Физика низких температур, 2003, т. 29, № 5, с. 514–518

# О фазовой диаграмме развития неустойчивости массивной заряженной поверхности жидкого гелия

В. Шикин

*Институт физики твердого тела РАН, п. Черноголовка Московской обл., 142432, Россия*
E-mail: shikin@issp.ac.ru

Статья поступила в редакцию 5 марта 2003 г.

Существующая трактовка развития неустойчивости массивной заряженной поверхности гелия нуждается в определенной коррекции, сближающей данное явление с известными процессами спинодального и бинодального распадов в теории фазовых превращений первого рода. Обсуждаются особенности развития неустойчивости заряженной поверхности гелия, обладающие признаками спинодального (бинодального) распадов, и построена качественная фазовая диаграмма для таких переходов на плоскости с координатами поверхностная плотность электронов — электрическое поле над заряженной $2D$ электронами плоскостью.

Існуюча трактовка розвитку нестійкості масивної зарядженої поверхні гелію потребує визначеної корекції, що зближує дане явище з відомими процесами спінодального та бінодального розпадів у теорії фазових перетворень першого роду. Обговорюються особливості розвитку нестійкості зарядженої поверхні гелію, що мають ознаки спінодального (бінодального) розпадів, та побудовано якісну фазову діаграму для таких переходів на площині з координатами поверхнева густина електронів — електричне поле над зарядженою $2D$ електронами площиною.

PACS: 67.40.Jg

Задача о неустойчивости и реконструкции заряженной поверхности гелия относится к разряду хорошо освоенных. Первоначальные результаты Френкеля — Тонкса [1–3] о колебаниях и устойчивости поверхности заряженной металлической жидкости были перенесены на поверхность гелия с $2D$ электронами в работах Горькова, Черниковой [4,5]. В дальнейшем эти же авторы развили теорию эквипотенциальной реконструкции заряженной поверхности жидкости (см. [6]). Речь идет о переходе от плоского к периодическому, гофрированному состоянию заряженной границы жидкости. Теория предсказывает тип возникающей решетки, ее период, амплитуду гофрировки и т.д. Возмущенная поверхность жидкости при этом остается электрически эквипотенциальной.

В альтернативной картине реконструкции заряженная поверхность гелия разбивается на систему отдельных многоэлектронных лунок (Шикин, Лейдерер [7]). Каждая из них имеет заряженное ядро, за пределами которого жидкость нейтральна. Взаимодействие между лунками может выстраивать их в различные кластеры и, в частности, способствовать их периодичному распределению вдоль поверхности.

Несмотря на длительное «сосуществование», до сих пор первичность эквипотенциальной реконструкции не подвергалась сомнению. Этому способствовала работа Мельникова и Мешкова [8], в которой показано, что при нарастании надкритичности (превышение электрического поля над критическим) в условиях сохранения полного числа электронов эквипотенциальная реконструкция сменяется луночной.

Эксперименты, выполненные в основном с использованием электронов над гелием, находятся в хорошем соответствии с предсказаниями [1–5] о границах устойчивости заряженной поверхности жидкости (см. [9]). Позднее был изучен с подтверждением всех ожидаемых деталей наиболее интересный участок закона дисперсии ее колебаний, критически чувствительный к электронной плотности [10]. И, наконец, доказано существование периодичного [11] и апериодичного [12] вариантов реконструкции жидкой, проводящей границы.

Однако не все благополучно в обсуждаемой картине. Прежде всего, расчеты эквипотенциальной периодической реконструкции, выполненные с привлечением теории возмущений, использующей ма-

