

Асимметрия релаксационных процессов и рождение высокоэнергичных фононов в анизотропных фононных системах He II

И. Н. Адаменко, К. Э. Немченко

Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина, пл. Свободы 4, г. Харьков, 61077, Украина
E-mail: adamenko@pem.kharkov.ua

A. F. G. Wyatt

School of Physics, University of Exeter, Exeter, EX4 4QL, UK
E-mail: a.f.g.wyatt@exeter.ac.uk

Статья поступила в редакцию 18 октября 2001 г.

Исследованы процессы релаксации в анизотропных фононных системах в сверхтекучем гелии. Получены зависимости от импульса, температуры и параметра анизотропии для частот рождения и уничтожения высокоэнергичных фононов (h -фононов) во всех возможных процессах в анизотропной фононной системе. Выявлены физические причины асимметрии рождения и уничтожения h -фононов. Исследованы все процессы взаимодействия h -фононов с низкоэнергичными фононами (l -фононами) и h -фононов друг с другом, а также определена роль каждого из этих процессов в формировании функции распределения h -фононов. С учетом всех процессов, не сохраняющих полное число h -фононов, получено уравнение, которое описывает изменение плотности энергии h -фононов в основном пучке, и найдено квазистационарное решение этого уравнения. Получено уравнение, описывающее остывание пучка l -фононов вследствие рождения h -фононов и увеличения объема пучка при его движении. Решение этого уравнения позволило найти плотность энергии рожденных h -фононов в любой точке пространства в произвольный момент времени и плотность энергии l -фононов в основном пучке.

Досліджено процеси релаксації в анізотропних фононних системах в надплинному гелію. Знайдено залежності від імпульсу, температури та параметра анізотропії для частот народження і знищення високоенергетичних фононів (h -фононів) в усіх можливих процесах в анізотропній фононній системі. З'ясовано фізичні причини асиметрії народження і знищення h -фононів. Досліджено усі процеси взаємодії h -фононів з низкоенергетичними фононами (l -фононами) та h -фононів один з одним, а також визначено значення кожного з цих процесів у формуванні функції розподілу h -фононів. З урахуванням усіх процесів, які не зберігають повну кількість h -фононів, здобуто рівняння, яке описує зміну густини енергії h -фононів у основному пучкові, та знайдено квазістаціонарний розв'язок цього рівняння. Здобуто рівняння, яке описує холонення пучка l -фононів внаслідок народження h -фононів та збільшення об'єму пучка при його рухові. Розв'язок цього рівняння дає змогу знайти густину енергії народжених h -фононів у будь-якій точці простору в довільний момент часу та густину енергії l -фононів у основному пучкові.

PACS: 67.40.Pm

1. Введение

Взаимодействие фононов в сверхтекучем ${}^4\text{He}$ (He II) определяется зависимостью энергии фонона ε от импульса \mathbf{p} , которую запишем в виде

$$\varepsilon_i = c(p_i + f_i), \quad (1)$$

где c — скорость фонона, $f_i \equiv f(p_i)$ — функция, описывающая отклонение от линейной зависимости. Это отклонение является малым ($f_i \ll p_i$), но именно оно определяет различные механизмы релаксации в фононной системе He II.

При импульсах p_i , меньших критического значения p_c , функция $f_i(p_i < p_c) > 0$ (аномальная дисперсия). При давлении насыщенного пара $cp_c/k_B = 10$ К [1,2]. В случае аномальной дисперсии законы сохранения энергии и импульса разрешают процессы с несохранением числа фононов. Самым быстрым из них является трехфононный процесс ($3pp$), когда один фонон распадается на два или в результате взаимодействия двух фононов получается один. Частота такого процесса ν_{3pp} в предельных случаях была получена в [3,4], а в общем случае вычислена в [5].

При $p_i > p_c$ функция $f_i < 0$. В этом случае дисперсия является нормальной и трехфононные процессы запрещены законами сохранения энергии и импульса. В итоге для высокоэнергичных фононов (h -фононов) с $p_i > p_c$ самым быстрым является четырехфононный процесс ($4pp$), в котором выполняются законы сохранения энергии

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon_3 + \varepsilon_4 \quad (2)$$

и импульса

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4. \quad (3)$$

Здесь и далее мы будем предполагать, что фонон «1» имеет импульс $p_1 \geq p_c$ (т.е. является h_1 -фононом), в то время как остальные три фонона могут быть как h -фононами, так и низкоэнергичными фононами (l -фононами), когда $p_i < p_c$.

Частоту трехфононного процесса ν_{3pp} можно рассчитать из гамильтониана Ландау [6] в первом порядке теории возмущения, а частоту четырехфононных процессов — во втором порядке теории возмущения. В связи с этим реализуется сильное неравенство

$$\nu_{3pp} \gg \nu_{4pp}. \quad (4)$$

В итоге фононы сверхтекучего гелия образуют две подсистемы с существенно различными временами релаксаций:

1) подсистема l -фононов с $p_i < p_c$, в которой равновесие наступает быстро;

2) подсистема h -фононов с $p_i > p_c$, в которой равновесие наступает относительно медленно.

Трехфононные процессы являются малоугловыми. Поэтому в изотропных фононных системах они обеспечивают установление равновесия только в заданном направлении. В итоге термодинамические параметры l -фононов оказываются функциями направления [7]. Установление полного равновесия в системе l -фононов в изотропном случае обеспечивается четырехфононными процессами и диффузией в пространстве углов, обусловленной трехфононными процессами [8–10].

Иная ситуация реализуется в сильноанизотропных фононных системах, когда импульсы всех фононов заключены в узком конусе с телесным углом Ω_p порядка характерного угла трехфононных процессов. В этом случае наличие двух фононных подсистем приводит к уникальным свойствам анизотропных фононных систем He II, которые наблюдались в экспериментах [11–15]. Теоретическое описание анизотропных фононных систем было впервые проведено в работах [16,17].

Системы с сильноанизотропным распределением фононов в импульсном пространстве создавались в жидком гелии, который имел столь низкую температуру, что наличием тепловых возбуждений в нем можно было пренебречь [11–15]. В такую чистую и изотропную сверхтекучую жидкость (сверхтекучий вакуум) с помощью нагревателя инжестировались фононы, которые двигались в направлении нормали к поверхности нагревателя. При этом в импульсном пространстве все фононы находились только в узком конусе с телесным углом $\Omega_p \ll 1$.

Экспериментальная установка [11–15] для исследований свойств сильноанизотропных фононных систем содержит нагреватель и детектор, погруженные в жидкий ${}^4\text{He}$ при нулевом давлении и температуре порядка 0,05 К. Нагревателем является металлическая пленка, напыленная на стекло. Когда импульс тока проходит через металлическую пленку в сверхтекучий гелий (сверхтекучий вакуум), инжестировается фононный импульс, который движется к детектору. Для случая, когда нагревателем является золотая пленка, все инжестированные фононы занимают в импульсном пространстве телесный угол $\Omega_p = 0,125$ ср [14]. Размеры такой сильноанизотропной системы в координатном пространстве определяются площадью нагревателя и длительностью теплового импульса.

Для тепловых импульсов продолжительностью порядка 10^{-7} с при выделяемой на нагревателе мощности порядка $10 \text{ мВ}\cdot\text{мм}^{-2}$ одиночный фононный импульс на нагревателе давал два фононных импульса на детекторе [13]. Возникновение двух импульсов на детекторе, как отмечалось в [14,16], объясняется зависимостью (1) и неравенством (4). Быстрые трехфононные процессы приводят к тому, что l -фононы движутся как единое целое со скоростью $c = 238 \text{ м/с}$ и дают на детекторе первый узкий импульс. Групповая скорость h -фононов меньше, чем 190 м/с . Разница в групповых скоростях l - и h -фононов приводит к тому, что h -фононы образуют второй импульс, который движется к детектору с меньшей скоростью и уширяется за счет слабого взаимодействия и относительно большой дисперсии h -фононов.

Проведенные впоследствии эксперименты [18,19] неопровержимо указывали на то, что приходящие на детектор h -фононы не инжектируются нагревателем вместе с l -фононами, а рождаются в основном пучке l -фононов. Возникал вопрос: как холодный пучок l -фононов с температурой порядка 1 К может рождать h -фононы, энергия которых $\varepsilon \geq 10 \text{ К}$ на порядок больше температуры основного пучка? Ответ на этот вопрос дала теория, предложенная в [16,17].

Последующее развитие теории [20–22] показало, что в анизотропных фононных системах времена релаксаций h -фононов существенно отличаются от времен в обычных изотропных фононных системах, когда в импульсном пространстве нет выделенного направления. В итоге, согласно сделанным в [22] оценкам, в анизотропных фононных системах стационарная функция распределения h -фононов по энергиям при $\varepsilon \approx \varepsilon_c$ на два порядка превышает распределение Бозе–Эйнштейна и имеет другую импульсную зависимость.

