Физика низких температур, 2003, т. 29, № 1, с. 3–15

Бездиссипативные потоки в системах многих частиц как следствие нарушения симметрии

Ю. М. Полуэктов

Национальный научный центр «Харьковский физико-технический институт»
ул. Академическая, 1, г. Харьков, 61108, Украина

Статья поступила в редакцию 6 июля 2002 г., после переработки 20 августа 2002 г.

Показано, что в многочастичных системах, находящихся в термодинамически равновесных пространственно неоднородных состояниях с нарушенными симметриями, могут существовать незатухающие потоки. Если термодинамический потенциал системы инвариантен относительно некоторого преобразования, зависящего от непрерывных параметров, то этому преобразованию соответствуют плотности сохраняющихся потоков и интегралы движения, количество которых равно числу непрерывных параметров преобразования. Устойчивость сверхпроводящих и сверхтекучих потоков, возникновение которых обусловлено нарушением фазовой симметрии, объясняется тем, что с такими состояниями связан закон сохранения, который не позволяет разрушаться этим состояниям, не отвечающим абсолютному минимуму термодинамического потенциала.

Показано, що в багаточастинкових системах, які знаходяться в термодинамічно рівноважних просторово неоднорідних станах з порушеними симетріями, можуть існувати потоки, які не затухають. Якщо термодинамічний потенціал системи є інваріантним відносно деякого перетворення, яке залежить від неперервних параметрів, то такому перетворенню відповідають густини потоків, що зберігаються, та інтеграли руху, кількість яких дорівнює кількості неперервних параметрів перетворення. Стійкість надпровідних і надплинних потоків, поява яких обумовлена порушенням фазової симетрії, пояснюється тим, що з такими станами пов'язан закон збереження, який не дозволяє руйнуватися цим станам, що не відповідають абсолютному мінімуму термодинамічного потенціалу.

PACS: 05.30.Jp, **67.40.–w**, 74.20.De

1. Введение

Системы многих взаимодействующих частиц могут находиться в состояниях, которые допускают существование потоков, не сопровождающихся диссипацией энергии. Впервые бездиссипативные токи электронов были открыты в 1911 г. Камерлинг—Оннесом в металлах (сверхпроводимость) [1], а четверть века спустя бездиссипативные потоки массы в жидком ^{4}He — Капицей (сверхтекучесть) [2]. В начале 70-х годов прошлого века при миллиградусных температурах удалось открыть сверхтекучие свойства жидкого ^{3}He [3]. В ^{3}He оказался возможным бездиссипативный перенос не только массы, но и других характеристик, в частности спина. В 1986 г. Беднорц и Мюллер обнаружили [4], что бездиссипативные токи зарядов существуют в веществах, имеющих весьма сложное внутреннее строение (высокотемпературные сверхпроводники). Имеются и другие системы, где возможны потоки, не сопровождающиеся диссипацией энергии, например вещества с магнитной структурой и жидкие кристаллы. Проблема бездиссипативных потоков и сверхтекучести в ^{4}He и ^{3}He, магнетиках и экситонных диэлектриках с различных точек зрения обсуждена Сониным [5].

Обращает на себя внимание то обстоятельство, что потоки без диссипации могут существовать в системах, сильно различающихся как внутренним строением, так и статистикой частиц. Это, по-видимому, указывает на то, что имеется единая причина появления бездиссипативных (сверхтекучих) потоков, которая может реализовываться в многочастичных системах с различной внутренней структурой. В известной работе Гинзбурга и Ландау [6] впервые продемонстрирована связь сверхпроводящих свойств с существованием комплексного параметра, нарушающего симметрию состояния относительно фазового преобразования. Идеи работы [6] были распространены на сверхтекучий ^{4}He Гинзбургом и Питаевским [7] (модифицированный вариант теории изложен в [8]). Отметим, что известная теория сверхтекучести Ландау [9] также учитывает, хотя и в неявной форме, нарушение симметрии относительно фазовых преобразований через введение сверхтекучей скорости и плотности сверхтекучей компоненты, связанных с модулем и фазой комплексного параметра порядка [7]. Несмотря на то что из работ [6,7] совершенно ясна фундаментальная роль нарушенной фазовой симметрии для существования бездиссипативных потоков, но и в настоящее время во многих работах явления сверхтекучести и сверхпроводимости связывают с обстоятельствами, которые хотя и могут сопровождать переходы в состояния с бездиссипативными потоками, но не являются существенными и необходимыми для появления таких потоков (макроскопически заполненное состояние, наличие спаривания, характерные свойства энергетического спектра квазичастиц и др.).