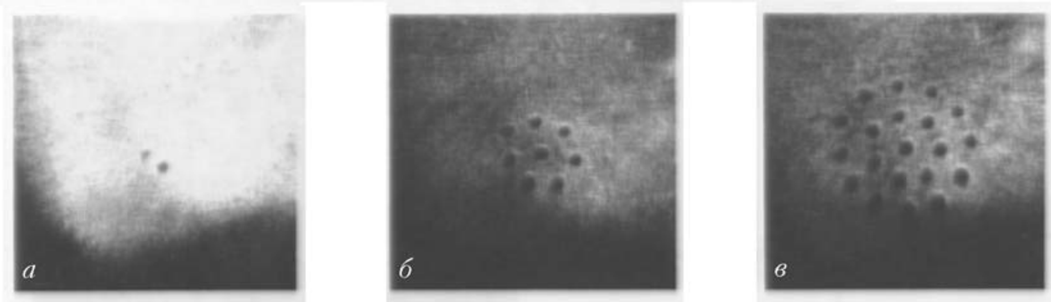


*Рис. 1.* Система отдельных многоэлектронных лунок, возникающих на слабо заряженной поверхности гелия при монотонном росте полного числа электронов (из [12]).

лость амплитуды гофрировки поверхности по сравнению с капиллярной длиной, справедливы лишь в области слабой заряженности поверхности гелия, когда имеет место так называемый мягкий режим реконструкции (амплитуда возмущения много меньше капиллярной длины, терминология [6]). Заряженностью поверхности жидкости называется отношение $\nu$ средней плотности $2D$ электронов $n_s$ к ее критическому значению $n_s^{\max}$ (см. (10)). В то же время экспериментальное наблюдение [11] периодической реконструкции вдоль всей доступной поверхности гелия возможно лишь в окрестности максимальных значений $\nu \leq 1$, когда реализуется жесткий режим реконструкции (амплитуда гофра имеет масштаб капиллярной длины). Такое несоответствие, конечно, не принципиально, если бы не факт номер два. При малых значениях $\nu << 1$ наблюдаемая реконструкция непериодична. Поверхность гелия не покрывается здесь периодическим гофром, заполняющим все жидкое зеркало, как это следует из предсказаний [6,8]. Вместо этого электроны собираются в одну или несколько многоэлектронных лунок, занимающих лишь небольшую часть общей поверхности гелия. Для иллюстрации на рис. 1 приведена картина луночной реконструкции из [12] в области $\nu << 1$ при постепенном увеличении $\nu$. Очевидно, луночный сценарий реконструкции энергетически более выгоден, и это обстоятельство требует осмысления.

В данной работе показано, что процесс реконструкции обнаруживает свойства фазового перехода 1-го рода. Для превращений такого типа пересечение химических потенциалов конкурирующих фаз определяет точку (линию) бинодальной устойчивости, в окрестности которой фаза-фаворит зарождается флуктуационным образом. Этот процесс в случае гелия представлен зарождением многоэлектронных лунок на фоне однородного, близкого критическому, заряженного состояния жидкой поверхности. Кроме того, имеется точка (линия) абсолютной неустойчивости (спинодаль), которая возникает в динамических уравнениях перехода и проявляет себя без всяких пороговых ожиданий. Для заряженной жидкости спинодалью является порог динамической неустойчивости Френкеля—Тонкса. На фазовой диаграмме бинодаль, как правило, имеет больший фазовый объем, хотя для появления зародышей необходимо активационное время. Спинодальный переход стимулируется резким скачком какого-либо внешнего параметра в спинодальную область диаграммы, после чего должно происходить характерное экспоненциальное во времени развитие неустойчивости. Вопрос о точках сосуществования бинодали и спинодали не имеет общего решения. Иногда такое бывает, иногда — нет.

Если предлагаемая картина верна, то все имеющиеся к настоящему времени эксперименты с реконструкцией заряженной поверхности гелия выполнены в бинодальной области. При малых факторах заполнения речь идет о появлении лишь отдельных лунок. С ростом $\nu$ лунки объединяются в луночные комплексы (кластеры) с внутренней периодичностью (рис. 1,*б*,*в*). В области $\nu \to 1$ площадь кластера стремится к полной площади жидкого зеркала. Что касается спинодального распада, то его еще предстоит обнаружить.

**1**. Переходя к конкретным результатам, обсудим сначала свойства спинодали. Рассмотрим систему, приведенную на рис. 2. Электрические поля $E_-$ над и $E_+$ под заряженной поверхностью гелия равны

$$E_- = \frac{V}{h} - 4\pi\sigma\frac{d}{h}, \qquad (1)$$

$$E_+ = \frac{V}{h} + 4\pi\sigma\frac{(h-d)}{h}, \qquad (2)$$

где $\sigma = en_s$, $V$ — разность потенциалов между пластинами ячейки.

