Физика низких температур, 2000, т. 26, № 8, с. 787–791

Магнитный экситон в двухслойной системе

Е. Д. Вол, С. И. Шевченко

Физико-технический институт низких температур им. Б. И. Веркина НАН Украины, Украина, 61164, г. Харьков, пр. Ленина, 47
E-mail: shevchenko@ilt.kharkov.ua

Статья поступила в редакцию 18 февраля 2000 г., после переработки 7 апреля 2000 г.

Рассмотрено связанное состояние легкого электрона с массой m_e и тяжелой дырки с массой m_h ($m_h >> m_e$) в двухслойной системе в магнитном поле. Поле считается сильным только для электрона ($a_B^e >> l_0$, где $a_B^e = \hbar^2/(m_e e^2)$ — боровский радиус, а $l_0 = \sqrt{c\hbar/(eB)}$ — магнитная длина). Предложен новый метод расчета, с помощью которого удалось найти энергию основного состояния магнитного экситона и спектр его возбужденных состояний без предположения о малости кулоновского взаимодействия. Найдены эффективная масса m^* и зависимость энергии экситона от его импульса $\mathcal{P}$. Исследовано поведение экситона в скрещенных электрическом и магнитном полях. Полученные результаты могут быть использованы при анализе экспериментов в реальных магнитных полях $\sim 10^4$–10^5 Э для таких полупроводников, как InSb, InAs, GaAs и т.д., где отношение $m_e/m_h \lesssim 0{,}1$.

Розглянуто зв'язаний стан легкого електрона з масою m_e і важкої дірки з масою m_h ($m_h >> m_e$) в двошаровій системі в магнітному полі. Поле вважається сильним тільки для електрона ($a_B^e >> l_0$, де $a_B^e = \hbar^2/(m_e e^2)$ — борівський радіус, а $l_0 = \sqrt{c\hbar/(eB)}$ — магнітна довжина). Запропонован новий метод розрахунку, за допомогою якого удалося знайти енергію основного стану магнітного екситона і спектр його збуджених станів без припущення про малість кулонівської взаємодії. Знайдено ефективну масу m^* та залежність енергії екситона від його імпульсу $\mathcal{P}$. Досліджено поведінку екситона в схрещених електричному і магнітному полях. Отримані результати можуть бути використовані при аналізі експериментів у реальних магнітних полях $\sim 10^4$–10^5 Е для таких напівпровідників, як InSb, InAs, GaAs т.і., де відношення $m_e/m_h \lesssim 0{,}1$.

PACS: 73.61.Cw, 72.20.Ht

Теория экситона Ваннье—Мотта в сильном магнитном поле была впервые построена Эллиотом и Лоудоном [1] и Хасегавой и Гавардом [2] более тридцати лет назад. Впоследствии были выполнены важные работы [3–5], в которых детально изучалось поведение магнитного экситона (МЭ) с произвольным импульсом $\mathcal{P}$ в трехмерном [3] и двумерном [4,5] случаях. Во всех указанных работах предполагалась малость кулоновского взаимодействия по сравнению с расстоянием между уровнями Ландау как электрона, так и дырки. Такое предположение равносильно выполнению двух условий: $a_B^e >> l_0$ и $a_B^h >> l_0$. Между тем в реальных системах, где массы электрона и дырки, образующих экситон, часто сильно отличаются ($m_h >> m_e$), одновременное выполнение обоих условий оказывается черезмерно жестким ограничением, требующим для своей реализации сверхсильных магнитных полей $\sim 10^6$ Э. В частности, ситуация $m_h >> m_e$ имеет место для широкого класса полупроводников, активно изучаемых экспериментально, таких как InSb, InAs, GaAs и т. д. В связи с тем, что стандартные методы расчета характеристик МЭ в таких системах для реально используемых магнитных полей $\sim 10^4$–10^5 Э могут приводить к неверным результатам, мы предлагаем новый метод расчета, суть которого состоит в следующем. Предполагая, что для легкой частицы (электрона) условие $a_B^e >> l_0$ выполняется, проектируем гамильтониан системы на подпространство состояний, где электрон заморожен на фиксированном уровне Ландау n. Переходим к представлению, в котором импульс $\mathcal{P}$ экситона является заданной величиной. В этом представлении динамика МЭ определяется (помимо $\mathcal{P}$) относительной координатой $\mathbf{r} = (X_e - x_h, Y_e - y_h)$ (где X_e, Y_e — координаты центра орбиты электрона, а x_h, y_h — координаты дырки) и без дополнительных предположений удается найти важные характеристики МЭ.