В данной работе в общем виде показано, что в системах многих взаимодействующих частиц, находящихся в термодинамически равновесных пространственно-неоднородных состояниях с нарушенными относительно некоторых видов преобразований симметриями, возникают токовые состояния. Эти токи могут быть связаны с переносом не только заряда или массы, но и других характеристик, например намагниченности, момента импульса и др. Если термодинамический потенциал (ТП) инвариантен относительно рассматриваемых преобразований, то каждому такому потоку сопоставляется интеграл движения. Результатом работы, по существу, является аналог для случая многочастичной нерелятивистской системы известной в теории поля теоремы Нетер [10], согласно которой всякому зависящему от s непрерывных параметров преобразованию функций поля и координат, не меняющему действие, сопоставляется s токов и столько же динамических инвариантов. Рассмотрены пространственные преобразования и преобразования внутренних симметрий. Отдельно исследована симметрия относительно фазовых преобразований, с нарушением которой связано проявление сверхтекучих и сверхпроводящих свойств. Устойчивость состояний со сверхтекучими потоками, не отвечающих абсолютному минимуму ТП, объясняется тем, что их разрушению препятствует закон сохранения, связанный с фазовой симметрией. На примере потоков намагниченности вблизи доменной стенки в ферромагнетике рассмотрены локализованные несохраняющиеся бездиссипативные потоки.

2. Постановка вопроса

Согласно теории фазовых переходов второго рода Ландау [11,12], фазовый переход в состояние с более низкой симметрией можно описать как появление некоторых дополнительных характеристик системы — параметров порядка (ПП), которые, вообще говоря, могут быть функциями пространственных координат. Предположение о возможности существования термодинамически равновесных пространственно неоднородных состояний с параметрами порядка, зависящими от координат даже в пространственно однородных внешних условиях, принципиально важно для последующего рассмотрения. С пространственной неоднородностью связана определенная энергия и поэтому плотность ТП зависит не только от параметра порядка, но и его градиентов.

Пусть система многих частиц, заключенных в объем V, в дополнение к термодинамическим переменным, в качестве которых выберем температуру T и химический потенциал μ, характеризуется многокомпонентным параметром порядка

$$\varphi = \left(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_L\right), \tag{1}$$

компонентами которого являются зависящие от координат функции $\varphi_a(\mathbf{r})$ $(a = 1, 2, \ldots L)$, где L — число компонент ПП. Природа многокомпонентности ПП может быть различной, например, это могут быть компоненты вектора или тензора. В случае многозонного сверхпроводника компоненты ПП описывают электроны различных зон проводимости [13]. Различные компоненты могут соответствовать различным типам аномальных средних (одночастичным, парным). Не конкретизируя микроскопическую природу ПП, будем считать функции $\varphi_a(\mathbf{r})$ комплексными. Формулы для случая вещественного ПП могут быть получены из приведенных ниже формул очевидным образом. Предположим, что плотность ТП зависит как от термодинамических переменных, так и от ПП и его градиентов:

$$\omega = \omega(\mu, T; \varphi, \varphi^*, \nabla\varphi, \nabla\varphi^*). \tag{2}$$

Компоненты ПП являются функциями термодинамических переменных μ и T. Будем считать, что внешние поля отсутствуют, а потому ω не зависит явно от пространственных координат. Обобщение на случай, когда такая зависимость существует, не представляет принципиальных трудностей. Полный ТП системы

$$\Omega(\mu, T) = \int_V d^3 r\, \omega(\mu, T; \varphi, \varphi^*, \nabla\varphi, \nabla\varphi^*) \qquad (3)$$

является функцией термодинамических переменных и функционалом от компонент ПП $\varphi_a(\mathbf{r})$. В теории фазовых переходов второго рода предполагается, что ТП вблизи линии перехода может быть разложен в ряд по степеням ПП и его градиентов. Однако не будем уточнять зависимость ω от φ и $\nabla\varphi$, так что дальнейшее рассмотрение не зависит от возможности такого разложения.

