

Рассеяние радиально-симметричной спиновой волны на магнитном вихре в двумерном легкоплоскостном ферромагнетике

Б. А. Иванов

Институт магнетизма НАН Украины, Украина, 03142, г. Киев, ул. Вернадского, 36-Б
E-mail: vbaryakhtar@bitp.kiev.ua

И. А. Ястремский

Киевский университет им. Тараса Шевченко, Украина, 03127, г. Киев, пр. Глушкова, 2
E-mail: yastremsky@mail.univ.kiev.ua

Статья поступила в редакцию 26 октября 1999 г., после переработки 22 декабря 1999 г.

В длинноволновом приближении (волновое число намного меньше, чем обратный размер кора вихря) с помощью аналитических и численных расчетов найдена амплитуда рассеяния радиально-симметричной спиновой волны, которой отвечает азимутальное число $m = 0$, на вихре в легкоплоскостном ферромагнетике. Оказалось, что амплитуда рассеяния радиально-симметричной спиновой волны меньше, чем трансляционной моды ($m = \pm 1$) с тем же значением волнового числа.

В довгохвильовому наближенні (хвильове число набагато менше за обернений розмір кору вихора) за допомогою аналітичних і чисельних розрахунків знайдено амплітуду розсіяння радіально-симетричної спінової хвилі, якій відповідає азимутальне число $m = 0$, на вихорі в легкоплоскостному ферромагнетіку. Виявилось, що амплітуда розсіяння радіально-симетричної спінової хвилі менше, ніж трансляційної моди ($m = \pm 1$) з таким же значенням хвильового числа.

PACS: 75.30.Ds

Введение

Известно, что солитоны играют особую роль в динамике и термодинамике одно- и двумерных ($1D$ и $2D$) нелинейных упорядоченных сред, в частности магнетиков. Для последовательного анализа динамических свойств вихря и термодинамических величин $2D$ магнетика нужно знать не только структуру солитонов, но и свойства магнанных мод в присутствии солитона. Локальные моды (ЛМ), особенно нулевые, весьма существенны при построении солитонной термодинамики в $1D$ случае [1–3]. Например, в методе солитонной феноменологии [4] они определяют температурную зависимость плотности $1D$ солитонов. Интерес к ЛМ обусловлен и тем, что резонанс на этих модах может непосредственно наблюдаться экспериментально [5,6].

Для $1D$ магнетиков известен ряд точных решений, описывающих как солитоны, так и магнанные моды на их фоне. В двумерном случае ситуа-

ция значительно более сложная. Анализ солитонов проводится, как правило, с использованием численных методов. Особый случай представляет солитон Белавина–Полякова, существующий в изотропных магнетиках, так как для него известно аналитическое решение. Для изотропных магнетиков с солитоном Белавина–Полякова некоторые результаты, касающиеся солитон-магннного рассеяния, также могут быть найдены аналитически [7]. Однако для магнитных вихрей, наиболее важных для описания реальных магнетиков (известно, что именно солитоны типа вихрей ответственны за переход Березинского–Костерлица–Таулесса [8] и вносят вклад в функции отклика $2D$ магнетика [9]), практически все результаты существуют только в виде численных данных, полученных путем моделирования на больших решетках. Исключением является трансляционная мода с азимутальным числом $m = \pm 1$ [10], что связано с тем обстоятельством, что при $\omega = 0$ известно точное решение уравнений Лан-

дау–Лифшица (УЛЛ), которое отвечает сдвигу солитона как целого. Другой, физически важный случай, для которого можно ожидать, что рассеяние будет максимальным [11,12], есть радиально-симметричная волна ($m = 0$). Однако для нее известны лишь численные данные для некоторых значений волнового числа k , и восстановить вид амплитуды рассеяния σ_0 из этих данных не представляется возможным [10].

В настоящей работе разработан метод, который с помощью комбинирования аналитических и численных расчетов позволяет исследовать рассеяние радиально-симметричной волны на магнитном вихре и найти зависимость $\sigma_0(k)$ в длинноволновом приближении.

