Физика низких температур, 2003, т. 29, № 4, с. 387–391

# Собственные моды электромагнитного поля в условиях существования магнитной доменной структуры

В.Г. Песчанский[1,2], Д.И. Степаненко[2]

[1]*Физико-технический институт низких температур им. Б.И. Веркина НАН Украины*
*пр. Ленина, 47, г. Харьков, 61103, Украина*
E-mail: vpeschansky@ilt.kharkov.ua

[2]*Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина*
*пл. Свободы, 4, г. Харьков, 61077, Украина*

Статья поступила в редакцию 2 августа 2002 г.

Определен спектр собственных слабозатухающих колебаний электромагнитного поля в металлах, помещенных в квантующее магнитное поле, в условиях существования магнитной доменной структуры.

Визначено спектр власних слабозатухаючих коливань електромагнітного поля в металах, розміщених у квантуючому магнітному полі, в умовах існування магнітної доменної структури.

PACS: 72.15.Gd, 72.15.Nj

При низких температурах термодинамические и кинетические характеристики металла, помещенного в квантующее магнитное поле $\mathbf{H}_0 = (0,0,H_0)$, испытывают осцилляционную зависимость от обратной величины магнитного поля. Причиной этих осцилляций являются особенности плотности состояний носителей заряда, связанные с квантованием энергии в магнитном поле. При этом на заряды фактически действует поле, усредненное по областям порядка ларморовского радиуса, т.е. магнитная индукция $\mathbf{B}$. Пока магнитная восприимчивость $\chi$ мала, разницу между $\mathbf{B}$ и $\mathbf{H}$ можно не учитывать. Если расстояние между уровнями энергии $\Delta\varepsilon \cong \hbar\Omega$ носителей заряда в магнитном поле много больше температуры носителей $T$ и ширины уровней $\hbar/\tau$, но много меньше энергии Ферми $\varepsilon_F$, т.е. $\hbar/\tau,\ T \ll \hbar\Omega \ll \varepsilon_F$, то осциллирующая часть магнитной восприимчивости может достигать значений порядка единицы и намагниченность $\mathbf{M(B)}$ и магнитное поле $\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M(B)}$ становятся функциями магнитной индукции. Здесь $\hbar$, $\Omega$, $\tau$ — соответственно постоянная Планка, циклотронная частота и время свободного пробега электронов проводимости. В этом случае учет магнетизма среды представляет собой самосогласованную задачу даже в проводниках, не обладающих магнитным упорядочением. Если $\chi > 1/4\pi$, то состояние системы становится неустойчивым и образец разбивается на чередующиеся домены с различными значениями магнитной индукции [1,2].

В настоящей работе исследованы собственные слабозатухающие колебания электромагнитного поля в некомпенсированных металлах в условиях существования стационарной доменной структуры распределения магнитной индукции. Переменное электромагнитное поле в металле определяется системой уравнений Максвелла

$$\mathrm{rot}\ \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J},\ \mathrm{rot}\ \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},\ \mathrm{div}\ \mathbf{B} = 0, \qquad (1)$$

где $c$ — скорость света в вакууме; $\mathbf{J} = \mathbf{j} + \mathbf{j}'$ — суммарная плотность тока, состоящего из плотности тока проводимости $\mathbf{j}$, обусловленного электрическим полем $\mathbf{E}$, и плотности тока намагниченности $\mathbf{j}' = c\,\mathrm{rot}\ \mathbf{M}$, индуцированного магнитным полем.

