

Влияние ориентации магнитного поля и беспорядка на майорановскую поляризацию в проволоках с топологической сверхпроводимостью

В.В. Вальков, С.В. Аксенов

Институт физики им. Л.В. Киренского СО РАН, г. Красноярск, 660036, Россия

E-mail: vv@iph.krasn.ru

asv86@iph.krasn.ru

Статья поступила в редакцию 6 декабря 2016 г., опубликована онлайн 24 февраля 2017 г.

Исследовано поведение майорановской поляризации, введенной ранее в работе D. Sticlet *et al.* [*Phys. Rev. Lett.* **108**, 096802 (2012)], для проволоки в фазе топологической сверхпроводимости в зависимости от изменения ориентации магнитного поля. На основе численных расчетов показано, что эта поляризация в случае скошенного поля может отличаться на противоположных концах проволоки как по знаку, так и по абсолютной величине. Поскольку на одном из концов майорановская поляризация меняет знак при изменении ориентации магнитного поля с поперечной на продольную, всегда существует диапазон значений углов, при которых эта величина значительно подавлена или равна нулю. Поэтому майорановская поляризация не всегда выступает в качестве локального параметра порядка при произвольном угле магнитного поля в плоскости, перпендикулярной эффективному полю спин-орбитального взаимодействия Рашбы. Продemonстрировано, что введение беспорядка не приводит к качественно новым эффектам. В то же время при больших магнитных полях появляются дополнительные области со слабой майорановской поляризацией.

Досліджено поведінку майоранівської поляризації, введеної раніше в роботі D. Sticlet *et al.* [*Phys. Rev. Lett.* **108**, 096802 (2012)], для дроту в фазі топологічної надпровідності в залежності від зміни орієнтації магнітного поля. На основі чисельних розрахунків показано, що ця поляризація в разі скошеного поля може відрізнятися на протилежних кінцях дроту як за знаком, так і по абсолютній величині. Оскільки на одному з кінців майоранівська поляризація змінює знак при зміні орієнтації магнітного поля з поперечної на поздовжню, завжди існує діапазон значень кутів, при яких ця величина значно пригнічена або дорівнює нулю. Тому майоранівська поляризація не завжди виступає в якості локального параметра порядку при довільному куті магнітного поля в площині, перпендикулярній ефективному полю спин-орбітальної взаємодії Рашбі. Продemonстровано, що введення безладу не призводить до якісно нових ефектів. У той же час при великих магнітних полях з'являються додаткові області зі слабкою майоранівською поляризацією.

PACS: 73.21.Nb Квантовые провода;

73.22.-f Электронная структура наноразмерных материалов и родственных систем.

Ключевые слова: майорановские фермионы, топологическая сверхпроводимость, спиновая поляризация.

1. Введение

Начиная с работ Китаева [1,2], майорановские связанные состояния (МСС) в твердотельных системах привлекают большое внимание исследователей. Как известно, основной проблемой на пути к созданию квантового компьютера является чувствительность квантовых состояний, образующих кубит, к возмущениям,

приводящим к сбою фазы волновой функции системы [3]. В силу того, что МСС обладают топологической защищенностью по отношению к внешним воздействиям, кубит, сформированный парой МСС, устойчив к действию процессов декогерентизации. Управление состоянием такого кубита может осуществляться за счет изменения мест МСС или обхода одного МСС вокруг другого [4,5], так как майорановские фермионы под-

чиняются неабелевой статистике [6]. За последние годы предложены различные системы, где возможно возникновение МСС [7,8]. Среди них 1D полупроводниковые проволоки [9,10] и цепочки магнитных атомов [11,12] представляются наиболее привлекательными, поскольку для этих систем уже экспериментально доказано существование МСС [13,14].

Одним из путей перехода реальной физической 1D системы в топологически нетривиальную фазу является реализация эффективно бесспиновой системы со сверхпроводящим спариванием. В ситуации с 1D полупроводниковой проволокой, которая рассматривается в настоящей статье, требуемые условия достигаются за счет комбинации сильного спин-орбитального взаимодействия (СОВ), магнитного поля, перпендикулярного эффективному полю СОВ, и наведенной за счет эффекта близости сверхпроводимости s -типа [9,10].