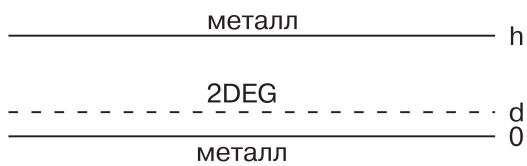


*Рис. 2.* Схема ячейки с $2D$ электронной системой и геометрическими обозначениями.

В условиях полной экранировки внешнего поля над гелием, когда $E_- = 0$ и, следовательно,

$$4\pi\sigma = \frac{V}{d}, \tag{3}$$

напряженность $E_+$ оказывается равной

$$E_+ = \frac{V}{d}. \tag{4}$$

При заданных $d_0$ и $V$, где $d_0$ — толщина пленки гелия в отсутствие внешнего поля, поверхность гелия прогибается под действием электронного давления $P_{\rm el} = E_+^2 / 8\pi$ на глубину

$$\xi_\infty = d - d_0, \tag{5}$$

величина которой определяется условиями механического равновесия и сохранения полного объема жидкости:

$$\rho g \xi_\infty + \frac{V^2}{8\pi d_0^2} = \rho g \xi_0, \tag{6}$$

$$L^2 \xi_\infty + (L_0^2 - L^2)\xi_0 = 0, \qquad L_0 > L, \tag{7}$$

$$|\xi_\infty| << d_0 .$$

Здесь $\rho$ и $g$ — плотность жидкого гелия и ускорение силы тяжести, $L$ — радиус электронного диска на поверхности гелия, $L_0$ и $\xi_0$ — радиус и деформация жидкой поверхности за пределами электронного диска.

Совместное решение уравнений (6), (7) дает

$$\xi_\infty = -\frac{V^2}{8\pi\rho g^* d_0^2}, \qquad g^* = g\left(1 + \frac{L^2}{L_0^2 - L^2}\right). \tag{8}$$

В условиях $\xi_\infty << d_0$ деформация поверхности гелия для дальнейших рассуждений несущественна.

В терминах $E_-$, $E_+$ динамическая устойчивость заряженной жидкости определена условием

$$(4\pi e n_s)^2 + (E_+ + E_-)^2 = 16\pi\kappa\alpha, \quad \kappa^2 = \frac{\rho g}{\alpha}, \tag{9}$$

где $E_-$, $E_+$ — из (1), (2); $\alpha$ — поверхностное натяжение жидкого гелия, $\kappa^{-1}$ — капиллярная длина. В данной задаче реально независимы разность потенциалов $V$ и плотность электронов $n_s$. Однако наглядность фазовой диаграммы на рис. 3 в «координатах» ($n_s$, $E_-$) приводит к несколько искусственному выбору именно этих переменных в качестве независимых.