В случае слабой временной и пространственной дисперсии

$$\omega \ll \Omega, \quad kr_0 \ll 1, \quad k_z v_F \tau \ll 1,$$
$$\kappa^2 \equiv \left|1 - 4\pi\chi(\mathbf{B}_0)\right| \ll 1, \qquad (2)$$

где $r_0$ — радиус кривизны орбиты носителей заряда в однородном поле $\mathbf{B}_0 = (0,0,B_0)$; $v_F$ — их фермиевская скорость; $\omega$ и $\mathbf{k}$ — частота и волновой вектор переменного поля $\mathbf{B}(y,z,t)$. Интегральные выражения для плотности тока проводимости и намагниченности можно привести к локальному виду, т.е. представить в виде разложения по степеням переменных электрического и магнитного полей и их производных. При $\kappa^2 \equiv |1 - 4\pi\chi(\mathbf{B_0})| << 1$ линейный член разложения магнитного поля $\mathbf{H}$ по степеням $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$ может оказаться того же порядка величины, что и нелинейные слагаемые, и волновые процессы становятся существенно нелинейными. Для волн малой амплитуды достаточно учитывать только нелинейную поправку к намагниченности, пропорциональную третьей степени $\mathbf{B}$ [3,4]. В выражении для плотности тока проводимости можно ограничиться линейным приближением относительно электрического поля $\mathbf{E}$ и пренебречь градиентными слагаемыми, пропорциональными степеням малого параметра $(kr_0)^2$, и квантовой осциллирующей поправкой, пропорциональной $(\hbar\Omega/\varepsilon_F)^{1/2}$. Плотность тока $\mathbf{j}'$, индуцированного магнитным полем, определяется компонентой намагниченности $M_z$, так как вектор $\mathbf{M}$ направлен преимущественно вдоль $\mathbf{B}_0$. Выражение для $\mathbf{j}' = (j_x',0,0)$ можно записать в виде [3–5]

$$j_x' = c(\operatorname{rot}\mathbf{M})_x = c\frac{\partial M_z}{\partial y} = c\chi(\mathbf{B}_0)\frac{\partial B_z}{\partial y} -$$

$$-4\pi c\beta\frac{\partial B_z^3}{\partial y} + 4\pi\alpha c r_0^2\frac{\partial^3 B_z}{\partial y^3}, \tag{3}$$

где $\beta = \zeta(\varepsilon_F/\hbar\Omega B_0)^2$ $\alpha$ и $\zeta$ — численные коэффициенты порядка единицы, зависящие от конкретного вида закона дисперсии носителей заряда.

В стационарном случае в отсутствие электрического поля решение системы (1) при $\chi(B_0) > 1/4\pi$ имеет вид

$$B_1(y) = b_0\frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}\operatorname{sn}\left(\frac{y}{\delta\sqrt{1+\mu^2}},\mu\right) \tag{4}$$

и описывает периодическую доменную структуру с периодом $Y = 4\delta\sqrt{1+\mu^2}K(\mu)$ и толщиной доменной стенки $\delta = \sqrt{4\pi\alpha}r_0/\kappa$. Здесь

$$b_0 = (\kappa^2/2\pi\beta)^{1/2} \approx \kappa B_0(\hbar\Omega/\varepsilon_F),$$

$$K(\mu) = \int_0^1 dt[(1-t^2)(1-\mu^2t^2)]^{-1/2} \equiv K$$

— полный эллиптический интеграл первого рода. Модуль $\mu$ эллиптической функции Якоби sn определяет период $Y$ и находится из условия минимума (по $Y$) полного термодинамического потенциала с учетом поверхностной энергии на границах доменов. В практически наиболее важном случае, когда линейные размеры образца $L$ значительно превышают ларморовский радиус электрона, справедлива оценка $Y \sim \sqrt{\kappa^2 r_0 L}$ [6]. Без ограничения общности можно считать, что размеры доменов велики по сравнению с $\delta$, $Y >> \delta$, т.е.

$$K >> \pi. \tag{5}$$

При этом легко заметить, что $\mu$ близко к единице, поскольку при $K >> 1$ справедливо асимптотическое выражение $K \approx -2\ln(1-\mu^2)$.