Параметр порядка находится из требования минимума ТП. Варьируя Ω по функциям $\varphi_a(\mathbf{r})$, при условии, что вариация $\delta\varphi_a(\mathbf{r})$ на границе обращается в нуль, получим уравнения Лагранжа—Эйлера [14], определяющие компоненты ПП в термодинамически равновесном состоянии:

$$\frac{\partial\omega}{\partial\varphi_a} - \nabla\frac{\partial\omega}{\partial\nabla\varphi_a} = 0. \qquad (4)$$

Уравнения (4) имеют решение $\varphi = 0$. Область на плоскости (μ, T), где такое решение отвечает абсолютному минимуму ТП, называется нормальной или симметричной фазой. Области, где $\varphi \neq 0$, отвечают фазам с нарушенными симметриями.

Используя уравнения (4), находим полное число частиц в системе:

$$N = -\frac{\partial\Omega}{\partial\mu} = -\int_V d^3 r \frac{\partial'\omega}{\partial\mu} - \sum_a \int_S d\mathbf{s}\left(\frac{\partial\omega}{\partial\nabla\varphi_a}\frac{\partial\varphi_a}{\partial\mu} + \text{к. с.}\right), \qquad (5)$$

где штрих над знаком дифференцирования означает, что учитывается только явная зависимость ω от μ, а сокращение к.с. — комплексное сопряжение. Аналогичной формулой с учетом замены $\mu \to T$ определяется полная энтропия S. Полная энергия выражается формулой

$$E = \int_V d^3 r\left(\omega - \mu\frac{\partial'\omega}{\partial\mu} - T\frac{\partial'\omega}{\partial T}\right) -$$

$$-\sum_a \int_S d\mathbf{s}\left[\frac{\partial\omega}{\partial\nabla\varphi_a}\left(\frac{\partial\varphi_a}{\partial\mu}\mu + \frac{\partial\varphi_a}{\partial T}T\right) + \text{к. с.}\right]. \qquad (6)$$

Вообще говоря, члены в (5) и (6), относящиеся к поверхности, отличны от нуля.

Определим набор «новых» функций $\varphi'_a(\mathbf{r};\lambda)$, связанных со «старыми» $\varphi_a(\mathbf{r})$, соотношениями

$$\varphi'_a(\mathbf{r};\lambda) = \sum_b \int d^3 r'\, T_{ab}(\mathbf{r},\mathbf{r}';\lambda)\,\varphi_b(\mathbf{r}'), \qquad (7)$$

где $T_{ab}(\mathbf{r},\mathbf{r}';\lambda)$ — матрица размерностью $L \times L$ в пространстве индексов, которые нумеруют компоненты ПП, зависящая от набора s непрерывных вещественных параметров $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s)$. Удобно выбрать эти матрицы унитарными, так что

$$\sum_c \int d^3 r''\, T^*_{ca}(\mathbf{r}'',\mathbf{r})\, T_{cb}(\mathbf{r}'',\mathbf{r}') =$$

$$= \sum_c \int d^3 r''\, T^*_{ac}(\mathbf{r},\mathbf{r}'')\, T_{bc}(\mathbf{r}',\mathbf{r}'') = \delta_{ab}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'). \qquad (8)$$

При этом сохраняется нормировка компонент ПП

$$\sum_a \int d^3 r \left|\varphi_a(\mathbf{r})\right|^2 = \sum_a \int d^3 r \left|\varphi'_a(\mathbf{r})\right|^2 .$$

Предположим, что плотность ТП инвариантна относительно линейных преобразований (7), поэтому

$$\Omega = \int_V d^3 r\, \omega(\varphi(\mathbf{r}), \varphi^*(\mathbf{r}), \nabla\varphi(\mathbf{r}), \nabla\varphi^*(\mathbf{r})) =$$

$$= \int_V d^3 r\, \omega(\varphi'(\mathbf{r}), \varphi'^*(\mathbf{r}), \nabla\varphi'(\mathbf{r}), \nabla\varphi'^*(\mathbf{r})). \qquad (9)$$

Функции $\varphi'_a(\mathbf{r};\lambda)$ также удовлетворяют уравнениям Лагранжа—Эйлера (4). Таким образом, наряду с состоянием, определяемым набором функций $\varphi_a(\mathbf{r})$, возможны состояния, определяемые набором функций $\varphi'_a(\mathbf{r},\lambda)$, зависящих от s непрерывных параметров, т.е. существует бесконечно много состояний, отличающихся значениями λ, величина ТП для которых одинакова. Это означает, что в многочастичной системе имеется вырождение состояний.