Рассмотрим два полупроводниковых слоя, разделенных расстоянием d и находящихся в однородном магнитном поле B, приложенном перпендикулярно слоям. В слое 1 носителями тока являются легкие частицы (электроны), в слое 2 — тяжелые (дырки). Гамильтониан электрон-дырочной пары можно записать в стандартном виде:

$$\mathcal{H}_{\text{ex}} = \mathcal{H}_e + \mathcal{H}_h + V_c \,, \qquad (1)$$

где

$$\mathcal{H}_e = \frac{(p_x^e + eBy_e/2c)^2}{2m_e} + \frac{(p_y^e - eBx_e/2c)^2}{2m_e} \,,$$

$$\mathcal{H}_h = \frac{(p_x^h - eBy_h/2c)^2}{2m_h} + \frac{(p_y^h + eBx_h/2c)^2}{2m_h} \,,$$

$$V_c = -\frac{e^2}{|\mathbf{r}_e - \mathbf{r}_h|} = -\frac{e^2}{\sqrt{(x_e - x_h)^2 + (y_e - y_h)^2 + d^2}} \,.$$

Заряд электрона считаем равным $-e$, диэлектрическую проницаемость среды между слоями принимаем равной единице. Для векторного потенциала однородного магнитного поля $\mathbf{B}$ использована симметричная калибровка $\mathbf{A} = (By/2, -Bx/2)$ (отметим, что при выбранной калибровке поле $\mathbf{B}$ антипараллельно оси z).

Спроектируем гамильтониан (1) на подпространство состояний, в котором электрон находится на заданном уровне n, для простоты — нижайшем уровне Ландау. Результат проектирования на него будем обозначать чертой над оператором. Очевидно, имеем $\overline{\mathcal{H}_h} = \mathcal{H}_h$,

$$\mathcal{H}_e = \frac{(\Pi_x^e)^2 + (\Pi_y^e)^2}{2m_e} = \hbar\omega_e \left(a^+a + \frac{1}{2}\right) \qquad (2)$$

и, следовательно, $\overline{\mathcal{H}_e} = \hbar\omega_e/2$, т.е. сводится к постоянной, которую будем в дальнейшем опускать. В (2) использованы обозначения: $\omega_e = eB/(m_e c)$ — циклотронная частота; $\Pi_x^e = p_x^e + y_e\, eB/(2c)$ и $\Pi_y^e = p_y^e - x_e\, eB/(2c)$ — компоненты кинематического импульса электрона; $a^+ = l_0(\Pi_x^e - i\Pi_y^e)/(\sqrt{2}\hbar)$ и $a = l_0(\Pi_x^e + i\Pi_y^e)/(\sqrt{2}\hbar)$ — операторы рождения и уничтожения электрона на заданном уровне Ландау. Из перестановочных соотношений $[\Pi_x^e, \Pi_y^e] = i\hbar^2/l_0^2$ следует, что $[a, a^+] = 1$.

Проектирование оператора кулоновской энергии V_c удобнее всего, следуя [6], выполнить, переходя к фурье-представлению:

$$V_c = -\frac{e^2}{2\pi}\int d^2k\, \frac{\exp(-|k|d)}{|k|} \times$$

$$\times \exp\left[ik_x(x_e - x_h) + ik_y(y_e - y_h)\right] , \qquad (3)$$

где $|k| \equiv \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$.