Положим $B_z(y,z,t) = B_1(y) + B^\sim(y,z,t)$, где $B^\sim(y,z,t) = b(y)e^{-i\omega t + ik_z z}$ — малое пространственно-временное возмущение. Линеаризуя систему уравнений Максвелла (1) по $\mathbf{B}^\sim(y,z,t)$, после исключения электрического поля $\mathbf{E}$ получим для нестационарного поля $\mathbf{B}^\sim(y,z,t)$ следующее уравнение:

$$\frac{\partial\mathbf{B}^\sim}{\partial t} = -\frac{c^2}{4\pi}\operatorname{rot}(\hat{\rho}\operatorname{rot}\mathbf{H}^\sim). \tag{6}$$

Здесь

$$(\hat{\rho}\operatorname{rot}\mathbf{H}^\sim)_i = \rho_{ij}(\operatorname{rot}\mathbf{H}^\sim)_j,\ H_x^\sim = B_x^\sim,\ H_y^\sim = B_y^\sim,$$

$$H_z^\sim = -\kappa^2 B_z^\sim + 12\pi\beta B_1^2(y)B_z^\sim - 4\pi\alpha r_0^2\frac{\partial^2 B_z^\sim}{\partial y^2}.$$

Тензор сопротивления можно представить в виде суммы симметричной и антисимметричной частей: $\rho_{ij} \equiv \rho_{ij}^{(s)} + \rho_{ij}^{(a)}$. Компоненты $\rho_{ij}^{(s)}$ имеют одинаковый порядок величины и стремятся к константам при $B_0 \to \infty$. Будем считать, что тензор $\rho_{ij}^{(s)}$ приведен к главным осям. Вообще говоря, это справедливо только в случае, когда магнитное поле направлено вдоль оси симметрии кристалла. Однако учет недиагональных компонент тензора сопротивления приводит не к качественному изменению спектра волн, а лишь к появлению дополнительных слагаемых в декременте затухания волны, не меняя при этом порядок его величины.

В основном приближении по степеням малого параметра $(\Omega\tau)^{-1}$ диагональные компоненты тензора сопротивления равны $\rho_{xx} = \beta_1\rho_0(1-i\omega\tau)$, $\rho_{yy} = \beta_2\rho_0(1-i\omega\tau)$, $\rho_{zz} = \beta_3\rho_0$. Здесь $\rho_0 = \sigma_0^{-1}$, $\sigma_0 \cong \omega_p^2\tau/4\pi$ — статическая электропроводность металла в отсутствие магнитного поля, $\omega_p$ — частота плазменных колебаний носителей заряда; $\beta_1$, $\beta_2$ и $\beta_3$ — безразмерные коэффициенты порядка единицы, зависящие от конкретного вида закона дисперсии носителей заряда, которые мы для простоты будем считать равными единице. В выражении для антисимметричной части тензора сопротивления $\rho_{ij}^{(a)}$ достаточно учесть лишь основные, холловские компоненты $\rho_{xy} = -\rho_{yx} = B_0/ce(n_e - n_h)$, где $n_e$ и $n_h$ — плотности электронов и дырок, $e$ — абсолютная величина заряда электрона.

В этих условиях система уравнений (6) приобретает вид

$$\frac{\partial B_x^{\sim}}{\partial t} = -\frac{c^2\rho_{xy}}{4\pi}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial H_z^{\sim}}{\partial y} - \frac{\partial B_y^{\sim}}{\partial z}\right) + $$

$$+ \frac{c^2\rho_0}{4\pi}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + (1 - i\omega\tau)\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)B_x^{\sim},$$

$$\frac{\partial B_y^{\sim}}{\partial t} = -\frac{c^2\rho_{xy}}{4\pi}\frac{\partial^2 B_x^{\sim}}{\partial z^2} -$$

$$-\frac{c^2\rho_0}{4\pi}(1 - i\omega\tau)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial H_z^{\sim}}{\partial y} - \frac{\partial B_y^{\sim}}{\partial z}\right),$$

$$\frac{\partial B_z^{\sim}}{\partial t} = \frac{c^2\rho_{xy}}{4\pi}\frac{\partial^2 B_x^{\sim}}{\partial z \partial y} +$$

$$+ \frac{c^2\rho_0}{4\pi}(1 - i\omega\tau)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial H_z^{\sim}}{\partial y} - \frac{\partial B_y^{\sim}}{\partial z}\right). \qquad (7)$$