Если $E_- = 0$ (полная экранировка), то

$$E_+ = \frac{V}{d} \equiv 4\pi e n_s^{\max},$$

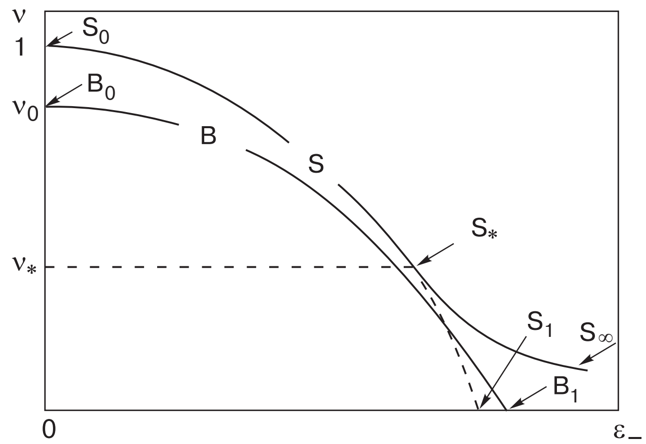


*Рис. 3.* Схематическая фазовая диаграмма для реконструкции заряженной поверхности гелия. На спинодали (линия $S$) отмечены точки: $S_0$ — асимптотика (12а), $S_*$ — точка «ветвления» в определении спинодали (см. комментарии к формуле (16)), $S_1$ — абстрактная точка (12б) из эквипотенциального «багажа», $S_\infty$ — асимптотика (16). Бинодаль представлена линией $B$. На ней помечены точки $B_0$ — положение бинодали, согласно оценкам (22) ($\nu_0 = \sqrt{16{,}52/8\pi} = 0{,}81$), $B_1$ — окончание бинодали в области $\nu \to 0$ (оценка (19)). Область устойчивости занимает сектор между началом координат и бинодалью.

и равенство (9) определяет максимальную плотность $n_s^{\max}$ электронов над гелием:

$$\sigma_{\max}^2 = \frac{\kappa\alpha}{2\pi} + (E_+^{\max})^2 = 8\pi\kappa\alpha. \tag{10}$$

Вводя фактор заполнения

$$\nu = \frac{\sigma}{\sigma_{\max}}, \tag{11}$$

приводим соотношение (9) к виду

$$\nu^2 + (\varepsilon_+ + \varepsilon_-)^2 = 2, \quad \varepsilon_\pm = \frac{E_\pm}{4\pi\sigma_{\max}}. \tag{12}$$

На фазовой плоскости $(\nu, \varepsilon_-)$ кривая $\nu(\varepsilon_-)$ (12) играет роль спинодали. Если $\varepsilon_- \to 0$, то

$$\nu(\varepsilon_- \to 0) \to 1. \tag{12а}$$

В обратном пределе $\nu \to 0$

$$\varepsilon_-(\nu \to 0) = \varepsilon_+(\nu \to 0) \to 1/\sqrt{2}. \tag{12б}$$

Положение точек (12а), (12б) на спинодали «$S$» (рис. 3) отмечено символами $S_0$, $S_1$.

Предел (12б) в определении (12) в действительности не имеет реального смысла, так как на пути к нему перестает выполняться условие эквипотенциальности деформированной поверхности гелия. Существуют разные оценки положения этой границы, хотя конкретные расчеты закона дисперсии в переходной области отсутствуют. Для ориентировки можно полагать, что эквипотенциальность пропадает в области

$$V_C \le T, \quad V_C \sim e^2 \sqrt{n_s}. \tag{13}$$

Для $T \le 1$ К переходная область для электронной плотности имеет масштаб $n_s^* \le 10^6$ см$^{-2}$.

В условиях $n_s < n_s^*$ задача о колебаниях заряженной поверхности гелия должна решаться заново без использования свойств ее эквипотенциальности. Подходящей альтернативой, учитывающей влияние деформации жидкой границы на электронную плотность $n(x)$, является требование

$$n(x) = n_s \exp[-eE_\perp \xi(x)/T], \tag{14}$$

где $\xi(x)$ — амплитуда колебаний заряженной поверхности, $E_\perp$ — прижимающее электрическое поле.

С учетом (14) (точнее, его линейного разложения, когда $eE_\perp\xi(x) < T$) и электронного давления на поверхность гелия $P_{\rm el} = eE_\perp n(x)$ закон дисперсии малых колебаний заряженной поверхности принимает вид

$$\frac{\rho\omega^2}{\alpha} = (\kappa^2 - \eta^2)q + \alpha q^3, \quad \eta^2 = \frac{n_s E_\perp^2}{\alpha T}. \tag{15}$$

Как и в задаче Френкеля—Тонкса, колебания с законом дисперсии (15) теряют устойчивость. Но это происходит в другой области, а именно

$$\eta^2 > \kappa^2, \qquad E_\perp \simeq V/h. \tag{16}$$

Согласно (16), для достижения неустойчивости слабо заряженной поверхности гелия нужно использовать поле, которое увеличивается с уменьшением $n_s$, как $E_\perp \propto n_s^{-1/2}$. Это утверждение качественно отлично от «эквипотенциальных» предсказаний (см. асимптотику (12б)). Следовательно, асимптотика спинодали в области малых $\nu$ заканчивается не в точке $S_1$, а протягивается корневым образом вплоть до $\varepsilon_- \to \infty$. Ордината $\nu_*$ на рис. 3 отмечает уровень, в окрестности которого происходит переход от (12б) к (16).