Координаты электрона в магнитном поле можно представить в виде

$$x_e = X_e + \frac{l_0^2}{\hbar}\Pi_y^e \,, \quad y_e = Y_e - \frac{l_0^2}{\hbar}\Pi_x^e \,, \qquad (4)$$

где X_e и Y_e — координаты центра орбиты. Они удовлетворяют перестановочным соотношениям $[X_e, Y_e] = -il_0^2$ и коммутируют с Π_x^e и Π_y^e. В представлении (3) с учетом (4) проектирование V_c сводится к проектированию оператора

$$\exp\left\{-ik_x \frac{l_0^2}{\hbar}\Pi_y^e + ik_y \frac{l_0^2}{\hbar}\Pi_x^e\right\} = \exp\left\{\frac{l_0}{\sqrt{2}}(ka^+ - \bar{k}a)\right\}$$

на нижайший уровень Ландау. Здесь $k \equiv k_x + ik_y$. Проектирование выполняется элементарно:

$$\left\langle 0 \left| \exp\left\{\frac{l_0}{\sqrt{2}}(ka^+ - \bar{k}a)\right\} \right| 0 \right\rangle = \exp\left\{-\frac{|k|^2 l_0{}^2}{4}\right\} , \qquad (5)$$

после чего для $\overline{V_c}$ получаем

$$\overline{V_c} = -\frac{e^2}{2\pi}\int d^2k\, \frac{\exp(-|k|d)}{|k|} \times$$

$$\times \exp\left(-\frac{|k|^2 l_0^2}{4}\right) \exp\left[ik_x(X_e - x_h) + ik_y(Y_e - y_h)\right] . \qquad (6)$$

Дальнейшее упрощение задачи происходит, если учесть тот факт, что полный импульс электрон-дырочной пары

$$\boldsymbol{\mathcal{P}} = \left[-i\hbar\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_e} + \frac{e}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r}_e)\right] + \left[-i\hbar\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_h} - \frac{e}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r}_h)\right] -$$

$$-\frac{e}{c}\left[\mathbf{B} \times (\mathbf{r}_e - \mathbf{r}_h)\right] \qquad (7)$$

в однородном магнитном поле сохраняется. Существование этого интеграла движения позволяет уменьшить число независимых переменных задачи, выразив кинематический импульс дырки Π_h через полный импульс $\boldsymbol{\mathcal{P}}$ и относительные координаты $X_e - x_h$ и $Y_e - y_h$. С помощью (7) и (4) получаем

$$
\Pi_x^h = \mathcal{P}_x + \frac{\hbar}{l_0^2}\,(Y_e - y_h)\ , \qquad (8)
$$

$$
\Pi_y^h = \mathcal{P}_y - \frac{\hbar}{l_0^2}\,(X_e - x_h)\ . \qquad (9)
$$

Подставляя выражения (6), (8) и (9) в выражение (1), находим искомое представление для гамильтониана пары электрон + дырка:

$$
\mathcal{H}_{\text{ex}} = \frac{(\mathcal{P}_x + \hbar y/l_0^2)^2}{2m} + \frac{(\mathcal{P}_y - \hbar x/l_0^2)^2}{2m} -
$$

$$
- \frac{e^2}{2\pi}\int d^2k\, \frac{\exp\,(-|k|d)}{|k|}\,\exp\left(-\frac{|k|^2 l_0^2}{4}\right)\exp\,(ik_x x + ik_y y)\ . \qquad (10)
$$

Обращаем внимание на то, что $\mathcal{P}_x$ и $\mathcal{P}_y$ в (10) — компоненты полного импульса экситона, который сохраняется. Они коммутируют друг с другом и с H_{ex} и, следовательно, могут рассматриваться как c-числа. Динамическими переменными задачи являются относительные координаты пары: $x \equiv \equiv X_e - x_h$ и $y \equiv Y_e - y_h$. Они удовлетворяют простым коммутационным соотношениям: $[x, y] = = -il_0^2$. Выражение (10) является отправным пунктом для изучения основных характеристик МЭ.

Положим сначала $\mathcal{P}_x = \mathcal{P}_y = 0$ и найдем спектр покоящегося экситона. Для этого введем вторую пару операторов рождения и уничтожения b^+ и b следующим образом:

$$
x \equiv \frac{l_0}{\sqrt{2}}\,(b + b^+)\ ; \quad y = \frac{il_0}{\sqrt{2}}\,(b - b^+)\ ; \quad [b, b^+] = 1\ .
$$