Модель и задача рассеяния магнона на вихре

Макроскопическая динамика ферромагнетика (ФМ) описывается классическим векторным параметром порядка, в качестве которого выступает намагниченность \mathbf{M} или единичный вектор \mathbf{m} , $\mathbf{m} = \mathbf{M}/M_0$, где M_0 — намагниченность насыщения. Вектор \mathbf{m} удобно записать в угловых переменных, $\mathbf{m} = \{\sin \theta \cos \varphi; \sin \theta \sin \varphi; \cos \theta\}$. Плотность энергии легкоплоскостного ферромагнетика (ЛПФМ) запишем в виде

$$W = J \left\{ (\nabla \theta)^2 + \sin^2 \theta (\nabla \varphi)^2 + \frac{1}{r_v^2} \cos^2 \theta \right\}, \quad (1)$$

где $J > 0$ — обменный интеграл; характерная магнитная длина $r_v = \sqrt{J/K} \gg a$, K — постоянная анизотропии; a — постоянная решетки. Динамика ФМ описывается УЛЛ, которое для энергии вида (1) может быть записано в виде

$$\nabla^2 \theta + \sin \theta \cos \theta \left[\frac{1}{r_v^2} - (\nabla \varphi)^2 \right] = + \frac{\sin \theta}{c r_v} \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad (2)$$

$$\nabla(\sin^2 \theta \nabla \varphi) = - \frac{\sin \theta}{c r_v} \frac{\partial \theta}{\partial t}, \quad (3)$$

где c — фазовая скорость магнонов (подробнее см. [1]).

Основному состоянию ЛПФМ соответствует $\theta = \pi/2$ при произвольном значении угла $\varphi = \varphi_0$. Малые колебания намагниченности на фоне этого основного состояния определяются магнонами с линейным законом дисперсии $\omega = ck$, где $k = |\mathbf{k}|$, \mathbf{k} — волновой вектор. В статическом пределе система (2), (3) имеет решение, описывающее магнитный вихрь [1]:

$$\varphi = q\chi + \varphi_0, \quad \theta = \theta_0(x), \quad x = r/r_v, \quad (4)$$

где φ_0 — произвольная постоянная; r и χ — полярные координаты в плоскости магнетика xy ; $q = \pm 1, \pm 2, \dots$ — топологический заряд вихря. Функция $\theta_0(x)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2 \theta_0}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d\theta_0}{dx} + \sin \theta_0 \cos \theta_0 \left(1 - \frac{q^2}{x^2} \right) = 0 \quad (5)$$

с естественными граничными условиями $\theta_0(0) = 0$, $\theta_0(\infty) = \pi/2$. Наименьшей энергии вихря отвечает значение топологического заряда $|q| = 1$.

Для анализа малых колебаний на фоне вихря запишем угловые переменные в виде

$$\theta = \theta_0(r) + \vartheta, \quad \varphi = q\chi + \varphi_0 + (\sin \theta_0)^{-1} \mu. \quad (6)$$

Подставляя это выражение в (2), (3) и линеаризуя по ϑ и μ , получаем следующую систему линейных дифференциальных уравнений:

$$[-\nabla_x^2 + V_1(x)] \vartheta + \frac{2q \cos \theta_0}{x^2} \frac{\partial \mu}{\partial \chi} = - \frac{r_v}{c} \frac{\partial \mu}{\partial t}, \quad (7)$$

$$[-\nabla_x^2 + V_2(x)] \mu - \frac{2q \cos \theta_0}{x^2} \frac{\partial \vartheta}{\partial \chi} = + \frac{r_v}{c} \frac{\partial \vartheta}{\partial t}, \quad (8)$$

где $\nabla_x = r_v \nabla$; потенциалы $V_1(x)$ и $V_2(x)$ имеют вид [10,13]

$$V_1(x) = \left[\frac{q^2}{x^2} - 1 \right] \cos 2\theta_0, \quad (9)$$

$$V_2(x) = \left[\frac{q^2}{x^2} - 1 \right] \cos^2 \theta_0 - \left[\frac{d\theta_0}{dx} \right]^2.$$