Следует отметить, что неустойчивость (16) развивается, в первую очередь, на малых волновых числах (а не на капиллярной длине, как в случае (9)).

**2**. В отличие от спинодали бинодаль процесса реконструкции определяется не очень надежно. Конкурирующими здесь являются энергия лунки и электростатическая энергия конденсатора с $2D$ электронами, в котором флуктуационно возникла лунка. Неопределенность заключается в оценке оптимального заряда, образующего критическую лунку. Ситуация относительно проста лишь в предельном случае $\nu << 1$. Здесь с учетом развития неустойчивости (16) на малых волновых числах все свободные электроны в момент перехода «скатываются» в лунку. Это происходит в условиях, когда кулоновская энергия $V_C$ электронной системы, занимающей круг радиусом $L$ между пластинами конденсатора (рис. 2), достигает энергии $W$ многоэлектронной лунки с тем же зарядом $Q$:

$$V_C = Q^2 \frac{(h-d)d}{L^2 h}, \qquad Q = \pi L^2 e n_s, \tag{17}$$

$$W = Q^2 \kappa \left[ s \exp\left(\frac{x^2}{2}\right) \mathrm{Ei}\left(-\frac{x^2}{2}\right) - \frac{1}{x} \right], \tag{18}$$

$$s = \frac{2}{2\kappa R_*}, \;\; x = \kappa R, \;\; R_*^2 = \frac{\sqrt{\pi}\,\alpha}{eE_\perp^2}, \;\; E_\perp \simeq \frac{V}{h},$$

$\mathrm{Ei}(x)$ — интегральная показательная функция. Величина $R$ в (18) находится из условия минимума энергии $W$ по $R$.

При $L >> h$ энергия $V_C$ (17) достаточно мала и вместо общего, конкурирующего с $V_C$, выражения $W$ (18) можно воспользоваться его разложением вблизи нулевой точки:

$$W(s_0, x_0) = 0, \quad s_0 = 1{,}05, \quad x_0 = 0{,}72,$$

$$W(s, x_0) \simeq \frac{\partial W}{\partial s_0}(s - s_0). \tag{18a}$$

В результате равенство конкурирующих энергий принимает вид

$$Q^2 \frac{(h-d)\,d}{L^2 h} = \frac{\partial W}{\partial s_0}(s_{\max} - s_0), \tag{19}$$

определяя значение $s_{\max}$. Если учитывать малость левой части (19), то величина $s_{\max}$ близка к $s_0$.

Электрическое поле $E_-^{\max}$, связанное с величиной $s_{\max}$ формулами (18), определяет абсциссу на рис. 3, куда «упирается» бинодаль при $n_s \to 0$. Это поле конечно и не зависит от $n_s$ (величина $n_s$ выпадает из определения (19)). Следовательно, в пределе $n_s \to 0$ бинодаль находится «под» асимптотикой (16) спинодали.

В обратном предельном случае $E_- \to 0$ характерные флуктуации развиваются в окрестности волновых чисел $q \sim \kappa$. Следовательно, оптимальный заряд $Q_\kappa$, приходящийся на одну лунку, имеет масштаб

$$Q_\kappa \simeq \pi\kappa^{-2} e n_s. \tag{20}$$

Противостоит возникновению лунки дипольная энергия $V_C^\kappa$ для распределения заряда, имеющего вид плоского диска радиусом $\kappa^{-1}$ с электронной плотностью $n_s$ и компенсирующего положительного заряда, локализованного в его центре. Как и в случае (19), равенство

$$V_C^{\kappa} = W_{\kappa} \tag{21}$$

не зависит от $n_s$. По аналогии с (19) его левая часть содержит дополнительную малость $(\kappa R)^2$ по сравнению с кулоновской энергией лунки, хотя и не такую серьезную, как в (19). В результате решение уравнения (21) относительно $s$ снова (как и в случае (19)) дает значение, близкое к $s_0$, т.е. полевой порог практически сохраняется на всей бинодали. В размерных единицах это поле равно

$$(E_+^0)^2 = (2\pi)^{3/2} s_0 \kappa\alpha \simeq (16{,}52 \pm 0{,}005)\kappa\alpha. \tag{22}$$

Поле $(E_+^0)^2$ несколько меньше критического поля $E_+^{\max}$ (9), (10) для спинодали.