В работе [22] были вычислены частоты рождения и уничтожения для первых двух процессов, когда h -фононы взаимодействуют только с l -фононами (см. разд. 3). В настоящей работе приводятся результаты вычислений частот рождения и уничтожения в сильноанизотропных фононных системах для всех пяти процессов, описывающих взаимодействие h -фононов с l -фононами и h -фононов друг с другом. Это позволило рассмотреть трансформацию l -фононов в h -фононы с учетом всех пяти процессов. Кроме того, в отличие от [16,17], нами учтено увеличение объемов, занимаемых пучками l - и h -фононов. Согласно полученным в этой статье результатам, учет изменения объема оказывается существенным при сопоставлении расчетных значений с экспериментальными

данными [11–15], полученными с использованием нагревателей площадью порядка 1 мм^2 , расстояние от нагревателя до детектора превышало 10 мм .

2. Асимметрия процессов рождения и уничтожения h -фононов в анизотропных фононных системах

Сильное неравенство (4) и все характерные времена задачи позволяют считать, что установление равновесия в подсистеме l -фононов происходит мгновенно и их распределение по энергиям описывается функцией Бозе–Эйнштейна:

$$n_i^{(0)} = (e^{\varepsilon_i/T} - 1)^{-1}. \quad (5)$$

Установление равновесия в подсистеме h -фононов описывается кинетическим уравнением

$$\frac{dn_i}{dt} = N_b - N_d. \quad (6)$$

Здесь $n_i \equiv n(\mathbf{p}_i)$ — функция распределения фононов с импульсом \mathbf{p}_i ;

$$N_b = \int_{\Omega_b} W n_3 n_4 (1 + n_1)(1 + n_2) \delta(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4) \times \\ \times \delta(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_4) d^3 p_2 d^3 p_3 d^3 p_4 \quad (7)$$

— увеличение числа h_1 -фононов с импульсом \mathbf{p}_1 в единицу времени, обусловленное четырехфононным взаимодействием;

$$N_d = \int_{\Omega_d} W n_1 n_2 (1 + n_3)(1 + n_4) \delta(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4) \times \\ \times \delta(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_4) d^3 p_2 d^3 p_3 d^3 p_4 \quad (8)$$

— уменьшение числа h_1 -фононов в единицу времени; $W = W(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 | \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4)$ — функция, определяемая плотностью вероятности перехода; Ω_b и Ω_d — набор максимально возможных значений угловых переменных Ω_{bi} и Ω_{di} ($i = 2, 3, 4$) фононов, принимающих участие соответственно в процессах рождения (b) и уничтожения (d) фононов с импульсом \mathbf{p}_1 . В изотропном случае $\Omega_{bi} = \Omega_{di} = 4\pi$. В анизотропном случае Ω_{bi} и Ω_{di} определяются Ω_p .

Согласно (6), стационарное состояние подсистемы h -фононов определяется равенством

$$N_b = N_d. \quad (9)$$

В изотропном случае, когда $\Omega_b = \Omega_d$, из соотношений (7)–(9) получаем уравнение

$$n_3 n_4 (1 + n_1)(1 + n_2) = n_1 n_2 (1 + n_3)(1 + n_4). \quad (10)$$

Решением уравнения (10), с учетом (2) и (3), является распределение Бозе–Эйнштейна (5).

Определим частоту рождения $v_b^{(n)}$ и уничтожения $v_d^{(n)}$ фононов с импульсом \mathbf{p}_1 при произвольной функции распределения $n(\mathbf{p})$ равенствами

$$N_b = n_1^{(0)} v_b^{(n)}; \quad N_d = n_1 v_d^{(n)}. \quad (11)$$

Частоты рождения и уничтожения, вычисленные для бозе-эйнштейновского распределения (5) по формулам (7), (8) и (11), обозначим соответственно $v_b^{(0)}$ и $v_d^{(0)}$. В изотропной фононной системе, согласно (9), (10), эти частоты равны. Однако в анизотропной фононной системе, когда $\Omega_b \neq \Omega_d$, эти частоты не равны и, согласно (6), (11), их разность

$$v_b^{(0)} - v_d^{(0)} = \frac{1}{n_1^{(0)}} \frac{dn_1}{dt} \quad (12)$$

определяет относительную скорость изменения начального распределения Бозе–Эйнштейна в фононной системе.

Приведем результаты вычислений частот рождения $v_b^{(0)}$ и уничтожения $v_d^{(0)}$ фононов, импульс которых \mathbf{p}_1 направлен вдоль оси симметрии анизотропной фононной системы с $\Omega_p \ll 1$. В обозначении этих частот $v_{b,d}^{(0)}$ индекс (0) будем опускать.

Интегралы (7) и (8) запишем в сферической системе координат с полярной осью вдоль оси симметрии z фононной системы, так что $\mathbf{p}_i = (p_i, \theta_i, \varphi_i)$. В уравнениях (7) и (8) выполним интегрирование по переменным p_4 , φ_3 и φ_4 , используя δ -функции. Интегрирование по φ_2 приводит к достаточно сложным интегралам, содержащим специальные функции. Ситуация существенно упрощается, если $\theta_1 = 0$. В этом случае из соотношений (7), (8) и (11) для частот рождения (b) и уничтожения (d) фонона, движущегося вдоль оси z , получаем

$$v_{b,d} = \int dp_2 \int dp_3 \int_0^{\zeta_{b,d}^{(2)}} d\zeta_2 \int_0^{\zeta_{b,d}^{(3)}} d\zeta_3 \int_0^{\zeta_{b,d}^{(4)}} d\zeta_4 W \frac{n_0}{c} \times$$

$$\times \delta(p_2 \zeta_2 - p_3 \zeta_3 - p_4 \zeta_4 - \Phi) p_2^2 p_3^2 p_4^2 \frac{8\pi}{\sqrt{R}} \eta(R), \quad (13)$$

где верхние пределы интегрирования по переменным $\zeta_i = 1 - \cos \theta_i$ определяются параметром анизотропии

$$\zeta_p = 1 - \cos \theta_p = \frac{\Omega_p}{2\pi} \quad (14)$$

и равны

$$\zeta_b^{(2)} = 2, \quad \zeta_b^{(3)} = \zeta_p, \quad \zeta_b^{(4)} = \zeta_p, \quad (15)$$

$$\zeta_d^{(2)} = \zeta_p, \quad \zeta_d^{(3)} = 2, \quad \zeta_d^{(4)} = 2. \quad (16)$$

Функция $n_0 = n_2^{(0)}(1 + n_3^{(0)})(1 + n_4^{(0)})$ содержит функции распределения (5); $p_4 = p_1 + p_2 - p_3 - \Phi$ — функция независимых переменных p_2 и p_3 ;

$$\Phi = f_3 + f_4 - f_1 - f_2; \quad (17)$$

$\eta(R)$ — ступенчатая функция, равная единице при положительном значении аргумента и нулю при отрицательном,

$$R = 4p_{3\perp}^2 p_{4\perp}^2 - (p_{2\perp}^2 - p_{3\perp}^2 - p_{4\perp}^2)^2 \text{ и } p_{i\perp} = p_i \sin \theta_i.$$

Функция W была получена в [22] и равна

$$W = \frac{(u+1)^4}{2^7 \pi^5 \hbar^7 \rho^2} p_1 p_2 p_3 p_4 m^2, \quad (18)$$

где ρ — плотность жидкого гелия, $u = (\rho/c)(\partial c / \partial \rho)$ — постоянная Грюнайзена, а

$$m = \frac{(p_1 + p_2)^2}{\zeta_2 p_1 p_2 + (p_1 + p_2)(f_1 + f_2 - f_{1+2})} - \frac{(p_1 - p_3)^2}{\zeta_3 p_1 p_3 + (p_1 - p_3)(f_3 + f_{1-3} - f_1)} - \frac{(p_1 - p_4)^2}{\zeta_4 p_1 p_4 + (p_1 - p_4)(f_4 + f_{1-4} - f_1)} \quad (19)$$

— матричный элемент, отвечающий трем различным промежуточным состояниям.

Асимметрия процессов рождения и уничтожения в анизотропных фононных системах определяется разными верхними пределами интегрирования в (15) и (16) по переменным ζ_i . В силу этой асимметрии в (13) интегрирование с дельта-

функцией для v_b следует проводить по переменной ζ_2 с максимальным допустимым значением, а при получении v_d — по переменной ζ_4 .