Динамические части уравнений (7), (8) для ФМ существенно отличаются от соответствующих слагаемых, получающихся для антиферромагнетика [11]. В частности, в антиферромагнетике для случая радиально-симметричной волны [$m = 0$ или $\vartheta = \theta(r)$, $\varphi = \varphi(r)$] уравнения (7), (8) становятся независимыми, что приводит к существованию чисто локальных мод внутри непрерывного спектра. В случае ферромагнетика эти уравнения образуют связанную систему даже при $m = 0$, что и определяет сложность проблемы, так как общий метод исследования таких уравнений не известен.

Следуя [10], будем искать решения для ϑ и μ в виде

$$\vartheta = \sum_n \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f_{\alpha}(x) \cos(m\chi + \omega_{\alpha} t + \delta_m), \quad (10)$$

$$\mu = \sum_n \sum_{m=-\infty}^{+\infty} g_{\alpha}(x) \sin(m\chi + \omega_{\alpha}t + \delta_m), \quad (11)$$

где $\alpha = (n, m)$ нумерует собственные функции; δ_m — произвольная фаза. Подставляя эти формулы в (7), (8), получаем для f_m, g_m задачу на собственные значения:

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} - \frac{m^2}{x^2} - V_1(x) \right] f_{\alpha} = \left[\frac{\omega r_v}{c} + \frac{2qm \cos \theta_0}{x^2} \right] g_{\alpha}, \quad (12)$$

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} - \frac{m^2}{x^2} - V_2(x) \right] g_{\alpha} = \left[\frac{\omega r_v}{c} + \frac{2qm \cos \theta_0}{x^2} \right] f_{\alpha}, \quad (13)$$

которая является связанной системой двух дифференциальных уравнений, содержащих операторы Шредингера.

В дальнейшем будем рассматривать только случай $m = 0, q = 1$, поэтому удобно опустить индексы у соответствующих функций и положить $f_{\alpha}(x) \equiv f(x), g_{\alpha}(x) \equiv g(x)$. Как уже отмечалось, общих методов анализа уравнений такого типа не существует, и их свойства могут сильно отличаться от свойств хорошо исследованной задачи типа $H\psi = \omega\psi$. В частности, для систем вида (12), (13) не известен аналог осцилляционной теоремы и могут возникать особенности типа локальных мод внутри континуума (см. [10]), заведомо отсутствующие для обычной задачи на собственные значения. Ограничимся анализом системы (12), (13) при малых значениях ω . Этот анализ упрощается в силу того, что при $\omega = 0$ для системы (12), (13) известно точное аналитическое решение

$$f(x) = 0, g(x) = \sin \theta_0(x). \quad (14)$$

Существование этого решения обусловлено очевидной симметрией вихря относительно изменения произвольного параметра ϕ_0 . Подставляя выражение для $g(x)$ в уравнение (12), можно убедиться, что при $\omega \neq 0$ в низшем приближении по ω функция $f(x)$ пропорциональна ω ,

$$f(x) = \omega \frac{r_v}{c} F(x) = kr_v F(x), \quad (15)$$

и может быть найдена из решения обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{d^2 F}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dF}{dx} + \cos 2\theta_0 \left(1 - \frac{1}{x^2} \right) F = \sin \theta_0. \quad (16)$$

Данные численного расчета функции $F(x) + [x \sin \theta_0(x)]'$, где штрих обозначает d/dx , представлены на рис. 1.