Для детектирования МСС в твердотельных системах были предложены различные идеи: измерение проводимости [15], шума [16], интерферометрия [17]. В работах [18,19] было исследовано поведение поперечной спиновой поляризации 1D проволоки, т.е. поляризации в плоскости, перпендикулярной магнитному полю. В частности, было введено понятие майорановской поляризации и показано, что ее величина не равна нулю на концах проволоки именно в топологически нетривиальной фазе. В результате майорановскую поляризацию можно рассматривать в качестве локального параметра порядка и измерять средствами спин-поляризованной сканирующей туннельной микроскопии. В этой статье мы продемонстрируем, что в общем случае, когда магнитное поле ориентировано под произвольным углом к проволоке и перпендикулярно эффективному полю СОВ, майорановская поляризация на разных концах проволоки может отличаться и по знаку, и по абсолютной величине. При этом обязательно имеется интервал значений углов магнитного поля, при которых майорановская поляризация на одном из концов проволоки в топологической фазе существенно подавлена или, более того, равна нулю. Следовательно, для описания топологического фазового перехода в случае скошенного поля необходимо анализировать некоторую интегральную характеристику, учитывающую абсолютные значения спиновой поляризации сразу на обоих концах проволоки.

2. Исследуемая система и ее гамильтониан

Рассмотрим 1D полупроводниковую проволоку, параллельную оси x и характеризующуюся сильным СОВ Рашбы, на поверхности сверхпроводника s -типа во внешнем магнитном поле, ориентированном в плоскости xz под произвольным углом. За счет эффекта близости в проволоке возникает куперовское спаривание электронов, описываемое наведенным потенциалом Δ . Неколлинеарность магнитного поля \mathbf{B} относи-

тельно оси z будем моделировать непосредственным введением в стандартный микроскопический гамильтониан [20] слагаемых, описывающих одноузельные спин-флип процессы. В результате скошенное магнитное поле имеет компоненты $\mathbf{B} = (B_x, 0, -B_z)$. Таким образом, гамильтониан системы приобретает следующий вид:

$$\hat{H}_W = \sum_{j=1}^N \left[\sum_{\sigma} \xi_{\sigma} a_{j\sigma}^+ a_{j\sigma} + \left(\Delta a_{j\uparrow} a_{j\downarrow} - V_x a_{j\uparrow}^+ a_{j\downarrow} + \text{э.с.} \right) \right] - \sum_{\sigma, j=1}^{N-1} \left[\frac{t}{2} a_{j\sigma}^+ a_{j+1, \sigma} + \frac{\alpha}{2} \sigma a_{j\sigma}^+ a_{j+1, \bar{\sigma}} + \text{э.с.} \right], \quad (1)$$

где $\xi_{\sigma} = t + \sigma V_z - \mu$ — одноузельная энергия электрона со спином σ в поперечном магнитном поле; μ — химический потенциал системы; $V_x(z) = \frac{1}{2} \mu_B g B_x(z)$ — x - и z -компоненты зеемановской энергии; t — параметр перескока электрона между ближайшими соседями; α — интенсивность СОВ Рашбы. В приближении сильной связи $t = \hbar^2 / 2m^* a^2$, где m^* — эффективная масса электронов, a — расстояние между атомами в проволоке. Далее, $\alpha = \alpha_R / a$, где α_R — параметр Рашбы. Для проволоки InSb $m^* = 0,015m_e$, $\alpha_R = 0,2 \text{ эВ} \cdot \text{Å}$, $\Delta \sim 10^{-4} \text{ эВ}$, $g \approx 50$, $B_{x,z} = 0,01-1 \text{ Тл}$ (т.е. $V_{x,z} \sim 10^{-5}-10^{-3} \text{ эВ}$) [13]. Если при этом $a \sim 1 \text{ нм}$, то $t \sim 1 \text{ эВ}$, $\alpha \sim 10^{-2} \text{ эВ}$. Таким образом, $t \gg \alpha, V_{x,z}, \Delta$.