Интегрируя (13) по переменной ζ_2 , получаем

$$v_b = N p_1 \int dp_2 \int dp_3 n_0 \frac{p_2^2 p_3^2 p_4^3}{|p_1 - p_4|} I_b. \quad (20)$$

Здесь

$$I_b = \int_0^{\zeta_p} d\zeta_3 \int_0^{\zeta_p} d\zeta_4 m^2 \frac{\pi^{-1}}{\sqrt{R_b}} \eta(R_b), \quad (21)$$

где

$$R_b = (\zeta_3 - \zeta_{3-}^{(b)})(\zeta_{3+}^{(b)} - \zeta_3), \quad (22)$$

$$\zeta_{3\pm}^{(b)} = \left(\frac{p_4}{p_1 - p_4} \right)^2 \left[\sqrt{\zeta_4} \pm \sqrt{p_1 p_2 / p_3 p_4} \sqrt{\zeta_4 - [(p_2 - p_3) / p_1 p_4] \Phi} \right]^2; \quad (23)$$

$$N = \frac{2(1+u)^4}{(4\pi)^3 \rho^2 \hbar^7 c}.$$

Интегрирование в (13) по переменной ζ_4 дает

$$v_d = N p_1 \int dp_2 \int dp_3 n_0 \frac{p_2^3 p_3^2 p_4^2}{p_1 + p_2} I_d. \quad (24)$$

Здесь

$$I_d = \int_0^{\zeta_p} d\zeta_2 \int_0^2 d\zeta_3 m^2 \frac{\pi^{-1}}{\sqrt{R_d}} \eta(R_d), \quad (25)$$

где

$$R_d = (\zeta_3 - \zeta_{3-}^{(d)})(\zeta_{3+}^{(d)} - \zeta_3); \quad (26)$$

$$\zeta_{3\pm}^{(d)} = \left(\frac{p_2}{p_1 + p_2} \right)^2 \left[\sqrt{\zeta_2} \pm \sqrt{p_1 p_4 / p_2 p_3} \sqrt{\zeta_2 - [(p_1 + p_2) / p_1 p_2] \Phi} \right]^2. \quad (27)$$

Согласно (27),

$$\zeta_2 \geq \zeta_{2 \min} = \frac{p_1 + p_2}{p_1 p_2} \Phi. \quad (28)$$

При $\Phi > 0$ процесс уничтожения возможен только в системах с

$$\zeta_p > \zeta_{2 \min}. \quad (29)$$

Согласно (23), процесс рождения h_1 -фонона возможен в случае, когда

$$\zeta_4 \geq \zeta_{4 \min} = \frac{p_2 - p_3}{p_1 p_4} \Phi. \quad (30)$$

Неравенство (30) приводит к отличному от (29) ограничению на параметр анизотропии для процессов рождения:

$$\zeta_p > \zeta_{4 \min}. \quad (31)$$

В анизотропных фононных системах при определенных значениях p_1 возможна ситуация, при которой неравенство (29) не выполняется, а (31) удовлетворяется. В этом случае время жизни таких h_1 -фононов будет бесконечным, а частота рождения отличной от нуля (см. рис. 1,а). В итоге число таких h_1 -фононов будет увеличиваться и только другие процессы могут обеспечить стационарное состояние в подсистеме h -фононов. Отметим, что соотношения (28) и (30) можно получить из законов сохранения (2), (3), поскольку равенства (27) и (23) являются результатами интегрирования (13) с дельта-функциями, содержащими закон сохранения энергии (2) и импульса (3).

Ограничение (31) для рождения h_1 -фононов в большинстве рассмотренных ниже случаев является более слабым, чем (29). Кроме того, соотношение (20) содержит в знаменателе разность $|p_1 - p_4|$, а соотношение (24) — сумму $(p_1 + p_2)$. Поэтому в большинстве случаев частота v_b оказывается больше частоты v_d . В итоге стационарная функция распределения h -фононов по энергиям в сильноанизотропных фононных системах при $\varepsilon \approx \varepsilon_c$ существенно больше распределения Бозе-Эйнштейна и имеет другую импульсную зависимость.

Следует особо подчеркнуть, что такая асимметрия процессов рождения и уничтожения возникает только в сильноанизотропных фононных системах, когда $\zeta_p \ll 1$. В изотропных фононных системах, когда $\zeta_p = 2$, уравнение (20) даст

тот же результат, что и уравнение (24), поскольку они отличаются друг от друга только разными способами интегрирования уравнения (13), которое при $\zeta_p = 2$ является тождественным для процессов рождения и уничтожения. В итоге в изотропных фоновых системах стационарной функцией распределения является распределение Бозе-Эйнштейна.

3. Частоты рождения и уничтожения в сильноанизотропных фоновых системах

Возможны пять типов различных четырехфонных процессов взаимодействий h_1 -фонона с l -фононами и другими h -фононами:

$$\begin{aligned} 1) & h_1 + l_2 \leftrightarrow l_3 + l_4; \quad 2) h_1 + l_2 \leftrightarrow h_3 + l_4; \\ 3) & h_1 + l_2 \leftrightarrow h_3 + h_4; \quad 4) h_1 + h_2 \leftrightarrow h_3 + l_4; \\ 5) & h_1 + h_2 \leftrightarrow h_3 + h_4. \end{aligned} \quad (32)$$

Стрелка, направленная вправо, указывает на процесс распада, а влево — рождения h_1 -фонона.

Пределы интегрирования в (20) и (24) по переменным p_2 и p_3 определяются 1) типом процесса рождения или уничтожения; 2) законами сохранения (2) и (3); 3) знаком Φ , который определяет появление η -функций в подынтегральных выражениях (20) и (24), обусловленное неравенством (31) для процессов рождения и равенством (29) для процессов уничтожения.

После того как пределы интегрирования найдены, интегрирование выражений (20) и (24) можно выполнить численно и получить зависимости для частот рождения и уничтожения в процессах (32) от основных параметров задачи p_1 , T и θ_p . Полученные таким образом зависимости от p_1 при фиксированных характерных для экспериментов [14,15] значениях $T = 1$ К и $\theta_p = 11,4^\circ$ ($\zeta_p = 2 \cdot 10^{-2}$) приведены на рис. 1. При постоянных значениях температуры и p_1 все частоты являются монотонно убывающими функциями параметра ζ_p . На рис. 1,а для первого процесса приведено значение частоты в изотропном случае:

$$\begin{aligned} v_{\text{isotr}} &= v_{b1}(\zeta_p = 2, T = 1 \text{ К}) = \\ &= v_{d1}(\zeta_p = 2, T = 1 \text{ К}). \end{aligned} \quad (33)$$

При фиксированных значениях p_1 и ζ_p все частоты являются монотонно убывающими функциями температуры.

Для того чтобы объяснить физические причины полученных зависимостей для частот рождения и уничтожения, необходимо наряду с компьютерными выполнить и аналитические расчеты по формулам (20), (21) и (24), (25). Такие расчеты для процессов первого и второго типов из (32) выполнены в [22]. Поскольку для третьего, четвертого и пятого типов процессов аналитические расчеты проводятся аналогично [22], мы опишем только основные этапы и результаты расчетов.

В выражении (25) интегрирование можно выполнить по обоим переменным ζ_2 и ζ_3 и получить результат [22], содержащий элементарные функции. Однако ввиду громоздкости, его очень сложно использовать для дальнейших аналитических расчетов в (24). Выражение (21) можно проинтегрировать по переменной ζ_3 . Дальнейшее интегрирование по переменной ζ_4 при $\zeta_p \ll 1$ не удастся выполнить в терминах элементарных функций. В связи с этим была проведена аналитическая аппроксимация интегралов (21) и (25) путем вычислений, суть которых излагается ниже.

Для каждого из пяти процессов рождения $j = b1, b2, b3, b4, b5$ и уничтожения $j = d1, d2, d3, d4, d5$ находили значения всех типичных углов $\zeta_{ti}^{(j)}$ ($i = 2, 3, 4$). Углы $\zeta_{ti}^{(j)}$ при $\zeta_p \ll 1$ вычисляли исходя из выражений (23), (27) и дельта-функции, содержащейся в (13). Затем в выражениях (21) и (25) ζ_i заменяли их типичными значениями $\zeta_{ti}^{(j)}$. После этого выполняли интегрирование.

Аналитические аппроксимации (21) и (25) подставляли соответственно в (20) и (24). При этом для функций f_i , содержащихся в (13), (21), (25), использовали аналитическую аппроксимацию, предложенную в [22]. Полученные таким образом интегралы (20) и (24) не удается выразить через элементарные функции. Поэтому и в этом случае аналитическую аппроксимацию выполняли по аналогичной схеме. В подынтегральных выражениях (20) и (24) в слабоменяющихся функциях от p_2 и p_3 аргументы заменяли их типичными значениями p_{2t} и p_{3t} . После этого выполняли интегрирование по переменным p_2 и p_3 .