Исключая из этих уравнений $B_x^{\sim}, B_y^{\sim}$ и пренебрегая слагаемыми, пропорциональными $(\Omega\tau)^{-2}$, получаем следующее уравнение для $b(y)$:

$$\left[k_z^2 - i\gamma(1 - i\omega\tau)\omega\left(\frac{4\pi}{c^2|\rho_{xy}|}\right)\right]\left[\kappa^2\frac{\partial^2 b(y)}{\partial y^2} - \right.$$

$$\left. -12\pi\beta\frac{\partial^2}{\partial y^2}(b(y)B_1^2(y)) + 4\pi\alpha r_0^2\frac{\partial^4 b(y)}{\partial y^4}\right] =$$

$$= -i\gamma\omega\left(\frac{4\pi}{c^2|\rho_{xy}|}\right)\frac{\partial^2 b(y)}{\partial y^2} + \left[\left(\frac{4\pi}{c^2|\rho_{xy}|}\right)^2\omega^2 - k_z^4 + \right.$$

$$\left. + 2i\gamma(1 - i\omega\tau)\omega k_z^2\left(\frac{4\pi}{c^2|\rho_{xy}|}\right)\right]b(y). \qquad (8)$$

Здесь

$$\gamma = (\sigma_0|\rho_{xy}|)^{-1} \approx \left|\frac{n_e - n_h}{n_e + n_h}\right|(\Omega\tau)^{-1} \sim (\Omega\tau)^{-1} \ll 1.$$

Это уравнение определяет амплитуду и частоту собственных колебаний электромагнитного поля в условиях существования периодической доменной структуры.

Случай, когда выражение в скобках в правой части (8) равно нулю, соответствует волне с частотой

$$\omega = \frac{k^2 c B_0}{4\pi e|n_e - n_h|}(1 - i\gamma), \qquad (9)$$

распространяющейся вдоль направления внешнего магнитного поля. При этом уравнение (8) преобразуется в уравнение Ламэ, и его решение выражается в тэта-функциях [7].

В предельном случае $\gamma \ll \kappa^2$ решение этого уравнения имеет вид

$$b(y) = A\,\mathrm{cn}\left(\frac{y}{\delta\sqrt{1+\mu^2}}, \mu\right)\mathrm{dn}\left(\frac{y}{\delta\sqrt{1+\mu^2}}, \mu\right), \qquad (10)$$

cn и dn — эллиптические функции Якоби. В силу неравенства (5) функция $b(y)$ существенно отлична от нуля лишь в области доменной стенки, т.е. в окрестности точек $y_n = 2nK\delta\sqrt{1+\mu^2}$, где $n$ — целое. В области $|y - y_n| \gg \delta$ нестационарное поле $\mathbf{B}^{\sim}(\mathbf{r}, t)$ представляет собой геликоидальную волну, распространяющуюся вдоль направления $\mathbf{B}_0$. В пренебрежении диссипативными эффектами остальные компоненты магнитного поля волны равны

$$\begin{pmatrix} B_x^{\sim} \\ B_y^{\sim} \end{pmatrix} = -k\delta A(1+\mu^2)\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}\mathrm{sn}\left(\frac{y}{\delta\sqrt{1+\mu^2}}, \mu\right)e^{-i\omega t + ikz} \qquad (11)$$

Рассмотрим случай произвольного направления распространения волны. Введем новую неизвестную функцию $u(y)$, $b(y) = d^2u(y)/dy^2$. Уравнение для этой функции можно представить в виде

$$u^{(4)}(\xi) + \left[-6\mu^2\mathrm{sn}^2(\xi, \mu) + (1+\mu^2)\left(1 + i\frac{\gamma}{\kappa^2}\frac{V}{\eta_z^2}\right)\right] \times$$

$$\times u''(\xi) = (1+\mu^2)^2 W u(\xi), \qquad (12)$$

где

$$W = \left\{\frac{V^2 - \eta_z^4}{\eta_z^2}\left[1 + i\gamma(1 - i\omega_0\tau V)\frac{V}{\eta_z^2}\right] + \right.$$

$$\left. + 2i\gamma(1 - i\omega_0\tau V)V\right\},$$

$$\eta_z = \frac{k_z\delta}{\kappa}, V = \frac{\omega}{\omega_0}, \omega_0 = \frac{cB_0\kappa^2}{4\pi e|n_e - n_h|\delta^2} \sim \frac{c^2\Omega\kappa^2}{\omega_p^2\delta^2}.$$