Ориентируясь на две характерные бинодальные точки (19), (21), (22) и полагая, что искомая кривая на плоскости $(n_s, E_-)$ не имеет специальных особенностей в промежутке между ее предельными значениями, можно представить бинодаль реконструкции заряженной поверхности гелия в виде, изображенном на рис. 3 (линия $B$).

**3**. Отметим, что две лунки могут находиться в равновесии на конечном расстоянии друг от друга. Взаимодействие $W_{dd}^b$ между ними содержит кулоновскую и деформационные части

$$W_{dd}^b = -\frac{Q^2 E_\perp^2}{2\pi\alpha} K_0(\kappa r) + \frac{Q^2}{r}. \tag{23}$$

Здесь, как и выше, $Q$ — полный заряд лунки, $E_\perp$ — прижимающее поле, $r$ — расстояние между лунками, $K_0(x)$ — модифицированная функция Бесселя. Энергия (23) имеет минимум $\partial W_{dd}^b / \partial r = 0$ в точке $r_{\min}$, которую можно определить из

$$K_1(x_m) - x_m^{-2} = 0, \quad x_m = \kappa r_{\min}, \quad x_m \geq 1. \tag{24}$$

Наличие метастабильной связи (24) между лунками качественно поясняет, почему возникающая в ходе бинодального распада $2D$ заряженной системы совокупность лунок собирается в кластеры, имеющие внутреннюю периодичность с характерной длиной порядка капиллярной.

Резюмируя, можно сказать, что качественно новым в приведенном рассмотрении является объяснение данных, приведенных на рис. 1, свидетельствующих о возможности апериодичной реконструкции заряженной поверхности гелия. Интересной представляется и возможность «уловить» бинодальные (спинодальные) мотивы в поведении реконструкции заряженной поверхности гелия, что послужило основанием для построения диаграммы (рис. 3).

Работа частично финансирована РФФИ, грант 03 02 16121.


1. Ja. Frenkel, *Z. Sowietunion* **8**, 675 (1935).
2. L. Tonks, *Phys. Rev.* **48**, 562 (1935).
3. Я. Френкель, *ЖЭТФ* **6**, 347 (1936).
4. Л. Горьков, Д. Черникова, *Письма в ЖЭТФ* **18**, 119 (1973).
5. Д. Черникова, *ФНТ* **2**, 1374 (1976).
6. Л. Горьков, Д. Черникова, *ДАН СССР* **228**, 829 (1976).
7. В. Шикин, П. Лейдерер, *Письма в ЖЭТФ* **32**, 439 (1981).
8. В. Мельников, С. Мешков, *Письма в ЖЭТФ* **33**, 222 (1981).
9. А. Володин, М. Хайкин, В. Эдельман, *Письма в ЖЭТФ* **26**, 707 (1977).
10. P. Leiderer, *Phys. Rev.* **B20**, 4511 (1979).
11. M. Wanner, and P. Leiderer, *Phys. Rev. Lett.* **42**, 315 (1979).
12. P. Leiderer, W. Ebner, and V. Shikin, *Surf. Sci.* **113**, 405 (1982).


## On the phase diagram of instability evolution for a massive charged surface of liquid helium

V. Shikin

The current treatment of instability evolution for a massive charged surface of helium needs a certain correction which would bridge the gap between the effect under consideration and the known processes of spinodal and binodal decomposition in the first-order transition theory. The peculiarities of instability evolution for the helium charged surface which exhibit spinodal (binodal) decomposition features are discussed. A qualitative phase diagram for such transition is constructed on a plane with the coordinates: surface electron density-electric field over the 2$D$ electron-charged plane.