Полученные таким образом аналитические выражения для всех десяти частот дают численные значения, близкие к результатам компьютерных расчетов. Не будем здесь выписывать эти аналитические выражения. Ограничимся только кратким обсуждением следующих из них физических причин зависимостей от параметров p_1 , ζ_p и T , которые наблюдаются для частот рождения и уничтожения.

Исключительно важным в формировании функции распределения h -фононов является первый процесс, в котором происходит обмен фононами между h - и l -подсистемами. Как будет показано ниже, именно первый процесс в основном определяет трансформацию l -фононов в h -фононы, которая приводит к возникновению регистрируемого в [13] пучка h -фононов, созданного основным пучком l -фононов.

Наблюдаемое на рис. 1,а уменьшение v_{b1} с ростом p_1 определяется импульсной зависимостью матричного элемента m (19), содержащегося в (21). Неравенство $v_{b1} \ll v_{\text{isotr}1}$ и его усиление с ростом p_1 обусловлено сильной анизотропией системы ($\zeta_p \ll 1$) и ограничением (31). В отличие от изотропного случая (33) при $\zeta_p \ll 1$ частота рождения оказывается существенно больше частоты уничтожения. При реализуемых в экспериментах [15] значениях $\theta_p = 11,4^\circ$ ($\zeta_p = 2 \cdot 10^{-2}$) и $T = 1$ К минимальное отношение $(v_{b1}/v_{d1})_{p_1=p_c} = 30$ и обращается в бесконечность при $cp_1/k_B = cp_0/k_B \approx 11$ К. Столь разные значения и импульсная зависимость частот v_{b1} и v_{d1} , наблюдаемые на рис. 1,а, определяются сильной анизотропией системы и тем, что в первом процессе всегда $p_1 > p_2$ и $\Phi > 0$. В результате при $\zeta_p \ll 1$ неравенство (29) приводит к существенно большим ограничениям, чем (31). Так, согласно (30), при любом p_1 всегда найдутся такие p_2 и p_3 , при которых реализуется неравенство (31) и частота v_{b1} отлична от нуля при любых p_1 . Ситуация оказывается иной для процесса уничтожения, когда, согласно (28), существует такой импульс $p_1 = p_0$, начиная с которого неравенство (29) не удовлетворяется. В итоге $v_{d1}(p_1 > p_0) = 0$ и время жизни таких фононов, обусловленное первым процессом, оказывается бесконечным.

Аналитическое выражение для p_0 можно получить из соотношений (28) и (29) следующим образом. Разложим содержащиеся в Φ (17) функции f_i вблизи характерных значений импульсов: функции $f_{1,3}$ вблизи p_c , а f_4 вблизи p_2 . Найдем минимальное значение $\zeta_{2 \text{ min}}$, подставив в правую часть (28) максимальное значение импульса p_2 , которое для первого процесса, согласно (2), равно $p_{2 \text{ up}} = 2p_c - p_1$. Исходя из (29) получаем уравнение

$$\zeta_p = \zeta_{2 \text{ min}}(p_2 = p_{2 \text{ up}}; p_1 = p_0),$$

которое позволяет оценить сверху величину p_0 :

$$p_0 = p_c \left(1 + \sqrt{\zeta_p c / 2p_c} \left| \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial p^2} \right|_{p=p_c}^{-1/2} \right). \quad (34)$$

Для $\zeta_p = 2 \cdot 10^{-2}$ соотношение (34) дает значение $cp_0/k_B = 11$ К, которое совпадает с результатом компьютерного расчета, приведенного на рис. 1,а.

Бесконечное время жизни и конечная частота рождения фононов с $p_1 > p_0$ приводят к тому, что в анизотропной фононной системе первый процесс не может обеспечить динамическое равновесие между подсистемами h - и l -фононов. Такое равновесие обеспечивают другие процессы.

Для второго процесса, как это следует из рис. 1,б, по указанным выше причинам практически во всей области импульсов $v_{b2} > v_{d2}$. В отличие от первого процесса v_{d2} не обращается в нуль ни при каких значениях p_1 , поскольку во втором процессе при $p_1 < p_3$ функция $\Phi < 0$ и ограничение (29) отсутствует, так как при этом, согласно (28), $\zeta_{2 \text{ min}} < 0$.

Во втором процессе сохраняется полное число h -фононов. В силу этого очевидно, что по мере отклонения импульса p_1 от оси симметрии z анизотропной фононной системы (с ростом θ_1) v_{b2} должно уменьшаться, а v_{d2} увеличиваться так, что начиная с некоторого значения $\theta_1 = \theta_{c1}$ частота рождения h_1 -фононов должна стать меньше частоты уничтожения. В итоге второй процесс будет приводить к концентрации h -фононов в импульсном пространстве вблизи оси z .

Пятый процесс (рис. 1,д) во многом аналогичен второму. Функция Φ (17) в зависимости от соотношений между импульсами фононов, участвующих в пятом процессе, может иметь различные знаки. В пятом процессе, как и во втором, сохраняется полное число h -фононов и он также приводит к концентрации h -фононов в импульсном пространстве вблизи оси z .

Явление концентрации h -фононов вблизи оси z было обнаружено в экспериментах [14] для движения h -фононов в конусе с углом 4° , в то время как l -фононы двигались в конусе с углом $11,4^\circ$.

В третьем процессе (рис. 1,в) $v_{b3} > v_{d3}$, так как при всех значениях импульсов функция $\Phi > 0$ и всегда реализуется ограничение (29). Частоты v_{b3} и v_{d3} стремятся к нулю при $p_1 \rightarrow p_c$, поскольку при этом стремится к нулю объем импульсного пространства переменной p_3 , который в третьем процессе определяется неравенством $p_c \leq p_3 \leq p_1$. По этой же причине при $p_1 \rightarrow p_c$ обращается в нуль частота v_{b5} (рис. 1,д) и умень-

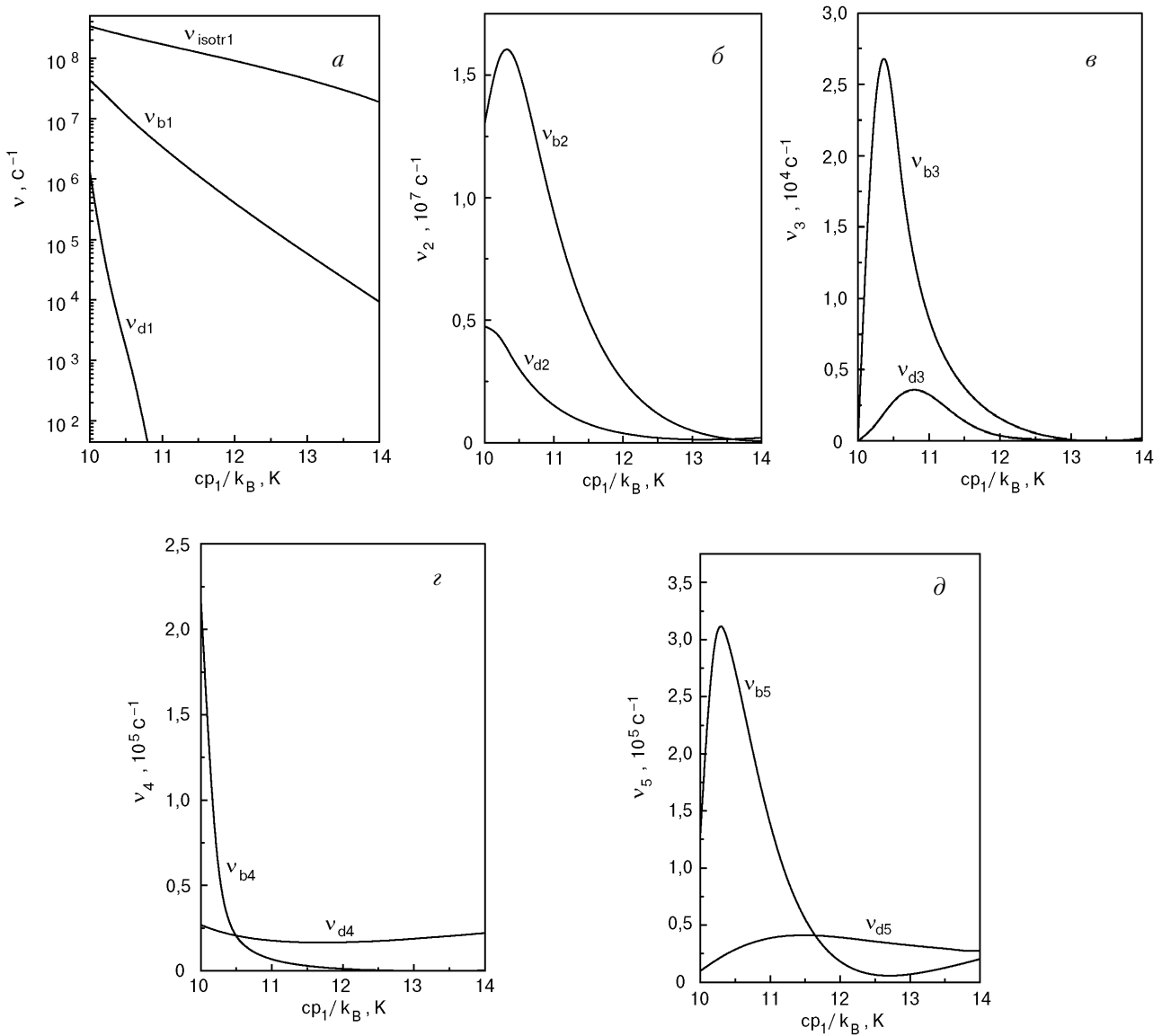


Рис. 1. Зависимость от импульса частот рождения и уничтожения при $T = 1$ К и $\theta_p = 11,4^\circ$ для пяти типов процессов (а, б, в, г, д соответственно).