При выполнении условия (5) эллиптический синус в области значений переменной $\xi$

$$(2m-1)K \le \xi \le (2m+1)K$$

можно заменить тангенсом гиперболическим $\mathrm{sn}\,(\xi,1) = \mathrm{th}\,\xi$. Полагая в уравнении (12) $\mu = 1$, получим

$$u_m^{(4)}(\xi_m) + \left(\frac{6}{\mathrm{ch}^2\,\xi_m} - 4 + 2i\nu\right)u_m''(\xi_m) =$$

$$= 4Wu_m(\xi_m). \qquad (13)$$

Здесь $\xi_m \equiv \xi - 2mK$, $m$ — целое, $-K \le \xi_m \le K$, $\nu = (\gamma/\kappa^2)(V/\eta_z^2)$.

В области $-K \le \xi_m \le 0$ решение этого уравнения можно искать в виде ряда по степеням $\mathrm{e}^{2\xi_m}$:

$$u_m^{(-)}(\xi_m,\lambda) = \mathrm{e}^{2\lambda\xi_m}\sum_{n=0}^{\infty} a_n(\lambda)\mathrm{e}^{2n\xi_m}, \qquad (14)$$

где $\lambda$ — некоторый параметр, не являющийся целым отрицательным числом.

Подставляя выражение (14) в уравнение (13) и собирая коэффициенты при одинаковых степенях $\mathrm{e}^{2\xi_m}$, получим бесконечную систему линейных уравнений для неизвестных $a_n(\lambda)$:

$$\begin{gathered}
\Phi(0)a_0 = 0,\\
2\Psi(0)a_0 + \Phi(1)a_1 = 0,\\
\Phi(0)a_0 + 2\Psi(1)a_1 + \Phi(2)a_2 = 0,\\
\cdots\cdots\\
\Phi(n-2)a_{n-2} + 2\Psi(n-1)a_{n-1} + \Phi(n)a_n = 0, \quad n \ge 2,
\end{gathered} \qquad (15)$$

где

$$\Phi(n) \equiv (n+\lambda)^4 - \left(1 - \frac{i\nu}{2}\right)(n+\lambda)^2 - \frac{W}{4},$$

$$\Psi(n) \equiv (n+\lambda)^4 + 2\left(1 - \frac{i\nu}{4}\right)(n+\lambda)^2 - \frac{W}{4}.$$

В случае $0 \le \xi_m \le K$ решение уравнения (13) можно представить в виде ряда по степеням $\mathrm{e}^{2\xi_m}$

$$u_m^{(+)}(\xi_m,\lambda) = \mathrm{e}^{-2\lambda\xi_m}\sum_{n=0}^{\infty} a_n(\lambda)\mathrm{e}^{-2n\xi_m} \qquad (16)$$

с теми же коэффициентами $a_n(\lambda)$, удовлетворяющими системе уравнений (15), причем $a_0$ можно задать произвольно, а остальные коэффициенты находятся из рекуррентных соотношений:

$$a_1 = -2a_0\frac{\Psi(0)}{\Phi(1)}, \quad a_2 = -2a_1\frac{\Psi(1)}{\Phi(2)}, \ldots$$

$$a_n = -\frac{a_{n-2}\Phi(n-2) + 2a_{n-1}\Psi(n-1)}{\Phi(n)}. \qquad (17)$$

Простой численный анализ показывает, что при $n \to \infty$ коэффициенты $a_n$ имеют следующие свойства:

$$a_n \to 0, \quad \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to 1 - 0, \quad \mathrm{sgn}\,\mathrm{Re}\,\frac{a_{n+1}}{a_n} = -1,$$

$$\mathrm{sgn}\,\mathrm{Im}\,\frac{a_{n+1}}{a_n} = -1.$$

Из первого уравнения системы (15) следует дисперсионное соотношение, связывающее $\lambda$ с $V$ и $\eta_z$:

$$\Phi(0) \equiv \lambda^4 - \left(1 - \frac{i\nu}{2}\right)\lambda^2 - \frac{W}{4} = 0. \qquad (18)$$