При $\boldsymbol{\mathcal{P}} = 0$ гамильтониан (10) выражается только через b^+ и b:

$$
\mathcal{H}_0 = \hbar\omega_e^h\left(b^+b + \frac{1}{2}\right) -
$$

$$
\text{d}- \frac{e^2}{2\pi}\int d^2k\, \frac{\exp\,(-|k|d)}{|k|}\,\exp\left(-\frac{|k|^2 l_0^2}{2}\right)\times
$$

$$
\times\exp\left(i\frac{l_0}{\sqrt{2}}\,\bar{k}\, b^+\right)\exp\left(i\frac{l_0}{\sqrt{2}}\,kb\right). \qquad (11)
$$

Ввиду изотропии кулоновского потенциала второе слагаемое в (11) диагонально по $b^+b \equiv \hat{N}$. Оно может быть представлено в виде ряда

$$
V_c = -\frac{e^2}{l_0}\sum_{m=0}^{\infty} f_m\left(\frac{d}{l_0}\right)\frac{(-1)^m}{2^m(m!)^2}(b^+)^m b^m\ , \qquad (12)
$$

где

$$
f_m\left(\frac{d}{l_0}\right) = \int_0^{\infty} x^{2m}\exp\left(-\frac{x^2}{2} - \frac{d}{l_0}x\right)dx\ .
$$

Используя соотношение $(b^+)^m b^m = \hat{N}(\hat{N} - 1)\ldots$ $\ldots(\hat{N} - m + 1)$ и выполняя суммирование по m в (12), найдем точное выражение для спектра возбужденных состояний МЭ в компактном виде:

$$
E_N = \hbar\omega_e^h\left(N + \frac{1}{2}\right) - \frac{e^2}{l_0}\int_0^{\infty}\exp\left(-\frac{d}{l_0}x - \frac{x^2}{2}\right)L_N\left(\frac{x^2}{2}\right)dx, \qquad (13)
$$

где $L_N(y) = \sum_{m=0}^{N}(-1)^m\,\frac{y^m}{m!}C_N^m$ — N полином Лагерра.

При $d = 0$ интеграл в (13) вычисляется аналитически и спектр МЭ записывается явно:

$$
E_N = \hbar\omega_e^h\left(N + \frac{1}{2}\right) - \frac{e^2}{\sqrt{2}\,l_0}\,\frac{\Gamma(N + 1/2)}{\Gamma(N + 1)}\ . \qquad (14)
$$

Если $d \neq 0$, то интеграл в (13) явно не вычисляется. Тем не менее можно показать, что качественно характер спектра не меняется. Если обозначить

$$
V_N(\gamma) \equiv \int_0^{\infty}\exp\left(-\gamma\, x - \frac{x^2}{2}\right)L_N\left(\frac{x^2}{2}\right)dx,
$$

то для $V_N(\gamma)$ справедливы два утверждения: а) $V_N(\gamma) > 0$ и б) $V_N(\gamma) > V_{N+1}(\gamma)$. Отсюда следует, что для всех d энергия МЭ монотонно возрастает с ростом N. Зная E_N , нетрудно вычислить зависимость $E(\mathcal{P})$ при малых $\mathcal{P}$ и определить эффективную массу экситона m^*. При $\boldsymbol{\mathcal{P}} \neq 0$ можно записать $\mathcal{H}_{\text{ex}}$ в виде

$$
\mathcal{H}_{\text{ex}}(\mathcal{P}) = \mathcal{H}_0 + \frac{\mathcal{P}^2}{2m_h} + V(\mathcal{P})\ , \qquad (15)
$$

где $V(\mathcal{P}) = i\hbar\,(b\mathcal{P} - b^+\bar{\mathcal{P}})/(\sqrt{2}\,l_0 m_h)$, $\mathcal{P} = \mathcal{P}_x + iP_y$, а $\mathcal{H}_0$ определяется выражением (11). Вычисляя поправку к энергии E_0 при малых $\mathcal{P}$ во втором порядке теории возмущений по $V(\mathcal{P})$, находим

$$\Delta E(\mathcal{P}) \equiv \frac{\mathcal{P}^2}{2m^*} = \frac{\mathcal{P}^2}{2m_h} + \frac{|\langle 0\,|V|\,1\rangle|^2}{E_0 - E_1} =$$

$$= \frac{\mathcal{P}^2}{2m_h} - \frac{\hbar^2\mathcal{P}^2/(2m_h^2 l_0^2)}{E_1 - E_0}\,, \qquad (16)$$