шаются частоты v_{d5} (рис. 1,д) и v_{b2} (рис. 1,б). Наличие максимума на импульсной зависимости этих частот и их дальнейшее монотонное убывание с ростом импульса, как и монотонно спадающий характер импульсной зависимости остальных частот (рис. 1), в основном определяется импульсной зависимостью матричного элемента m (19). Уменьшение величины m с увеличением импульса объясняется взаимной компенсацией различных слагаемых в (19). При этом в ряде случаев, для $cp_1/k_B > 13$ К, такая компенсация нарушается, и матричный элемент становится возрастающей функцией импульса. Это, в частности, приводит к минимуму на импульсной зависимости частот v_{d4} (рис. 1,г) и v_{b5} (рис. 1,д).

Наряду с первым процессом важную роль в формировании функции распределения h -фононов в анизотропных фононных системах играет четвертый процесс. В этом процессе (рис. 1,г) $v_{d4} > v_{b4}$ как раз в той области импульсов, где $v_{d1} = 0$. Такой результат обусловлен тем, что при любых соотношениях между импульсами фононов, участвующих в четвертом процессе, всегда функция $\Phi < 0$. В итоге для процессов уничтожения, согласно (28), ограничение (29) отсутствует, в то время как для процессов рождения ограничение (31), согласно (30), реализуется при $p_2 < p_3$. При этом следует иметь в виду, что в отличие от v_{b1} по мере роста числа h -фононов частота $v_{d4}^{(n)}$ увеличивается и в стационарном состоянии окажется существенно больше v_{d4} , вычисленной для

распределения Бозе–Эйнштейна. Это обстоятельство приводит к появлению соответствующего множителя, который содержит частоту уничтожения для четвертого процесса, в выражении для среднего значения плотности энергии h -фононов в квазистационарном случае (см. разд. 5).

Частоты рождения и уничтожения всех пяти процессов монотонно уменьшаются по мере понижения температуры. Так, в представляющей интерес для экспериментов [11–15] области температур от 1 до 0,7 К частоты ν_{b1} и ν_{d1} уменьшаются соответственно в ≈ 5 и ≈ 6 раз, ν_{b2} и ν_{d2} — в ≈ 9 и ≈ 6 раз, ν_{b3} и ν_{d3} — в ≈ 70 и ≈ 65 раз, ν_{b4} и ν_{d4} — в ≈ 80 и ≈ 95 раз и частоты ν_{b5} и ν_{d5} — в ≈ 85 и ≈ 100 раз.

Температурная зависимость является более сильной для процессов, в которых принимают участие четыре h -фонона или три h -фонона и один l -фонон. В итоге для четвертого и пятого процессов в указанной области температур зависимость близка к $\exp(-10,5/T)$, а для третьего — к $\exp(-10/T)$. Такая температурная зависимость для процессов 3-, 4- и 5-го типов в основном обусловлена наличием функции n_0 в подынтегральных выражениях (20) и (24).

Во втором процессе участвуют два h -фонона и два l -фонона. В этом случае температурная зависимость частот выглядит более сложно [22], но в интервале $0,7 \text{ К} \leq T \leq 1 \text{ К}$ она достаточно хорошо аппроксимируется зависимостью $\exp(-5/T)$.

В первом процессе зависимость от температуры оказывается слабее, чем в остальных, поскольку здесь участвуют только один h_1 -фонон и три l -фонона. Для первого процесса, как и для второго, температурная зависимость является достаточно сложной [22], но при $0,7 \text{ К} \leq T \leq 1 \text{ К}$ она хорошо аппроксимируется функцией $\exp(-4/T)$.

Зависимость частот от ζ_p , во-первых, определяется тем, что в начальном состоянии фононы двигаются относительно оси z под углами, меньшими θ_p . Это требование приводит к линейной зависимости от ζ_p . Во-вторых, возникают дополнительные ограничения на объемы интегрирования в импульсном пространстве, обусловленные законами сохранения (2), (3) и неравенством $\zeta_p \ll 1$. Это ограничение приводит к дополнительной степенной зависимости от ζ_p и в ряде случаев оказывается достаточно жестким.

Указанные требования и ограничения приводят к тому, что частоты рождения и уничтожения в анизотропных фононных системах с $\zeta_p \ll 1$ оказываются существенно меньше, чем соответствующие частоты в изотропном случае.

4. Эволюция фононного пучка, созданного в He II нагревателем

Фононный пучок, созданный в экспериментах [11–15] с помощью нагревателя, является анизотропной фононной системой. Кратко опишем основные этапы эволюции такого фононного пучка.

Когда по металлической пленке, погруженной в жидкий гелий при $T \approx 0,05 \text{ К}$, пропускался импульс тока длительностью t_p , каждая точка нагретой пленки испускала в He II фононы в пределах узкого конуса с телесным углом Ω_p , величина которого определяется малым параметром c/c_s . Здесь c_s — скорость звука в веществе, из которого изготовлена пленка. В экспериментах [11–15] пленка была изготовлена из золота, для которого $\Omega_p = 0,125 \text{ ср}$, и использовались импульсы разной длительности от 10^{-8} до 10^{-5} с.

Излученные твердым телом фононы имеют функцию распределения [23]

$$n_s = A(e^{\varepsilon/T_s} - 1)^{-1}, \quad (35)$$

где $A \approx 4\pi c/\rho_s c_s \ll 1$, а T_s и ρ_s — соответственно температура и плотность твердого тела. Функция (35) является неравновесной относительно трехфононных процессов. Поэтому за время $\tau_{3pp} \approx 10^{-10}$ с l -фононы мгновенно (в масштабе t_p) приходят в состояние равновесия по энергиям и имеют распределение Бозе–Эйнштейна (5) с температурой $T = A^{1/4} T_s$, которая в экспериментах [11–15] была порядка 1 К. При этом рожденные нагревателем h -фононы в основном гибнут в так называемом «фоне» [18], который образуется вблизи нагревателя, в частности, за счет неидеальности его поверхности [24,25]. Экспериментальные исследования такого «фона» были проведены в работах [26,27].

Сформировавшийся пучок l -фононов с функцией распределения по энергиям (5) движется к детектору как единое целое ($\tau_{3pp} \ll t_p$) со скоростью $c = 238 \text{ м/с}$. Однако такая анизотропная фононная система, содержащая только l -фононы, не является равновесной, поскольку равновесная функция распределения должна еще содержать и «хвост», образованный h -фононами. Поэтому основная часть пучка, состоящая из l -фононов, создает этот «хвост» с частотой ν_{b1} (см. рис. 2).

Рожденные h -фононы имеют групповую скорость $c_h \approx 190 \text{ м/с}$, меньшую c , и относительно слабо ($\nu_{3pp} \gg \nu_{4pp}$) связаны с l -фононами. В итоге h -фононы покидают основной пучок через его заднюю плоскость. Уход h -фононов приводит к их дефициту в основном пучке, который l -фононы компенсируют, образуя новые h -фононы с час-

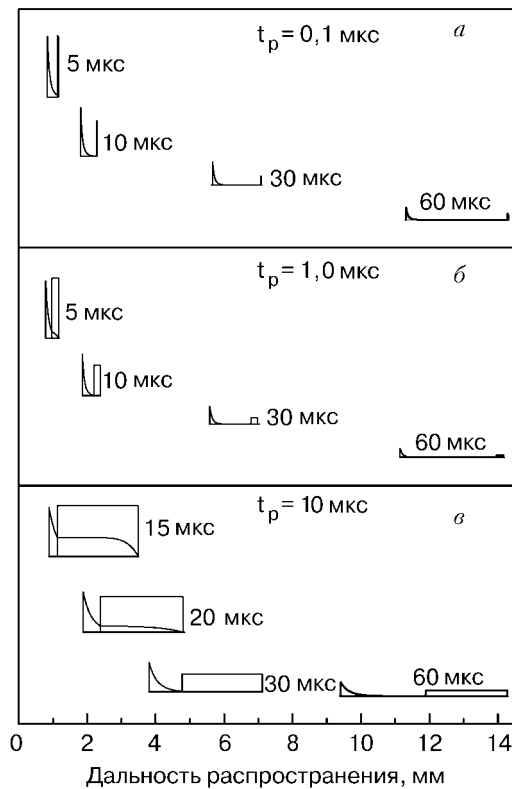


Рис. 2. Эволюция пучков l - и h -фононов при их распространении от нагревателя к детектору для импульсов длительностью t_p , мкс: 0,1 (а); 1,0 (б); 10 (в).