Подставляя выражение для $f(x)$ в (13), получаем уравнение для $g(x)$:

$$\frac{d^2 g}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dg}{dx} + \left[\left(1 - \frac{1}{x^2} \right) \cos^2 \theta_0 + \left(\frac{d\theta_0}{dx} \right)^2 \right] g = \left(\frac{\omega r_v}{c} \right)^2 F(x), \quad (17)$$

которое в правой части содержит функцию $F(x)$. Решение этого уравнения будем искать в виде

$$g(x) = \sin \theta_0(x) [1 + \beta(x)]. \quad (18)$$

Подставляя это в (17), после несложных преобразований получаем

$$\frac{1}{x \sin \theta_0} \frac{d}{dx} \left\{ x \sin^2 \theta_0 \frac{d}{dx} \beta \right\} = \left(\frac{\omega r_v}{c} \right)^2 F(x). \quad (19)$$

Отсюда находим для $g(x)$ следующее выражение:

$$g(x) = \sin \theta_0(x) \times \left[1 + (kr_v)^2 \int_0^x \frac{d\xi}{\xi \sin^2 \theta_0(\xi)} \int_0^{\xi} d\eta \eta \sin \theta_0(\eta) F(\eta) \right], \quad (20)$$

где $k = \omega/c$. Точное построение функции $g(x)$ может быть проведено, естественно, только чис-

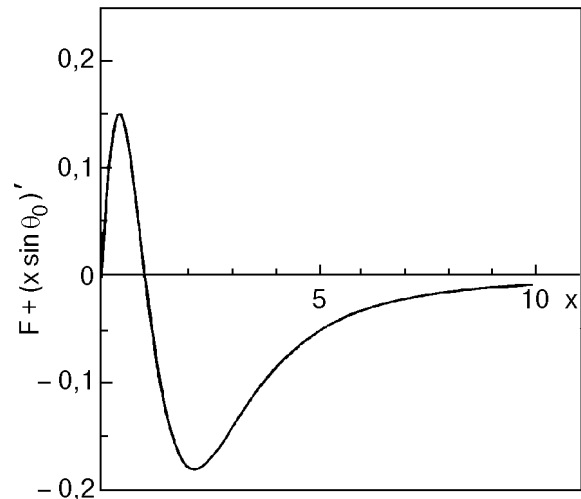


Рис. 1. Вид функции $F(x) + [x \sin \theta_0(x)]'$, полученный численно.

ленно с использованием полученных значений $\theta_0(x)$ и $F(x)$.

С другой стороны, при $x \rightarrow \infty$ (см. подробнее [10]) система уравнений (12), (13) переходит в обычную задачу на собственные значения для уравнения Шредингера, решение которого имеет следующий вид:

$$f_m(x) = c_m \frac{kr_v}{\sqrt{1 + k^2 r_v^2}} [J_m(kr_v x) + \sigma_m(kr_v) N_m(kr_v x)], \quad (21)$$

$$g_m(x) = c_m [J_m(kr_v x) + \sigma_m(kr_v) N_m(kr_v x)], \quad (22)$$

где J_m и N_m — функции Бесселя и Неймана m -го порядка; c_m — произвольная постоянная; σ_m — амплитуда рассеяния, определяющая интенсивность рассеяния магновов в присутствии вихря. Поскольку значение амплитуды рассеяния определяется формой вихря вблизи его кора, практически при $r/r_v < 3,4$, σ_m является универсальной функцией от kr_v , которая не зависит от размера системы и граничных условий.

Длинноволновые асимптотики амплитуды рассеяния

Приступим к анализу задачи рассеяния. Легко показать, что $F(x) \propto x$ при $x \rightarrow 0$ и $F(x) \rightarrow -1$ вдали от вихря. В отличие от случая $m = \pm 1$ главное приближение в функции $g(x)$ по x не имеет отношения к искомому слагаемому, содержащему функцию Неймана. Поэтому прибавим и отнимем во внутреннем интеграле в (20) функцию $[x \sin \theta_0(x)]'$ и представим его в виде

$$\begin{aligned} & - \int_0^\xi d\eta \eta \sin \theta_0 \frac{d}{d\eta} [\eta \sin \theta_0(\eta)] + \\ & + \int_0^\xi d\eta \eta \sin \theta_0(\eta) \left\{ F(\eta) + \frac{d}{d\eta} [\eta \sin \theta_0(\eta)] \right\}. \quad (23) \end{aligned}$$

