимость $V(k, \omega)$ для скорости поверхностных солитонов:

$$V = \frac{k}{\omega} \frac{1 + 2h\sqrt{k^2 - \omega^2}}{1 + 2hs\sqrt{k^2 - \omega^2}}. \quad (\text{П.14})$$

В пределе линейных поверхностных волн, приравнявая нулю коэффициент при f в уравнении (П.12), получаем закон дисперсии (25). Из (П.14) при этом следует, что $V \approx 1 - 3h^2 k^2 v^2 / 2 = = \partial\omega_0(k)/\partial k$, т.е. скорость солитонов совпадает с групповой скоростью линейных поверхностных волн. Учитывая эти соотношения, перепишем в основном приближении уравнение (П.12) в виде

$$(\sqrt{3}hkv)^2 f_{xx} - \varepsilon^2 f + \delta k^4 f^3 / 8 = 0. \quad (\text{П.15})$$

Таким образом, при последовательном рассмотрении проблемы решение для поверхностных сдвиговых солитонов имеет вид

$$u(x, z, t) \approx \frac{4\varepsilon}{\sqrt{\delta}k^2} \operatorname{sech} \frac{\varepsilon(x - Vt)}{\sqrt{3}hvk} e^{-hvk^2 z} \sin(kx - \omega t), \quad (\text{П.16})$$

где $\omega^2 = k^2 - h^2 v^2 k^4 + \varepsilon^2$ и $V = 1 - 3h^2 k^2 v^2 / 2$. Это решение отличается множителем $\sqrt{2}$ в амплитуде от качественного результата, приведенного в основном тексте.

Авторы благодарны Ставросу Коминеасу за любезное предоставление данных численного моделирования динамики двумерных магнитных солитонов в легкоплоскостном ферромагнетике.

Работа поддержана программой INTAS в рамках гранта № 99-0167.

1. A. P. Mayer, *Phys. Rep.* **256**, 237 (1995).
2. V. G. Mozhaev, *Phys. Lett.* **A139**, 333 (1989).
3. В. И. Горенцвейг, Ю. С. Кившарь, А. М. Косевич, Е. С. Сыркин, *ФНТ* **16**, 1472 (1990).
4. Yu. S. Kivshar and E. S. Syrkin, *Phys. Lett.* **A146**, 156 (1991).
5. Yu. A. Kosevich, *Phys. Lett.* **A146**, 529 (1990).
6. А. С. Ковалев, Е. С. Сыркин, *ЖЭТФ* **100**, 522 (1992).
7. А. S. Kovalev and E. S. Syrkin, *Surf. Sci.* **346**, 337 (1996).
8. K. Bataille and F. Lund, *Physica* **D6**, 95 (1982).
9. A. A. Maradudin, in: *Physics of Phonons*, T. Paszkievich (ed.), Springer, New York (1987), p. 82
10. G. A. Maugin and H. Hadouaj, in: *Frontiers in Nonlinear Acoustic*, M. F. Hamilton and D. T. Blackstock (eds.), Elsevier, London (1990), p. 565; *Phys. Rev.* **B44**, 1266 (1991).
11. H. Hadouaj and G. A. Maugin, *C. R. Acad. Sci. Paris* **2-309**, 1877 (1989); *J. Phys. (Paris)*, suppl. **51**, C2-57 (1990); *Wave motion* **16**, 115 (1992).
12. Y. Nakagawa, *Jpn. J. Appl. Phys.*, suppl. **22**, 157 (1985).
13. M. Planat and M. Hoummady, *Appl. Phys. Lett.* **55**, 103 (1989).
14. В. И. Наянов, *Письма в ЖЭТФ* **44**, 245 (1986).
15. G. A. Maugin, H. Hadouaj, and B. A. Malomed, *Phys. Rev.* **B45**, 9688 (1992).
16. C. Eckl, A. P. Mayer, and A. S. Kovalev, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 983 (1998).
17. C. Eckl, J. Schollmann, A. P. Mayer, A. S. Kovalev, and G. A. Maugin, *Wave motion* **34**, 35 (2001).
18. Л. К. Зарембо, В. А. Красильников, *УФН* **102**, 549 (1970).
19. В. И. Наянов, И. А. Васильев, *ФТТ* **25**, 2490 (1983).
20. М. К. Балакирев, А. Л. Белостоцкий, Л. А. Федюхин, *ФТТ* **25**, 339 (1983).
21. А. М. Косевич, А. С. Ковалев, *Введение в нелинейную физическую механику*, Киев, Наукова думка (1989).
22. А. М. Косевич, Б. А. Иванов, А. С. Ковалев, *Нелинейные волны намагнитченности. Динамические и топологические солитоны*, Киев, Наукова думка (1983).
23. В. Н. Карпман, *Нелинейные волны в диспергирующих средах*, Наука, Москва (1973).
24. А. М. Косевич, А. С. Ковалев, *ЖЭТФ* **67**, 1793 (1974).
25. А. С. Ковалев, *Автореф. дисс. ... д-ра физ.-мат. наук*, Харьков (1989).
26. H. G. Smith and N. Wakabayashi, *Phonons in Dynamics of Solids and Liquids*, S. W. Lovesay and T. Springer (eds.), Springer, Berlin, **3**, 98 (1977).
27. З. К. Янкаускас, *Радиофизика* **9**, 417 (1966).
28. R. Y. Chiao, E. Garmire, and C. H. Townes, *Phys. Rev. Lett.* **13**, 479 (1964).
29. J. I. Rasmussen and R. Rypdal, *Phys. Scr.* **33**, 481 (1986).
30. Б. Б. Кадомцев, В. И. Петвиашвили, *ДАН СССР* **192**, 753 (1970).
31. L. A. Bordag, A. R. Its, and W. B. Matveev, *Phys. Lett.* **63A**, 205 (1977).
32. N. Papanicolaou and P. N. Spathis, *Nonlinearity* **12**, 285 (1999).
33. С. В. Бирюков, Ю. В. Гуляев, В. В. Крылов, В. П. Плесский, *Поверхностные акустические волны в неоднородных средах*, Москва, Наука (1991).

Many-dimensional and surface solitons
in nonlinear elastic medium

A. S. Kovalev, E. S. Syrkin, and J. A. Maugin

Nonlinear shear waves in two-dimensional systems (in particular, surface waves) are investigated under taking into account the spatial dispersion of elastic medium. It is shown that the dispersion plays an important role in structural and modulation stability of nonlinear waves and largely governs the directions of localization of phonons in nonlinear localized waves, in particular, it governs the possibility of an existence of elastic surface solitons. With asymptotic procedure the solutions were found for small-amplitude two-dimensional elastic shear one-parametrical soliton with stationary profile, envelope solitons and surface solitons localized near the perfect surface of elastic half-space. Such localized excitations are possible only in the medium with «focusing» (soft) nonlinearity and a positive dispersion $\partial^2\omega/\partial k^2 > 0$ where $\omega(k)$ — dispersion relation for linear waves. The procedure of finding the solutions for envelope surface solitons localized near the surface coated with a film of another material is proposed. A comparison of a structure of surface shear solitons near the perfect surface and surface with a film coating is provided.