тотой v_{b1} . Вновь образованные h -фононы покидают пучок и т.д.

Интенсивность процесса рождения h -фононов в основном пучке зависит от температуры l -фононов, которая уменьшается со временем по двум причинам. Во-первых, за счет трансформации l -фононов в h -фононы. Во-вторых, в условиях эксперимента [11–15] пучок относительно быстро остывает вследствие увеличения его объема, которое происходит при движении фононов в конусе с телесным углом Ω_p . При достаточно низкой температуре ($T < 0,7$ К) трансформацией l -фононов в h -фононы можно пренебречь [16,17]. Тогда в гелии распространяются импульсы l - и h -фононов, которые независимо друг от друга движутся к детектору с разными скоростями. Последовательность описанных выше событий показана на рис. 2 для трех различных значений t_p .

5. Плотность энергии h -фононов в пучке

Представляют несомненный интерес эксперименты, которые бы свидетельствовали об асимметрии процессов рождения и уничтожения в анизотропных фононных системах. Согласно результатам

разд. 3, такая асимметрия приводит к большим значениям плотности h -фононов в достаточно длинных фононных пучках, которые, возможно, будут наблюдаться в экспериментах. Для планирования таких экспериментов большое значение имеет расчет плотности энергии h -фононов в пучках разной длины, что и является целью данного раздела.

Процесс трансформации l -фононов в h -фононы описывается кинетическим уравнением (6), которое в системе координат, движущейся с пучком l -фононов, запишем в виде

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} + \mathbf{u}_1 \nabla n_1 = n_1^{(0)} \sum_{i=1}^5 v_{bi}^{(n)} - n_1 \sum_{i=1}^5 v_{di}^{(n)}, \quad (36)$$

где $\mathbf{u}_1 = \mathbf{c}_1 - \mathbf{c}$ — относительная скорость движения h_1 - и l -фононов.

Умножим уравнение (36) на энергию ϵ_1 и выполним интегрирование по импульсному пространству h -фононов $0 \leq \Omega_1 \leq \Omega_p$, $p_c \leq p_1 \leq \infty$. В итоге получаем уравнение для плотности энергии h -фононов E_h в основном пучке:

$$\frac{\partial E_h}{\partial t} + u_c \frac{\partial E_h}{\partial z_p} = E_h^{(0)} \bar{v}_{b1} - E_h v_d^{(1)} - \frac{E_h^2}{E_h^{(0)}} v_d^{(2)}. \quad (37)$$

Ввиду экспоненциальной зависимости функции распределения от энергии можно считать, что средняя скорость $u_c = c - c_c \approx 50$ м/с, где $c_c = c_h (p_1 = p_c)$;

$$E_h^{(0)} = \frac{\Omega_p k_B^4 T \epsilon_c^3}{(2\pi \hbar c_c)^2} e^{-\epsilon_c/T} \quad (38)$$

— плотность энергии h -фононов с бозе-эйнштейновской функцией распределения по энергиям (5). В (37) использовано одномерное приближение с осью z_p , направленной антипараллельно движению пучка, и введены средние частоты \bar{v} так, чтобы их можно было считать не зависящими от E_h :

$$\bar{v}_{b1} = \frac{1}{E_h^{(0)}} \int \epsilon_1 n_1^{(0)} v_{b1}^{(0)} d\Gamma_1, \quad \text{где } d\Gamma_1 = \frac{d^3 p_1}{(2\pi \hbar)^3}; \quad (39)$$

$$v_d^{(1)} = \bar{v}_{d1} + \bar{v}_{d3} - \bar{v}_{b4}, \quad \text{где } \bar{v}_{d1} = \frac{1}{E_h} \int \epsilon_1 n_1 v_{d1}^{(0)} d\Gamma_1; \quad (40)$$

$$\bar{v}_{d3} = \frac{1}{E_h} \int \varepsilon_1 n_1 v_{d3}^{(0)} d\Gamma_1, \quad \bar{v}_{b4} = \frac{1}{E_h} \int \varepsilon_1 n_1^{(0)} v_{b4}^{(n)} d\Gamma_1; \quad (41)$$

$$v_d^{(2)} = \bar{v}_{d4} - \bar{v}_{b3}, \quad \text{где } \bar{v}_{d4} = \frac{E_h^{(0)}}{E_h^2} \int \varepsilon_1 n_1 v_{d4}^{(n)} d\Gamma_1; \quad (42)$$

$$\bar{v}_{b3} = \frac{E_h^{(0)}}{E_h^2} \int \varepsilon_1 n_1^{(0)} v_{b3}^{(n)} d\Gamma_1. \quad (43)$$

В соотношениях (39) и (41) учтено, что при $\varepsilon_c \gg T$ можно считать $v_{b1}^{(n)} = v_{b1}^{(0)}$ и $v_{d3}^{(n)} = v_{d3}^{(0)}$. В правой части равенства (37) не учтены вклады второго и пятого процессов, поскольку в них сохраняется полное число h -фононов.

Уравнение (37) дополним граничным условием, которое следует из анализа рассматриваемой ситуации. Объем пучка V ограничен плоскостями $z_p = 0$ и $z_p = L_p$. При этом h -фононы движутся относительно пучка от плоскости $z_p = 0$ к плоскости $z_p = L_p$. Следовательно,

$$E_h(z_p = 0, t) = 0. \quad (44)$$

После того как начальный, быстрый, этап формирования h -фононов в основном пучке закончится и энергия E_h будет медленно изменяться со временем, возникнет квазистационарная ситуация для h -фононов, при которой можно пренебречь первым слагаемым в левой части уравнения (37). В этом случае интегрирование уравнения (37) с граничным условием (44) даст распределение плотности энергии h -фононов в разных плоскостях z_p пучка при квазистационарной ситуации:

$$E_h(z_p) = E_h^{(0)} \frac{2\bar{v}_{b1}}{v_{\text{eff}} + v_d^{(1)}} \left[1 - \exp\left(-v_{\text{eff}} \frac{z_p}{u_c}\right) \right] \times \left[1 + \frac{v_{\text{eff}} - v_d^{(1)}}{v_{\text{eff}} + v_d^{(1)}} \exp\left(-v_{\text{eff}} \frac{z_p}{u_c}\right) \right]^{-1}, \quad (45)$$

где $v_{\text{eff}} = [v_d^{(1)2} + 4\bar{v}_{b1}v_d^{(2)}]^{1/2}$.

В достаточно длинных пучках, при $z_p \gg u_c/v_{\text{eff}}$, плотность энергии (45) достигает насыщения:

$$E_h^{(s)} = \frac{2\bar{v}_{b1}}{v_{\text{eff}} + v_d^{(1)}} E_h^{(0)}. \quad (46)$$

Полученная $E_h^{(s)}$ отличается от равновесной множителем, который можно оценить, если заменить содержащиеся в (46) частоты $\bar{v}_{b,di}$ ($i = 1, 2, 3$) соответствующими средними значениями частот, описанных в разд. 3:

$$\tilde{v}_{b,di} = \int_{p_c}^{\infty} n_1^{(0)} v_{b,di} p_1^2 dp_1 / \int_{p_c}^{\infty} n_1^{(0)} p_1^2 dp_1. \quad (47)$$

На рис. 3 приведены температурные зависимости $\tilde{v}_{b,di}$, рассчитанные по формуле (47) с аналитическими выражениями для частот $v_{b,di}$, которые были получены по схеме, описанной в разд. 3. Отсутствующие на рис. 3 средние значения частот третьего процесса находятся по приведенным данным для четвертого процесса с помощью равенств

$$\tilde{v}_{b3} = \frac{1}{2} \tilde{v}_{d4}; \quad \tilde{v}_{d3} = \frac{1}{2} \tilde{v}_{b4}. \quad (48)$$

Соотношения (48) получены путем переобозначения переменных интегрирования и отражают тот факт, что третий процесс является обратным четвертому.