откуда получается искомое выражение для m^*:

$$m^* = \frac{m_h}{1 - (\hbar\omega_h)/(E_1 - E_0)} = m_h + m_B\,, \quad (17)$$

где

$$m_B = m_h \frac{2l_0\hbar\omega_h}{e^2 f_1(d/l)}\,. \qquad (18)$$

При выводе (17) была использована формула (13) для E_N при $N = 0$ и $N = 1$. Напоминаем, что

$$f_1\left(\frac{d}{l_0}\right) = \int_0^\infty x^2 \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \exp\left(-\frac{d}{l_0}x\right) dx\,.$$

Выражение (17) для эффективной массы существенно отличается от аналогичного выражения в обычной теории [7]. В стандартной теории получается, что $m^* = m_B$, монотонно возрастает с ростом магнитного поля и, как видно из (18), не зависит от массы дырок. Расхождение объясняется тем, что из предположения $a_B^h/l_0 >> 1$ в обычной теории следует $m_B/m_h >> 1$. В нашей работе такого предположения нет, поэтому результат (17) справедлив для гораздо большего диапазона магнитных полей, чем выражение $m^* = m_B$. Поскольку в не слишком сильных полях оба слагаемых в (17) одного порядка, различие в численных значениях m^* между двумя теориями может быть весьма значительным. Кроме того, учет слагаемого m_h в (17) оказывается существенным при изучении поведения МЭ в электрическом поле.

Перейдем к краткому рассмотрению этого вопроса. Пусть кроме магнитного поля $\mathbf{B}$, перпендикулярного слоям, к системе приложено однородное электрическое поле $\mathbf{E}$, параллельное плоскости слоев. Вычислим добавку к энергии $\Delta\mathcal{H}_E$, обусловленную электрическим полем. Гамильтониан системы в исходном представлении имеет вид

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\text{ex}} + \Delta\mathcal{H}_E\,, \qquad (19)$$

где $\mathcal{H}_{\text{ex}}$ определяется выражением (1), а $\Delta\mathcal{H}_E = -e\mathbf{E}(\mathbf{r}_e - \mathbf{r}_h)$. В представлении с заданным $\mathcal{P}$ его можно записать в виде

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \frac{\mathcal{P}^2}{2m_h} + V_1(\mathcal{P}, E)\,, \qquad (20)$$

где

$$V_1 \equiv Zb + \bar{Z}b^+\,, \qquad Z = \frac{el_0E}{\sqrt{2}} + \frac{i\hbar\mathcal{P}}{m_h l_0\sqrt{2}}\,,$$

$$E \equiv E_x + iE_y\,.$$

Вычисляя поправку к E_0 во втором порядке теории возмущений по V_1, находим искомое выражение для $\Delta\mathcal{H}_E$:

$$\Delta\mathcal{H}_E = \frac{e^2 l_0^2 |E|^2}{2(E_0 - E_1)} + \frac{e\hbar[\boldsymbol{\mathcal{P}} \times \mathbf{E}]_z}{m_h(E_0 - E_1)} =$$

$$= \left(1 - \frac{m_h}{m^*}\right)\mathbf{u}\boldsymbol{\mathcal{P}} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{m_h}{m^*}\right) m_h u^2\,. \qquad (21)$$

При выводе (21) использовано соотношение $(E_0 - E_1)^{-1} = (1 - m_h/m^*)/(\hbar\omega_h)$ и введено стандартное обозначение $\mathbf{u} = c[\mathbf{E} \times \mathbf{B}]/B^2$ для скорости дрейфа частицы в скрещенных электрическом и магнитном полях.

В связи с (21) следует обратить внимание на важное обстоятельство. Если производить расчет $\Delta\mathcal{H}_E$, следуя обычной теории возмущений, то вместо (21) получается аналогичное выражение, в котором множитель $1 - m_h/m^* = 1 - m_h/(m_h + m_B)$ заменен (при $m_h >> m_e$) на

$$1 - \frac{m_h}{m_B} = 1 - \frac{m_h}{m_e}\frac{\sqrt{2\pi}}{4}\frac{l_0}{a_B^e}\,. \qquad (22)$$

Для простоты в (22) мы положили $d = 0$.