3. Число Майорана проволоки, находящейся в скошенном поле

Чтобы оценить влияние неколлинеарности магнитного поля на область реализации фазы топологической сверхпроводимости для проволоки конечной длины, проанализируем зависимость числа Майорана $M(H_W)$ от параметров системы для замкнутой проволоки, описываемой гамильтонианом H_W . В работе [1] было показано, что эта характеристика равна

$$M(H_W) = \text{sgn} [Pf \tilde{A}(k=0)] \text{sgn} [Pf \tilde{A}(k=\pi)], \quad (2)$$

где Pf обозначает пфаффиан антисимметричной матрицы A , $(PfA)^2 = \det A$. $\tilde{A}(k)$ — фурье-образ антисимметричной матрицы гамильтониана замкнутой проволоки в представлении операторов Майорана, $\gamma_{Ak\sigma} = a_{n\sigma}^+ + a_{n\sigma}$, $\gamma_{Bk\sigma} = i(a_{n\sigma}^+ - a_{n\sigma})$,

$$H_W = \frac{i}{2} \sum_{k>0} \hat{\gamma}^+ \tilde{A}(k) \hat{\gamma}, \quad (3)$$

где $\hat{\gamma} = [\gamma_{Ak\uparrow} \gamma_{Ak\downarrow} \gamma_{Bk\uparrow} \gamma_{Bk\downarrow}]^T$. После несложных вычислений получим, что

$$M(H_W) = \text{sgn} \left\{ \left[\mu^2 - V_x^2 - V_z^2 + \Delta^2 \right] \times \left[(2t - \mu)^2 - V_x^2 - V_z^2 + \Delta^2 \right] \right\}. \quad (4)$$

Из (4) естественно следует, что одноузельные спин-флип процессы являются дополнительным вкладом в магнитное поле, действующее на проволоку. Тогда топологически нетривиальная фаза ($M = -1$) возникает, если квадрат результирующего поля находится в диапазоне

$$\mu^2 + \Delta^2 < V_x^2 + V_z^2 < (2t - \mu)^2 + \Delta^2. \quad (5)$$

Из соотношения (5) очевидно следует, что фаза топологической сверхпроводимости может возникать как в случае продольного или поперечного полей, так и в скошенном поле.

4. Электронная спиновая поляризация в МСС и майорановская поляризация

Для анализа свойств элементарных возбуждений проволоки, в частности МСС, воспользуемся преобразованием Боголюбова

$$\beta_l = \sum_j \left[u_{lj} a_{j\uparrow} + v_{lj} a_{j\downarrow}^+ + w_{lj} a_{j\downarrow} + z_{lj} a_{j\uparrow}^+ \right]. \quad (6)$$

Следуя работе [18], введем x -компоненту майорановской поляризации на j -м узле проволоки и z -компоненту электронной спиновой поляризации на j -м узле

на языке коэффициентов преобразования (6) следующим образом:

$$P_{M_x}(j, \omega) = 2 \sum_{l=1}^{4N} \text{Re} \left[v_{lj} w_{lj}^* - z_{lj} u_{lj}^* \right] \delta(\omega - E_l), \quad (7)$$

$$P_z(j, \omega) = \sum_{l=1}^{4N} \langle \Psi_{lj} | \sigma_z \frac{\tau_0 + \tau_z}{2} | \Psi_{lj} \rangle \delta(\omega - E_l), \quad (8)$$

где E_l — собственная энергия гамильтониана \hat{H}_W для состояния проволоки с номером l ; $|\Psi_{lj}\rangle = (u_{lj}, v_{lj}, w_{lj}, z_{lj})$ — l -й собственный вектор; σ_z, τ_0, τ_z — матрицы Паули, действующие в спиновом и электрон-дырочном подпространствах. Основные параметры системы при численных расчетах будут браться исходя из полученных выше оценок и количественно такими же, как в статье [18]: $t = 1, \Delta = 0,3, \mu = 0, \alpha = 0,2, V_{x,z} = 0,4$.