3. Плотности бездиссипативных потоков

В дальнейшем достаточно рассматривать бесконечно малые преобразования. Всегда можно выбрать набор непрерывных параметров λ так, чтобы при их нулевых значениях функции $\varphi_a(\mathbf{r})$ и $\varphi'_a(\mathbf{r})$ совпадали. В этом случае при малых значениях λ

$$T_{ab}(\mathbf{r},\mathbf{r}';\lambda) = \delta_{ab}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') + \sum_{\nu=1}^{s}\Theta^{\nu}_{ab}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\lambda_\nu, \qquad (10)$$

где генератор преобразования

$$\Theta^{\nu}_{ab}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \left.\frac{\partial T_{ab}(\mathbf{r},\mathbf{r}';\lambda)}{\partial\lambda_\nu}\right|_{\lambda=0}.$$

Заметим, что в силу условий унитарности (8) справедливо соотношение

$$\Theta^{\nu}_{ab}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = -\Theta^{\nu *}_{ba}(\mathbf{r},\mathbf{r}'). \qquad (11)$$

Подставляя (10) в (7), получаем

$$\varphi'_a(\mathbf{r}) = \varphi_a(\mathbf{r}) + \delta\varphi_a(\mathbf{r}), \qquad (12)$$

где

$$\delta\varphi_a(\mathbf{r}) = \sum_{b=1}^{L}\sum_{\nu=1}^{s}\int d^3r'\Theta^{\nu}_{ab}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\varphi_b(\mathbf{r}')\lambda_\nu .$$

Используя условие инвариантности ТП (9) относительно бесконечно малых преобразований (12) и учитывая уравнения Лагранжа—Эйлера (4), получаем соотношение

$$\sum_{a=1}^{L}\sum_{\nu=1}^{s}\int d^3r\,\nabla\left[\frac{\partial\omega}{\partial\nabla\varphi_a}\Psi_{a\nu}(\mathbf{r}) + \text{к.с.}\right]\lambda_\nu = 0, \quad (13)$$

где

$$\Psi_{a\nu}(\mathbf{r}) = \sum_{b=1}^{L}\int d^3r'\Theta^{\nu}_{ab}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\varphi_b(\mathbf{r}').$$

В силу произвольности значений малых параметров λ_ν из (13) следует, что

$$\sum_a\int d^3r\,\nabla\left[\frac{\partial\omega}{\partial\nabla\varphi_a}\Psi_{a\nu}(\mathbf{r}) + \text{к.с.}\right] = 0. \quad (14)$$

Уравнения (14) представляют собой s уравнений непрерывности $(\nu = 1, 2, \ldots, s)$

$$\operatorname{div}\mathbf{j}_\nu = 0, \quad (15)$$

где плотности потоков имеют вид

$$\mathbf{j}_\nu = \sum_a\left[\frac{\partial\omega}{\partial\nabla\varphi_a}\Psi_{a\nu}(\mathbf{r}) + \text{к.с.}\right]. \quad (16)$$

Как видим, s непрерывным параметрам в преобразовании (7) соответствуют s плотностей потоков. Как известно, плотности потоков определены неоднозначно, с точностью до вектора, дивергенция которого равна нулю. Потоки физических величин в системах с нарушенными симметриями в методе квазисредних рассмотрены в работе [15] (см. также [16]).

4. Интегралы движения

В предыдущем разделе были получены выражения для s плотностей потоков и соответствующие им уравнения непрерывности. С существованием уравнений непрерывности связано существование сохраняющихся величин — интегралов движения. Для нахождения интегралов движения недостаточно рассмотрения стационарного состояния, а следует использовать динамические уравнения, описывающие эволюцию ПП во времени. В этом случае дифференциальная форма уравнений сохранения примет вид

$$\frac{\partial\pi_\nu}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{j}_\nu = 0, \quad (17)$$

где π_ν — плотности величин, потоками которых являются $\mathbf{j}_\nu$. Интегрируя (17) по объему и предполагая, что полный поток через границу объема равен нулю

$$\int_S d\mathbf{s}\,\mathbf{j}_\nu = 0, \quad (18)$$

получаем, что интегралами движения являются величины

$$\Pi_\nu = \int_V d^3r\,\pi_\nu(\mathbf{r}). \quad (19)$$

Найдем плотности π_ν, а следовательно, и интегралы движения (19). В феноменологическом подходе это можно сделать, используя лагранжев формализм. Будем рассматривать плотность ТП как плотность потенциальной энергии и введем плотность кинетической энергии, связанной с изменением параметра порядка во времени:

$$\kappa = \kappa(\mu, T; \varphi, \varphi^*, \dot\varphi, \dot\varphi^*). \quad (20)$$