Четыре корня этого уравнения

$$\begin{aligned}
\lambda_{1,2} &= \pm\sqrt{\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{i\nu}{2} - \sqrt{\left(1 - \frac{i\nu}{2}\right)^2 + W}\right)^{\frac{1}{2}},\\
\lambda_{3,4} &= \pm\sqrt{\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{i\nu}{2} + \sqrt{\left(1 - \frac{i\nu}{2}\right)^2 + W}\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned} \qquad (19)$$

вместе с выражениями (14), (16) определяют четыре линейно независимых решения уравнения (13):

$$u_m(\xi_m) = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{4} A_i u_m^{(-)}(\xi_m,\lambda_i), & -K \le \xi_m \le 0,\\ \sum\limits_{i=1}^{4} C_i u_m^{(+)}(\xi_m,\lambda_i), & 0 \le \xi_m \le K, \end{cases} \qquad (20)$$

где

$$\begin{aligned}
u_m^{(-)}(\xi_m,\lambda_i) &= \mathrm{e}^{2\lambda_i\xi_m}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\lambda_i)\mathrm{e}^{2n\xi_m}\right),\\
u_m^{(+)}(\xi_m,\lambda_i) &= \mathrm{e}^{-2\lambda_i\xi_m}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\lambda_i)\mathrm{e}^{-2n\xi_m}\right),
\end{aligned} \qquad (21)$$

$a_0(\lambda_i) = 1$; $A_i$ и $C_i$ — постоянные. Ряды (21) сходятся абсолютно во всей области определения, за исключением точки $\xi_m = 0$, в которой они сходятся условно. Из формул (21) следует, что $u_m^{(+)}(0,\lambda_i) = u_m^{(-)}(0,\lambda_i)$.

Функции (20) образуют фундаментальную систему решений дифференциального уравнения (13). В интервале $(2m+1)K \le \xi \le (2m+3)K$ (или $-K \le$

$\le \xi_{m+1} \le K$) решение уравнения (13) следует искать в виде

$$u_{m+1}(\xi_{m+1},\lambda_i) = C u_m\,(\xi_m - 2K,\, \lambda_i), \qquad (22)$$

где $C$ — постоянная.

При полном пренебрежении диссипативными эффектами, т.е. при $\gamma \to 0$, действительным $W > 0$ соответствуют мнимые $\lambda_1$, $\lambda_2$ и действительные $\lambda_3$, $\lambda_4$. Волновым процессам соответствуют решения $u(\xi_m,\lambda_1)$ и $u(\xi_m,\lambda_2)$. Полагая $\lambda_{1,2} = \pm i\,\eta_y/2$, где $\eta_y$ — вещественное, из уравнения (21) в пределе $\gamma \to 0$ найдем, что частота собственных колебаний электромагнитного поля равна

$$\omega = \omega_0 \eta_z \sqrt{\eta_z^2 + \eta_y^2 + \frac{\eta_y^4}{4}}. \qquad (23)$$

Построим решение уравнения (12) в интервале $0 \le \xi_m \le 2K$ в виде бегущей волны. В окрестности точки $\xi_m = K$ сумма в выражениях (21) имеет порядок величины $O(\mathrm{e}^{-2K})$. Сращивая асимптотики $u_m^{(+)}(\xi_m,-i\eta_y)$ и $u_{m+1}^{(-)}(\xi_{m+1},i\eta_y)$ при $\xi_m \to K$ и воспользовавшись соотношением (22), получаем

$$u(\xi_m) = u_m^{(+)}(\xi_m,-i\eta_y) = C_2 \mathrm{e}^{i\eta_y \xi_m} =$$
$$= u_{m+1}^{(-)}(\xi_{m+1}, i\eta_y) = C u_m^{(-)}(\xi_m - 2K, i\eta_y) =$$
$$= C A_1 \mathrm{e}^{i\eta_y(\xi_m - 2K)}. \qquad (24)$$