5. Численные расчеты

На рис. 1(а) представлено распределение майорановской поляризации по узлам проволоки и энергии, когда магнитное поле направлено вдоль оси z . Данная зависимость в точности повторяет результат, полученный в работе [18], где противоположность майорановской поляризации на концах проволоки была доказана на основании аналитических расчетов волновой функ-

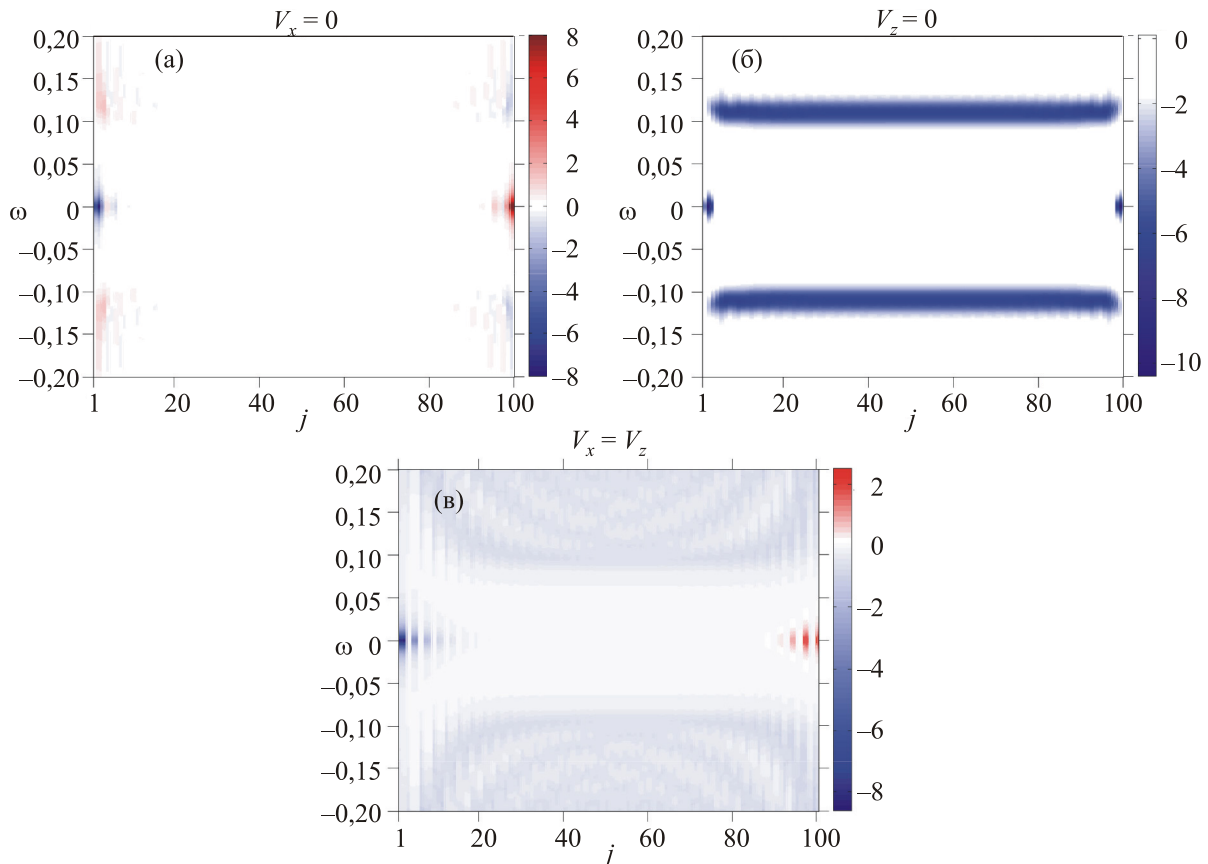


Рис. 1. (Онлайн в цвете) Майорановская поляризация как функция энергии одноэлектронного возбуждения ω и номера узла проволоки j , $N = 100$. $V_x = 0$ (а); $V_z = 0$ (б); $V_x = V_z$ (в).