Первый интеграл берется аналитически. Тогда (20) можно переписать в виде

$$g(x) = \sin \theta_0(x) \left\{ 1 - \frac{(kr_v)^2 x^2}{4} + \right.$$

$$\begin{aligned} & \left. + (kr_v)^2 \int_0^x \frac{d\xi}{\xi \sin^2 \theta_0(\xi)} \int_0^\xi d\eta \eta \sin \theta_0(\eta) \times \right. \\ & \left. \times \left\{ F(\eta) + \frac{d}{d\eta} [\eta \sin \theta_0(\eta)] \right\} \right\}. \quad (24) \end{aligned}$$

Видно, что при подстановке (23) в (20) первый интеграл привел к следующему члену разложения в ряд Тейлора функции Бесселя нулевого порядка и не имеет отношения к амплитуде рассеяния. Численный расчет внутреннего интеграла в (24) приведен на рис. 2. Видно, что с ростом x внутренний интеграл не выходит на константу, а растет, хотя и достаточно медленно. Численный анализ показал, что для $x \gg 1$ это возрастание с большой степенью точности может быть аппроксимировано логарифмической функцией $A + B \ln(x)$, где $A = 0,33$ и $B = -1$. Используя эту аппроксимацию, аналитически вычисляем (24) вдали от вихря, помня при этом, что $\sin \theta_0(x)$ экспоненциально стремится к 1 при $x \gg 1$ (см. [1]):

$$\begin{aligned} g(x) = & \left\{ 1 - \frac{(kr_v)^2 x^2}{4} + \right. \\ & \left. + (kr_v)^2 \left[A \ln(x) - \frac{1}{2} \ln^2(x) + \text{const} \right] \right\}, \quad (25) \end{aligned}$$

где const — постоянная интегрирования. Отметим, что коэффициент B может быть найден ана-

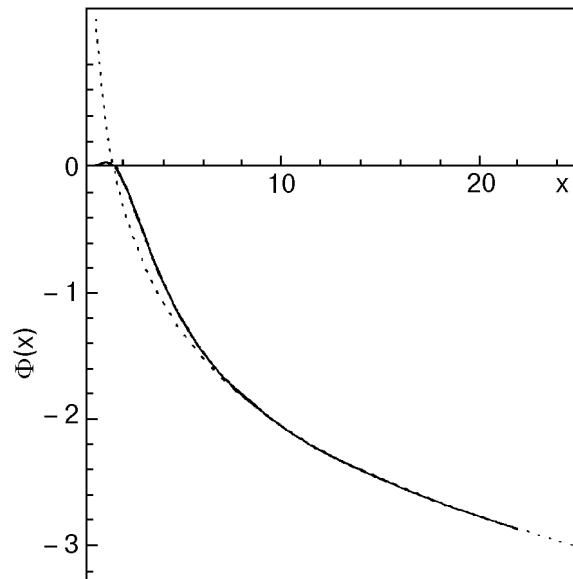


Рис. 2. Вид функции $\Phi(x)$, определяющей внутренний интеграл в формуле (24), сплошная линия — численная зависимость при всех значениях аргумента, штриховая линия — приближенная аналитическая асимптотика $0,33 - \ln x$.

литически. Понятно, что логарифмическое возрастание внутреннего интеграла в (24) при $x \ll 1$ связано со следующей асимптотикой $F(x)$:

$$F(x) = -1 - \frac{b}{x^2}. \quad (26)$$

Подставляя это выражение в уравнение (16), находим, что $b = 1$. Отсюда $B = -1$, что находится в хорошем согласии с нашими численными данными. Поскольку формула (25) справедлива при $x \gg 1$, можем отбросить все слагаемые низшего порядка и записать для $g(x)$ выражение, не содержащее постоянных, найденных численно,

$$g(x) = \left[1 - \frac{(kr_v)^2 x^2}{4} - \frac{(kr_v)^2}{2} \ln^2(x) \right]. \quad (27)$$