Приравнивая коэффициенты при $\mathrm{e}^{i\eta_y \xi_m}$, найдем $C_2 = C A_1 \mathrm{e}^{-2i\eta_y K}$. Складывая обе асимптотики $u_m^{(+)}(\xi_m)$ и $u_{m+1}^{(-)}(\xi_{m+1})$, а затем вычитая их общую часть (24), получим решение уравнения (12), справедливое на отрезке $0 \le \xi_m \le 2K$:

$$u(\xi_m) = C_2 \mathrm{e}^{i\eta_y \xi_m}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(-i\eta_y)\mathrm{e}^{-2n\xi_m} + \right.$$
$$\left. + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(i\eta_y)\mathrm{e}^{2n(\xi_m - 2K)}\right). \qquad (25)$$

Из равенства (22) следует, что мультипликатор $C$ равен

$$C = \frac{u(2K)}{u(0)} = \exp\left[2i \arg\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(i\eta_y)\right) + \right.$$
$$\left. + 2i\eta_y K\right] \equiv \mathrm{e}^{2iKs}. \qquad (26)$$

Решение уравнения (12) можно записать в виде

$$u(\xi) = \mathrm{e}^{is\xi} F(\xi), \qquad (27)$$

где $F(\xi)$ — периодическая функция с периодом $2K$, а безразмерное волновое число $s \equiv \sqrt{2}k_y\delta$ равно

$$s = \eta_y + \frac{\arg\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(i\eta_y)\right)}{K}. \qquad (28)$$

Функция, комплексно-сопряженная (25), также является решением уравнения (12).

Из соотношения (23) следует закон дисперсии бегущей волны:

$$\omega = \frac{cB_0}{4\pi e|n_e - n_h|}\left[k_z \sqrt{k_z^2 + \frac{\kappa^2 \eta_y^2(k_y)}{\delta^2}\left(1 + \frac{\eta_y^2(k_y)}{4}\right)}\right], \qquad (30)$$

где $\eta_y$ как функция $k_y$ определяется выражением (28).

В случае слабой пространственной дисперсии $k_z v_F << \tau^{-1}$ затухание связано только с рассеянием электронов, $\mathrm{Im}\,\omega \sim \gamma\omega$. При выполнении обратного неравенства $\tau^{-1} << k_z v_F << \Omega$ спектр собственных колебаний останется тем же, а в выражении для декремента затухания появятся дополнительные слагаемые, обусловленные черенковским поглощением электромагнитного поля электронами, движущимися в фазе с волной. При этом квантование уровней энергии электронов оказывает существенное влияние на затухание волны [8].

Один из авторов (В.Г.П.) благодарит фонд INTAS (грант 01–0791) за поддержку данной работы.


1. D. Shoenberg, *Philos. Trans. Roy. Soc.* A255, 85 (1962).
2. J. Condon, *Phys. Rev.* **145**, 526 (1966).
3. В.Г. Песчанский, Д.И. Степаненко, *ЖЭТФ* **112**, 1841 (1997).
4. В.Г. Песчанский, Д.И. Степаненко, *ФНТ* **25**, 277 (1999).
5. В.Г. Песчанский, Д.И. Степаненко, *ФНТ* **25**, 889 (1999).
6. И.П. Привороцкий, М.Я. Азбель, *ЖЭТФ* **56**, 388 (1969).
7. В.Г. Песчанский, Д.И. Степаненко, *Вісник ХНУ ім. В.Н. Каразіна, серія «Фізика»*, **516,** 34 (2001).
8. В.Г. Скобов, Э.А. Канер, *ЖЭТФ* **46,** 1806 (1964).


## The eigenmodes of electromagnetic field under conditions of the existence of the magnetic domain structure

V.G. Peschansky and D.I. Stepanenko

The spectrum of weakly damped eigenmodes of electromagnetic field in metals placed in a quantizing magnetic field is determined under conditions of the existence of magnetic domain structure.