ции МСС. Видно, что P_{M_x} определяется именно состояниями с нулевой или близкой к нулю энергией и быстро падает к центру. В случае, когда магнитное поле коллинеарно проволоке, P_{M_x} имеет одинаковый знак на концах (рис. 1(б)). При этом существенно отличной от нуля оказывается поляризация и более высокоэнергетических возбуждений. В промежуточной ситуации скошенного поля симметрия распределения P_{M_x} относительно центра проволоки исчезает. В частности, в случае поля, ориентированного под углом $\pi/4$, майорановская поляризация имеет разный знак и разную амплитуду на противоположных концах (рис. 1(в)).

Описанные выше особенности поведения величины P_{M_x} проявляются и в зависимостях спиновой поляризации вдоль оси z , P_z , на рис. 2. Разница состоит в том, что здесь естественным образом из предложенной модели вытекает $P_z(j=1) = P_z(j=N)$ в поперечном поле (рис. 2(а)) и $P_z(j=1) = -P_z(j=N)$ (рис. 2(б)) в продольном поле. Дополнительно, $|P_z(j=1)| \neq |P_z(j=N)|$ в скошенном поле. Однако в отличие от случая на рис. 1(в) z -компонента спиновой поляризации становится близкой к нулю при $V_x = V_z$ (рис. 2(в)). Так как характеристики P_{M_x} и P_z имеют аналогичные особенности поведения при изменении направления магнитного поля, в дальнейшем будет анализироваться только x -компонента майорановской поляризации, P_{M_x} .

Поскольку в двух предельных случаях $V_x = 0$ и $V_z = 0$ майорановская поляризация на последнем узле имеет разный знак, очевидно, следует ожидать, что эта характеристика равна нулю при некотором угле магнитного поля в плоскости xz . Это подтверждается численными расчетами на рис. 3(б). Видно, что при значениях компонент магнитного поля, удовлетворяющих неравенству (5) (область, закрашенная цветом), имеется диапазон, при котором P_{M_x} близка к нулю (белая область, разделяющая желтый и синий участки). Одновременно с этим другие свойства МСС, такие как малая энергия этого состояния, щель в спектре элементарных возбуждений и локализация на краях, остаются без изменений. На рис. 3(а) P_{M_x} на первом узле в топологически нетривиальной области всюду отрицательна. Заметим, что белые сегменты на рис. 3(а) и (б) соответствуют малым и большим магнитным полям, при которых неравенство (5) не выполняется. В результате реализуется топологически тривиальная фаза, где майорановская поляризация также близка к нулю [18]. Таким образом, мы видим, что в скошенном магнитном поле характеристику P_{M_x} не всегда можно рассматривать в качестве локального параметра порядка. Вместо этого удобнее использовать результирующий параметр $|P_{M_x}(j=1)| + |P_{M_x}(j=N)|$.