При $T = 1$ К замена $\bar{v}_{b,di}$ на $\tilde{v}_{b,di}$ в соотношении (46) дает $E_h^{(s)}/E_h^{(0)} \approx 30$. Большое значение $E_h^{(s)}$ по

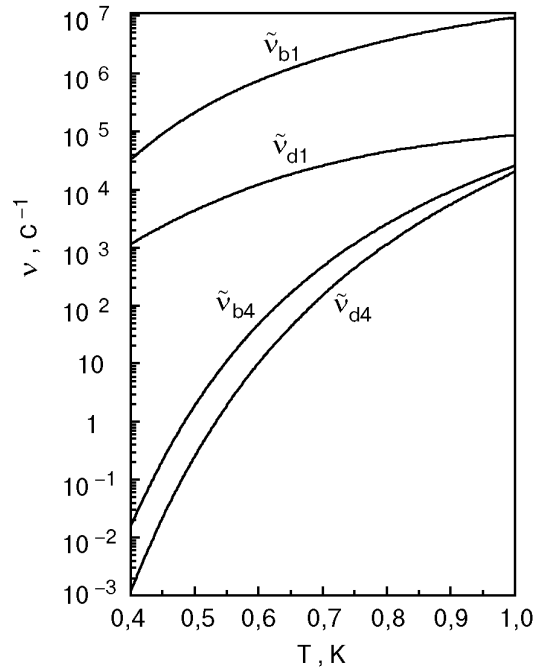


Рис. 3. Температурная зависимость средних значений частот.

сравнению с $E_h^{(0)}$, вычисленным для распределения Бозе–Эйнштейна (5), является следствием асимметрии процессов рождения и уничтожения в анизотропных фоновых системах, причины которой описаны в разд. 2.

6. Рождение h -фононов в пучке l -фононов

Амплитуда сигнала h -фононов на детекторе (левый импульс на рис. 2) определяется потоком энергии h -фононов в единицу времени с единицы площади плоскости $z_p = L_p$ основного пучка:

$$Q = u_c E_h(z_p = L_p). \quad (49)$$

Из уравнений (45) и (49) следует, что плотность потока энергии h -фононов Q вырастает по мере увеличения длительности импульса $t_p = L_p/c$ вплоть до максимального значения

$$Q_{\max} = u_c E_h^{(s)} \text{ при } L_p \gg u_c/v_{\text{eff}}. \quad (50)$$

Когда $t_p > u_c/cv_{\text{eff}}$, плотность потока энергии близка к максимальному значению (50) и при дальнейшем увеличении t_p меняется относительно слабо. Полученный результат согласуется с наблюдаемым в экспериментах [14] насыщением сигнала h -фононов при $t_p \approx 2 \cdot 10^{-7}$ с.

Остывание l -фононов в основном пучке и связанное с этим уменьшение потока h -фононов (49) описывается уравнением, выражающим закон сохранения энергии фононов:

$$\frac{\partial(E_l^{(0)}V)}{\partial t} = -\frac{V}{L} Q, \quad (51)$$

где $E_l^{(0)} = \Omega_p \pi k_B^4 T^4 / 120 \hbar^3 c^3$ – плотность энергии l -фононов с бозе-эйнштейновской функцией распределения (5) по энергиям. Согласно уравнению (51), температура l -фононов уменьшается по двум причинам. Во-первых, за счет потока энергии h -фононов через заднюю плоскость пучка. Во-вторых, вследствие увеличения объема $V = V(t)$ основного пучка при движении фононов к детектору в конусе с телесным углом Ω_p .

Объем V ограничен двумя плоскостями с координатами z_1 и z_2 и поверхностью конуса, образующая которого имеет угол θ_p относительно оси конуса z . Объем такого тела вращения при $\theta_p \ll 1$ равен

$$V = \pi \theta_p^2 (z_2^3 - z_1^3) \frac{1}{3}. \quad (52)$$

Учитывая, что в любой момент времени $z_2 - z_1 = L_p$, запишем выражение (52) в виде

$$V = \pi L_p \left(r_t^2 + r_t L_p \theta_p + \frac{1}{3} L_p^2 \theta_p^2 \right), \quad (53)$$

где $r_t = z_1 \theta_t = r + ct \theta_p$ – радиус задней поверхности пучка в момент времени t , а r – радиус поверхности нагревателя, который в экспериментах [11–15] равен 0,57 мм.

Подставляя (49), (53) в (51), получаем

$$\frac{\partial E_l^{(0)}}{\partial t} = -\frac{u_c}{L_p} E_h(z_p = L_p) - \frac{E_l^{(0)} c \theta_p (2r_t + L_p \theta_p)}{r_t^2 + r_t L_p \theta_p + L_p^2 \theta_p^2 / 3}. \quad (54)$$

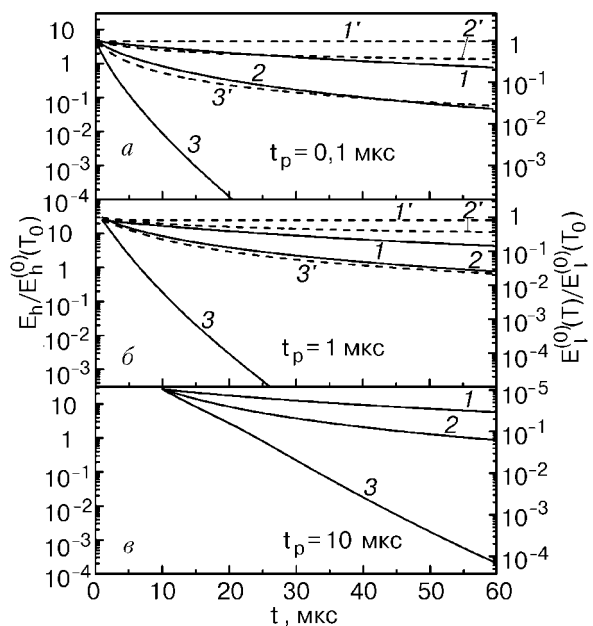


Рис. 4. Зависимость от времени движения относительной плотности энергий в пучках h - и l -фононов при импульсах различной длительности t_p , мкс: 0,1 (а); 1,0 (б); 10 (в). Кривая 1 – изменение относительной плотности энергии (левая ось) в конце пучка h -фононов (максимум левого импульса на рис. 2), связанное только с увеличением объема пучка h -фононов вследствие его движения в конусе с $\theta_p = 4^\circ$. Кривая 2 описывает остывание основного пучка l -фононов за счет потери энергии на образование h -фононов и увеличения объема пучка l -фононов при его движении в конусе с $\theta_p = 11,4^\circ$. Относительное значение плотности энергии в пучке l -фононов приведено на правой оси. Кривая 3 – уменьшение со временем относительной плотности энергии (левая ось) h -фононов на задней плоскости основного пучка l -фононов. Пунктирные кривые 1', 2' и 3' – изменения соответствующих относительных плотностей без учета увеличения объемов, занимаемых пучками h - и l -фононов.

Уравнение (54) и равенство (45) с учетом зависимостей частот от температуры позволяют вычислить в любой момент времени плотность h -фононов в любой точке пространства (см. рис. 2) и плотность энергии l -фононов в основном пучке.

На рис. 4 приведены результаты расчетов по формулам (54) и (45) зависимости от времени плотности энергии h -фононов в конце (сплошная кривая 1) и в начале (сплошная кривая 3) h -фононного пучка и плотности энергии l -фононов в основном пучке (сплошная кривая 2) при трех различных значениях t_p . При построении кривых 1 учитывалось увеличение объема пучка h -фононов, который, согласно экспериментальным данным [14], движется в конусе с $\theta_n = 4^\circ$.

На рис. 4 приведены также результаты расчетов соответствующих плотностей энергий (пунктирные линии) без учета расширения пучков l - и h -фононов. Пунктирная кривая 2' указывает на то, что в отсутствие расширения пучка большая доля энергии l -фононов уходит на образование h -фононов. Так, при $t_p = 0,1$ мкс в пучке с $T = 1$ К за время 10 мкс более 60% энергии l -фононов трансформируется в энергию рожденных h -фононов. В итоге основной пучок l -фононов остывает настолько ($T \leq 0,7$ К), что дальнейшая трансформация становится незначительной. Физическая причина столь интенсивной трансформации l -фононов в h -фононы при $T = 1$ К и ее резкое уменьшение при $T \leq 0,7$ К подробно описаны в [16,17].