Условие применимости теории возмущений означает, что $l_0/a_B^e << 1$. С другой стороны, при $m_h/m_e >> 1$ эта величина в (22) умножается на большую величину m_h/m_e и возможна ситуация, когда m_h/m_B станет больше единицы. В результате в обычной теории выражение (22) поменяет знак, в то время как в предложенном нами методе $1 - m_h/m^* = 1 - m_h/(m_h + m_B) > 0$ всегда. Таким образом, в данном случае теория возмущений может приводить даже к качественно неверным результатам. Причиной этого является тот факт, что при $m_h/m_e \to \infty$ спектр энергии электронно-дырочной пары становится сильно вырожденным и потому следует применять секулярную теорию возмущений.

Отметим, что ограничение нижним уровнем Ландау для электрона, которое до сих пор использовалось (для упрощения записи формул), можно снять. Пусть электрон «заморожен» на произвольном уровне Ландау n. При проектировании гамильтониана (1) на уровень n соотношение (5) следует заменить на

$$\left\langle n \left| \exp\left\{\frac{l_0}{2}(ka^+ - \bar{k}a)\right\} \right| n \right\rangle = = \exp\left(-\frac{|k|^2 l_0^2}{4}\right) L_n\left(\frac{|k|^2 l_0^2}{2}\right),$$

где L_n — полином Лагерра степени n. Формулы (13) и (17) обобщаются при этом очевидным образом. Приведем результат для спектра возбужденных состояний МЭ при $\mathcal{P} = 0$:

$$E_{n,N} = \hbar\omega_e\left(n + \frac{1}{2}\right) + \hbar\omega_h\left(N + \frac{1}{2}\right) - -\frac{e^2}{l_0}\int_0^\infty \exp\left(-\frac{d}{l_0}x - \frac{x^2}{2}\right) L_N\left(\frac{x^2}{2}\right) L_n\left(\frac{x^2}{2}\right) dx\,. \tag{23}$$

Квантовое число n в (23) определяет грубую структуру спектра, поскольку $\omega_e >> \omega_h$, а число N — его тонкую структуру (второе и третье слагаемые в (23) могут быть одного порядка).

В заключение подчеркнем, что содержащиеся в статье результаты могут быть экспериментально проверены во всех двухслойных системах, где носители разного знака сильно отличаются по массе.

Настоящая работа поддержана INTAS (грант № 97–0972).

1. R. J. Elliott and R. Loudon, *J. Phys. Chem. Solids* **15**, 196 (1960).
2. H. Hasegawa and R. E. Howard, *J. Phys. Chem. Solids* **21**, 179 (1961).
3. Л. П. Горьков, И. Е. Дзялошинский, *ЖЭТФ* **53**, 717 (1968).
4. И. В. Лернер, Ю. В. Лозовик, *ЖЭТФ* **78**, 1167 (1980).
5. C. Kallin and B. I. Halperin, *Phys. Rev.* **B30**, 5655 (1984).
6. Z. F. Ezawa, *Phys. Rev.* **B55**, 7771 (1997).
7. S. I. Shevchenko, *Phys. Rev.* **B57**, 14809 (1998).

Magnetic exciton in a two-layer system

E. D. Vol and S. I. Shevchenko

The bound state of a light electron of mass m_e and a heavy hole of mass m_h ($m_h >> m_e$) in a two-layer system is considered in the magnetic field. The field is assumed to be strong only for the electron ($a_B^e >> l_0$, where $a_B^e = \hbar^2/(m_e e^2)$ is the Bohr radius, $l_0 = \sqrt{c\hbar/(eB)}$ is the magnetic length. A new method of calculation is proposed, which has permitted us to find the ground state energy of the magnetic exciton and the spectrum of its excited states without using the assumption of smallness of the Coulomb interaction. The effective mass m^* and the dependence of the energy of the exciton upon its impulse $\mathcal{P}$ are found. The exciton behavior in crossed electric and magnetic fields is studied. The results obtained can be used to analyze experiments in real magnetic fields ~10^4–10^5 Oe for semiconductors such as InSb, InAs, GaAs, etc., where the relation $m_e/m_h \lesssim 0.1$ holds.