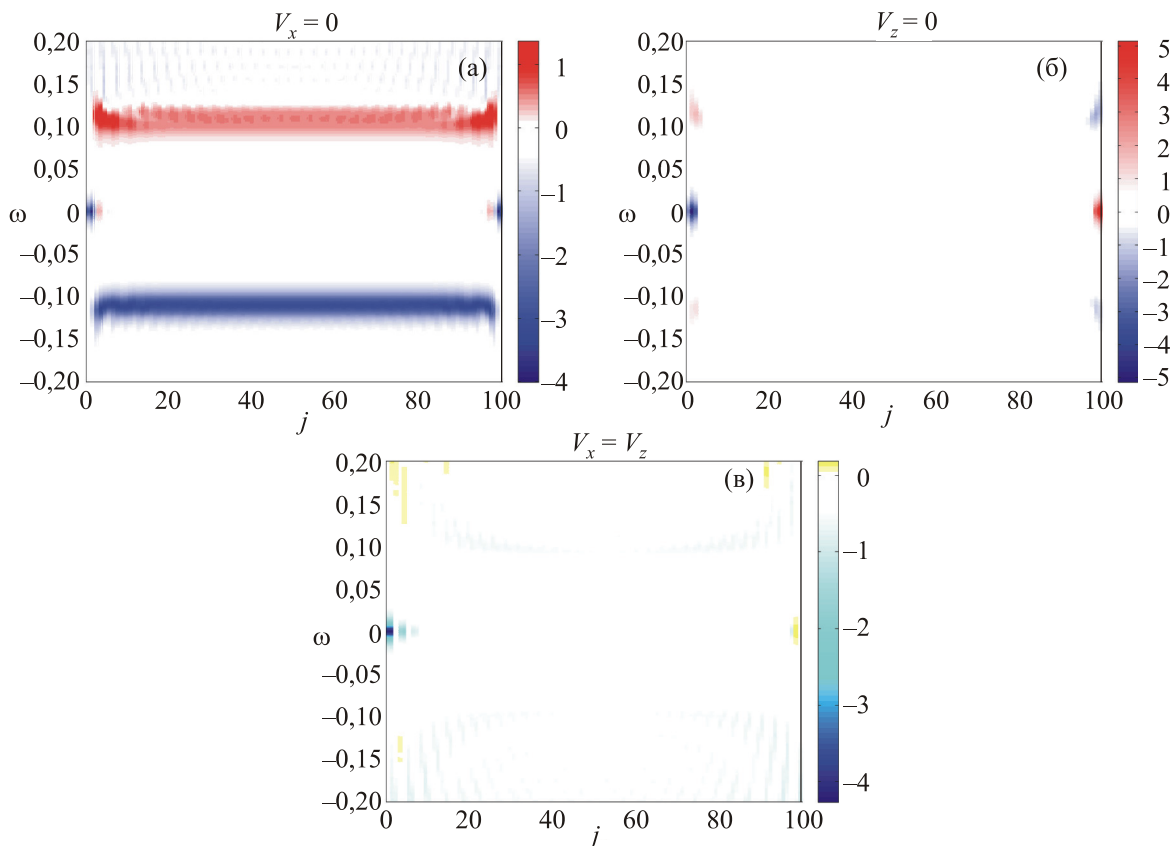


Рис. 2. (Онлайн в цвете) Спиновая поляризация вдоль оси z как функция энергии одноэлектронного возбуждения ω и номера узла проволоки j , $N = 100$. $V_x = 0$ (а); $V_z = 0$ (б); $V_x = V_z$ (в).

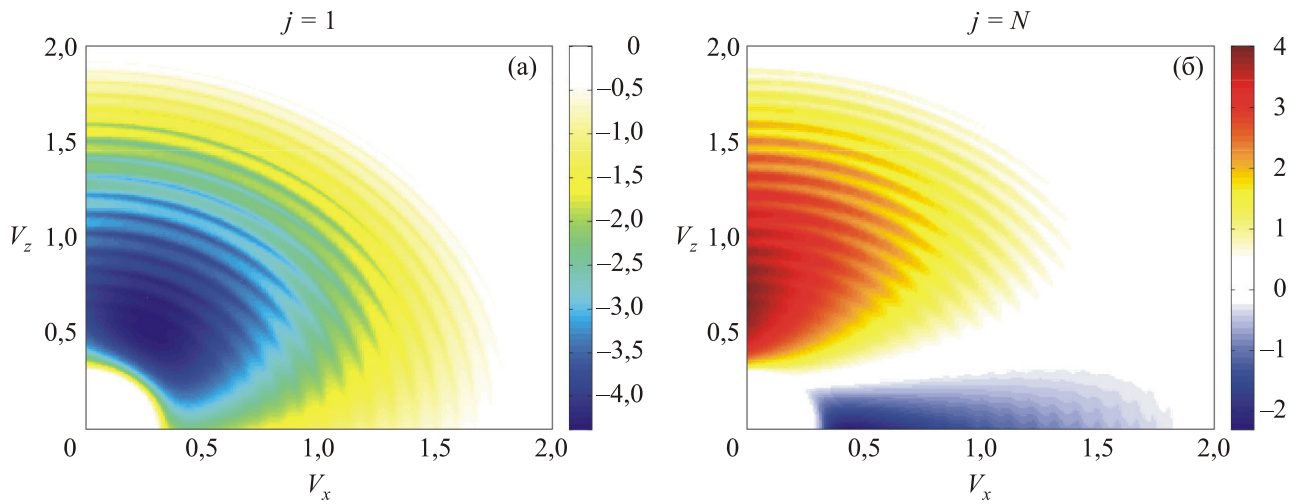


Рис. 3. (Онлайн в цвете) Зависимость майорановской поляризации на первом (а) и последнем (б) узлах проволоки от направления магнитного поля в плоскости xz , $N = 30$.