Таким образом, мы имеем достаточно информации о $g(x)$, чтобы приступить к вычислению амплитуды рассеяния. Для вычисления амплитуды рассеяния в длинноволновом приближении надо сравнить асимптотики функции $g(x)$ (27) и асимптотическое решение (22) в той области, где они обе приемлемы, т.е. при $1 \ll x \ll 1/kr_v$. В этой области $kr_v x \ll 1$, и можно разложить функции Бесселя и Неймана в ряд Тейлора по переменной $kr_v x$, тогда (22) представляется в виде

$$g = 1 - \frac{(kr_v)^2 x^2}{4} + \sigma_0(kr_v) \frac{2}{\pi} \ln \left(\frac{kr_v x}{2} \right). \quad (28)$$

Сравнивая (27) и (28) и отбрасывая при этом слагаемые низшего порядка, получаем

$$\sigma_0(kr_v) = \frac{\pi}{4} (kr_v)^2 \ln \left(\frac{1}{kr_v} \right). \quad (29)$$

Заключение

Обычно принимается, что амплитуда рассеяния парциальной волны с данным m убывает с ростом m (см., например, [12,13]). Однако наш анализ показал, что амплитуда рассеяния для $m = 0$ оказалась меньшей, чем для спиновой волны с $m = \pm 1$, где $\sigma_{m=\pm 1}$ линейно зависит от k , $\sigma_{m=\pm 1} = \mp \pi kr_v / 4$ (см. [10]). Как амплитуда рассеяния радиально-симметричной волны на вихре σ_0 , так и ее производная $d\sigma_0/dk$ стремятся к

нулю при $k \rightarrow 0$, однако величина $d^2\sigma_0/dk^2$ имеет логарифмическую расходимость.

Работа частично поддержана грантом INTAS 97-31311.

1. А. М. Косевич, Б. А. Иванов, А. С. Ковалев, *Нелинейные волны намагниченности. Динамические и топологические солитоны*, Наукова думка, Киев (1983); А. М. Kosevich, B. A. Ivanov, and A. S. Kovalev, *Phys. Rep.* **194**, 117 (1990).
2. H.-J. Mikeska and M. Steiner, *Adv. Phys.* **40**, 191 (1991).
3. V. G. Bar'yakhtar and B. A. Ivanov, *Soviet Scientific Rev. Sec. A-Physics*, I. M. Khalatnikov (ed.), **61**, N 31, 1 (1992).
4. J. R. Currie, J. A. Krumhansl, A. R. Bishop, and S. E. Trullinger, *Phys. Rev.* **B22**, 477 (1980).
5. Г. А. Крафтмахер, В. В. Мериакри, А. Я. Червоненкис, В. И. Щеглов, *ЖЭТФ* **63**, 1453 (1972).
6. J.-P. Boucher, G. Rius, and Y. Henry, *Europhys. Lett.* **4**, 1073 (1987).
7. Б. А. Иванов, В. М. Муравьев, *ФНТ* **24**, 672 (1998).
8. В. Л. Березинский, *ЖЭТФ* **34**, 610 (1972).
9. D. I. Huber, *Phys. Rev.* **B26**, 3758 (1982).
10. B. A. Ivanov, H. J. Schnitner, F. G. Mertens, and G. M. Wysin, *Phys. Rev.* **B58**, 8464 (1998).
11. C. E. Zaspel, T. E. Grigereit, and John E. Drumheller, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 4539 (1995).
12. V. B. Costa, M. E. Gouvea, and A. S. T. Pires, *Phys. Lett.* **A165**, 179 (1992).
13. B. A. Ivanov, A. K. Kolezhuk, and G. M. Wysin, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 511 (1996).

The scattering of radial-symmetric spin wave at vortex in two-dimensional easy-plane ferromagnet

B. A. Ivanov and I. A. Yastremsky

In the long-wave approximation (the wave number is much less than the inverse size of the vortex core) the scattering amplitude for the radial-symmetric spin wave (the azimuthal number $m = 0$) at vortex is found. The analysis is done by combining analytical and numerical calculation, but the main approximation for the scattering amplitude does not contain the values obtained from the numerical analysis. It is shown that the scattering intensity for the radial-symmetric spin wave turns out to lower than for the translation mode ($m = \pm 1$) with the same wave number.