Из сопоставления сплошных и пунктирных кривых 2 следует, что остывание пучка l -фононов вследствие расширения приводит к резкому снижению доли энергии l -фононов, трансформированной в энергию рожденных h -фононов. Быстрое остывание пучка l -фононов, обусловленное увеличением его объема, приводит к тому, что рождение h -фононов практически прекращается уже при малом удалении пучка от нагревателя, что соответствует результатам экспериментов [11–15]. Из развитой здесь теории очевидны способы повышения эффективности рождения h -фононов пучком l -фононов путем изменения условий эксперимента.

7. Заключение

Пучок фононов, движущийся в сверхтекучем гелии от нагревателя к детектору, является сильноанизотропной системой фононов, импульсы которых находятся в узком конусе с телесным углом Ω_p и осью вдоль направления движения пучка. Из полученных соотношений (29) и (31) следует, что в анизотропной фононной системе существует асимметрия процессов рождения и уничтожения.

Физической причиной такой асимметрии является то, что ограничения на процессы рождения (31) и уничтожения (29) разные. В итоге может оказаться, что при $\Omega_p \ll 1$ неравенство (29) не выполняется. Тогда в пучке нет фонона, с которым мог бы провзаимодействовать высокоэнергичный h -фонон, и время жизни такого h -фонона оказывается бесконечным. При этом неравенство (31) может выполняться, и частота рождения такого h -фонона оказывается конечной. Описанную ситуацию демонстрирует рис. 1,а для $cp_1/k_B \geq 11$ К. В этой ситуации за счет уничтожения l -фононов идет неограниченный рост h -фононов, который могут остановить только другие процессы в фононной системе.

Приведенные результаты расчетов импульсной зависимости (рис. 1) для всех десяти частот, отвечающих пяти возможным процессам (32), позволяют понять роль каждого процесса в формировании функции распределения h -фононов в анизотропной фононной системе. Так, первый процесс приводит к интенсивной трансформации l -фононов в h -фононы; второй и пятый — к концентрации h -фононов вблизи оси анизотропии; четвертый процесс останавливает неограниченный рост числа h -фононов, вызванный первым процессом, и обеспечивает динамическое равновесие между подсистемами l - и h -фононов; третий процесс является обратным четвертому и частично компенсирует его. В итоге плотность энергии h -фононов в длинных пучках (45) существенно превосходит плотность, полученную для функции распределения Бозе–Эйнштейна.

Все частоты уменьшаются при понижении температуры и уменьшении параметра анизотропии Ω_p . Однако, как следует из расчетов, такая зависимость оказывается различной для разных частот. Это позволяет путем изменения параметров T и Ω_p получать различные распределения h -фононов в основном пучке.

Показано, что увеличение объема пучка существенно изменяет эволюцию фононных пучков (рис. 2). С учетом всех процессов, не сохраняющих полное число h -фононов, получено уравнение (37), которое позволяет объяснить наблюдаемое в экспериментах насыщение амплитуды сигнала h -фононов и вычислить ее максимальное значение (46).

Получено уравнение (54), описывающее остывание пучка l -фононов за счет увеличения его объема и рождения h -фононов. Решение этого уравнения позволило в любой момент времени найти плотность энергии рожденных h -фононов в любой точке пространства и плотность энергии

l -фононов в основном пучке (рис. 4). Показано, что в условиях экспериментов увеличение объема пучка приводит к его быстрому остыванию, так что рождение h -фононов практически прекращается, как только пучок удалится от нагревателя на расстояние, меньшее 3 мм.

Процесс рождения h -фононов пучком l -фононов был обнаружен [2,11–15] задолго до создания основ теории этого явления [16,17]. Что же касается больших значений плотности энергии h -фононов в длинных пучках (45), обусловленных асимметрией процессов рождения и уничтожения, то этот вывод теории ждет своего экспериментального подтверждения. Такие эксперименты планируются в университете г. Эксетер, Великобритания.

Мы выражаем глубокую благодарность EPSRC (гранты GR/N18796 и GR/N20225), а также ГФФИ Украины (грант N02.07/000372) за поддержку, которая дает нам возможность выполнять научные исследования.

1. R. C. Dynes and V. Narayanamurti, *Phys. Rev. Lett.* **33**, 1195 (1974).
2. A. F. G. Wyatt, N. A. Lockerbie, and R. A. Sherlock, *Phys. Rev. Lett.* **33**, 1425 (1974).
3. S. Havlin and M. Luban, *Phys. Lett.* **A42**, 133 (1972).
4. H. J. Maris, *Phys. Rev.* **A8**, 1980 (1973).
5. М. А. Н. Тукер, А. F. G. Wyatt, И. Н. Адаменко, А. В. Жуков, К. Э. Немченко, *ФНТ* **25**, 657 (1999).
6. Л. Д. Ландау, *ЖЭТФ* **11**, 592 (1941).
7. И. М. Халатников, *Теория сверхтекучести*, Наука, Москва (1971).
8. И. Н. Адаменко, М. И. Каганов, *ЖЭТФ* **53**, 886 (1967).
9. В. Л. Гуревич, Б. Д. Лайхтман, *ЖЭТФ* **69**, 1230 (1975).
10. В. Л. Гуревич, Б. Д. Лайхтман, *ЖЭТФ* **70**, 1907 (1976).
11. Y. Korczynski and A. F. G. Wyatt, *J. Phys. Colloq.* **39**, C6-230, 8 (1978).
12. A. F. G. Wyatt, *J. Phys.: Condens. Matter* **1**, 8629 (1989).
13. М. А. Н. Тукер and А. F. G. Wyatt, *J. Phys.: Condens. Matter* **4**, 7745 (1992).
14. М. А. Н. Тукер and А. F. G. Wyatt, *J. Phys.: Condens. Matter* **6**, 2825 (1994).
15. М. А. Н. Тукер and А. F. G. Wyatt, *J. Low Temp. Phys.* **113**, 621 (1998).
16. I. N. Adamenko, K. E. Nemchenko, A. V. Zhukov, M. A. H. Tucker and A. F. G. Wyatt, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 1482 (1999).
17. A. F. G. Wyatt, M. A. H. Tucker, I. N. Adamenko, K. E. Nemchenko, and A. V. Zhukov, *Phys. Rev.* **B62**, 9402 (2000).
18. М. А. Н. Тукер and А. F. G. Wyatt, *Physica* **B165–166**, 493 (1990).
19. М. А. Н. Тукер and А. F. G. Wyatt, *J. Phys.: Condens. Matter* **6**, 2813 (1994).
20. A. F. G. Wyatt, M. A. H. Tucker, I. N. Adamenko, K. E. Nemchenko, and A. V. Zhukov, *Phys. Rev.* **B62**, 3029 (2000).
21. A. F. G. Wyatt, M. A. H. Tucker, I. N. Adamenko, K. E. Nemchenko, and A. V. Zhukov, *Physica* **B280**, 36 (2000).
22. A. F. G. Wyatt, I. N. Adamenko, and K. E. Nemchenko, *J. Low Temp. Phys.* **125**, 1 (2001).
23. I. N. Adamenko, K. E. Nemchenko, A. V. Zhukov, M. A. H. Tucker, and A. F. G. Wyatt, *Physica* **B284–288**, 33 (2000).
24. И. Н. Адаменко, И. М. Фукс, *ЖЭТФ* **59**, 2071 (1970).
25. И. М. Халатников, И. Н. Адаменко, *ЖЭТФ* **63**, 745 (1972).
26. R. A. Sherlock, A. F. G. Wyatt, N. G. Mills, and N. A. Lockerbie, *Phys. Rev. Lett.* **29**, 1299 (1972).
27. R. A. Sherlock, N. G. Mills, and A. F. G. Wyatt, *J. Phys* **C8**, 300 (1975).

Asymmetry of relaxation processes and creation of high-energy phonons in anisotropic phonon systems of He II

I. N. Adamenko,
K. E. Nemchenko and A. F. G. Wyatt

The relaxation processes in anisotropic phonon systems in superfluid helium are studied. The creation and decay rates of high-energy phonons (h -phonons) are obtained for all possible processes allowed when the momenta of the phonons are confined to a narrow cone, including the dependencies on momentum, pulse-temperature and the anisotropy parameter. The physical reasons of asymmetry between the creation and decay of h -phonon are found. All the interaction processes of h -phonons with low-energy phonons (l -phonons) and h -phonons with h -phonons are considered. The role of each of these processes in forming the h -phonons distribution function is determined. The equation that describes the evolution of h -phonons energy density in the main pulse is derived taking into account all of processes, which do not conserve the number of h -phonons, and the quasistationary solution of this equation is found. We also derive the

equation, which describes the cooling of the l -phonon pulse caused by the creation of h -phonons and the increase in volume of the l -phonon pulse during its propagation. The sol-

ution of these equations allows us to determine the energy density of the h -phonons at any point in space and time together with the energy density of l -phonons in the main pulse.