6. Влияние беспорядка на майорановскую поляризацию

Рассмотрим влияние беспорядка на майорановскую поляризацию в скошенном поле. Для этого введем случайный одноузельный потенциал W_j с однородным распределением в интервале $[-W/2, W/2]$. Зависимости на рис. 4 демонстрируют роль беспорядка в формировании особенностей майорановской поляризации. Из полученных графиков следует, что качественных изменений в поведении P_{M_x} в результате появления случайных добавок в одноузельную энергию не происходит. Появляется некоторая неоднородность. Однако области с разным знаком и, следовательно, область слабой и нулевой майорановской поляризации на одном из краев проволоки сохраняются. Из сравнения рис. 3 и 4 следует, что беспорядок также подавляет поляризацию при больших полях.

7. Заключение

В статье представлены результаты численного анализа поведения x -компоненты майорановской поляризации P_{M_x} на концах проволоки с сильным СОВ Рашбы и наведенным сверхпроводящим спариванием при различных направлениях магнитного поля в плоскости, перпендикулярной вектору эффективного поля Рашбы. Показано, что в фазе топологической сверхпроводимости эта характеристика на одном из концов проволоки меняет знак. Как следствие, в некотором диапазоне углов ориентации магнитного поля в плоскости xz майорановская поляризация характеризуется нулевыми или малыми абсолютными значениями. Таким образом, в отличие от случая продольного и поперечного магнитного поля, в скошенном поле данная величина не всегда может выступать в качестве локального параметра порядка, описывающего переход в топологически не-

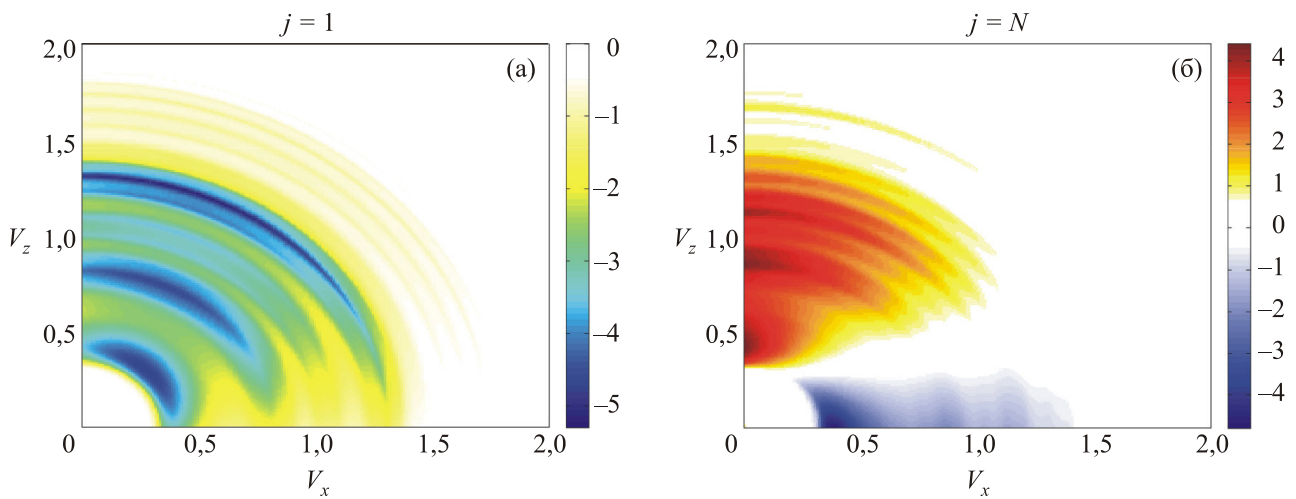


Рис. 4. (Онлайн в цвете) Влияние беспорядка на зависимость майорановской поляризации на первом (а) и последнем (б) узлах проволоки от направления магнитного поля в плоскости xz , $N = 30$, $W = 1/2$.

тривиальную фазу. Введение в систему диагонального беспорядка не приводит к качественным изменениям в поведении майорановской поляризации. Одновременно с этим при больших магнитных полях появляются дополнительные области слабой майорановской поляризации.

Работа выполнена при поддержке Комплексной программы СО РАН #0358-2015-0007, Российского фонда фундаментальных исследований, Правительства Красноярского края, Красноярского краевого фонда поддержки научной и научно-технической деятельности (гранты #15-42-04372, #16-02-00073, #16-42-242036).

1. A.Y. Kitaev, *Phys. Usp.* **44**, 131 (2001).
2. A.Y. Kitaev, *Ann. Phys.* **303**, 2 (2003).
3. W.H. Zurek, *Rev. Mod. Phys.* **75**, 715 (2003).
4. A. Stern, *Nature* **464**, 187 (2010).
5. J. Alicea, Y. Oreg, G. Refael, F. von Oppen and M.P.A. Fisher, *Nature Phys.* **7**, 412 (2011).
6. D.A. Ivanov, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 268 (2001).
7. G.E. Volovik, *JETP Lett.* **90**, 398 (2009).
8. L. Fu, and C.L. Kane, *Phys. Rev. B* **79**, 161408(R) (2009).
9. R.M. Lutchyn, J.D. Sau, and S. Das Sarma, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 077001 (2010).
10. Y. Oreg, G. Refael, and F. von Oppen, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 177002 (2010).
11. T.-P. Choy, J.M. Edge, A.R. Akhmerov, and C.W.J. Beenakker, *Phys. Rev. B* **84**, 195442 (2011).
12. S. Nadj-Perge, I.K. Drozdov, B.A. Bernevig, and A. Yazdani, *Phys. Rev. B* **88**, 020407(R) (2013).
13. V. Mourik, K. Zuo, S.M. Frolov, S.R. Plissard, E.P.A.M. Bakkers, and L.P. Kouwenhoven, *Science* **336**, 1003 (2012).
14. S. Nadj-Perge, I. Drozdov, J. Li, H. Chen, S. Jeon, J. Seo, A.H. MacDonald, B.A. Bernevig, and A. Yazdani, *Science* **346**, 602 (2014).
15. K. Flensberg, *Phys. Rev. B* **82**, 180516(R) (2010).
16. K.T. Law, P.A. Lee, and T.K. Ng, *Phys. Rev. Lett.* **103**, 237001 (2009).
17. P. Bonderson, A. Kitaev, and K. Shtengel, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 016803 (2006).
18. D. Sticlet, C. Bena, and P. Simon, *Phys. Rev. Lett.* **108**, 096802 (2012).
19. N. Sedlmayr and C. Bena, *Phys. Rev. B* **92**, 115115 (2015).
20. B.H. Wu and J.C. Cao, *Phys. Rev. B* **85**, 085415 (2012).

Effects of magnetic-field orientation and disorder on Majorana polarization in topological superconducting wires

V.V. Val'kov and S.V. Aksenov

The behavior of the Majorana polarization for the one-dimensional wire in topological superconducting phase, previously introduced by D. Sticlet *et al.* [*Phys. Rev. Lett.* **108**, 096802 (2012)], is investigated depending on the magnetic-field orientation. On the basis of the numerical calculations we show that in the case of the canted field this polarization on opposite ends of the wire may be different both in sign and in magnitude. Since the Majorana polarization on one end has different sign when the magnetic field changes the orientation from the transverse to the longitudinal one, there is a range of angles at which this value is significantly suppressed or equal to zero. Therefore, the Majorana polarization cannot always be considered as a local order parameter at an arbitrary angle of the magnetic field in the plane perpendicular to the effective Rashba field. It has been demonstrated that Anderson disorder doesn't lead to qualitatively new effects. At the same time, it causes the appearance of the additional areas with weak Majorana polarization at high magnetic fields.

PACS 73.21.Hb Quantum wires;
73.22.-f Electronic structure of nanoscale materials and related systems

Keywords: Majorana fermions, topological superconductivity, spin polarization.