Тогда плотность функции Лагранжа запишем в виде

$$\Lambda(\varphi, \varphi^*, \nabla\varphi, \nabla\varphi^*, \dot\varphi, \dot\varphi^*) =$$

$$= \kappa(\varphi, \varphi^*, \dot\varphi, \dot\varphi^*) - \omega(\varphi, \varphi^*, \nabla\varphi, \nabla\varphi^*). \quad (21)$$

Предполагаем, что отсутствуют внешние, зависящие от времени поля, так что функция Лагранжа не зависит явно не только от координат, но и от времени. Тогда аналогично тому, как это было проделано для стационарного случая, приходим к законам сохранения (17), причем плотности сохраняющихся величин имеют вид

$$\pi_\nu(\mathbf{r}) = \sum_a\left[\frac{\partial\kappa}{\partial\dot\varphi_a}\Psi_{a\nu}(\mathbf{r}) + \text{к.с.}\right]. \quad (22)$$

Таким образом, если ТП системы инвариантен относительно преобразований (7), содержащих s непрерывных параметров, то имеется s сохраняющихся величин Π_ν — интегралов движения.

Помимо s уравнений непрерывности (17), справедливых вследствие инвариантности ТП относительно преобразований симметрии (7), имеется закон сохранения энергии, обусловленный инвариантностью ТП относительно сдвига по времени:

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{j}^{(\varepsilon)} = 0, \quad (23)$$

где плотность энергии

$$\vartheta = \sum_a \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \dot\varphi_a} \dot\varphi_a + \frac{\partial \Lambda}{\partial \dot\varphi_a^*} \dot\varphi_a^* \right) - \Lambda, \qquad (24)$$

а плотность потока энергии

$$\mathbf{j}^{(\varepsilon)} = \sum_a \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \nabla \varphi_a} \dot\varphi_a + \text{к. с.} \right). \qquad (25)$$

Если полный поток энергии через границу равен нулю $\int_S d\mathbf{s}\, \mathbf{j}^{(\varepsilon)} = 0$, то полная энергия

$$\Xi = \int_V d^3 r\, \vartheta(\mathbf{r}) \qquad (26)$$

является динамическим инвариантом. Отметим, что в состоянии равновесия энергия Ξ совпадает с полным ТП, а не с полной энергией E, определяемой формулой (6). Это связано с тем, что динамика параметра порядка рассматривается при фиксированных термодинамических переменных μ, T. В стационарном состоянии плотность потока энергии обращается в нуль, так что потоки в термодинамически равновесном состоянии не переносят энергию.

Нестационарные явления в многочастичной системе сопровождаются диссипацией энергии, что не было учтено при выводе уравнений непрерывности (17). Учесть диссипацию в используемом феноменологическом подходе можно было бы, задав помимо функции Лагранжа еще и диссипативную функцию [17]. В этом случае правая часть уравнений (17) оказалась бы отличной от нуля, а величины Π_ν изменялись бы со временем, релаксируя к своим равновесным значениям. Таким образом, Π_ν являются интегралами движения только в пренебрежении диссипативными процессами, что имеет место и в классической механике. В данной работе диссипативные явления в многочастичных системах с нарушенными симметриями рассматриваться не будут.

5. Кинетическая энергия

Плотность кинетической энергии, как и плотность ТП, в феноменологическом подходе должна быть задана. Учитывая некоторые общие требования, уточним вид кинетической энергии. Кинетическая энергия должна быть вещественна и, поскольку описываются бездиссипативные процессы, инвариантна относительно обращения времени. Кроме того, она должна быть инвариантной относительно фазовых преобразований. В квантовой механике, как известно, операция обращения времени заключается в изменении знака временной переменной и замене волновой функции на комплексно сопряженную функцию. В соответствии с этим потребуем, чтобы кинетическая энергия оставалась инвариантной при преобразованиях

$$t \to -t, \quad \varphi \to \varphi^*, \qquad (27)$$

т.е. должно быть выполнено условие

$$\kappa(\varphi, \varphi^*, \dot\varphi, \dot\varphi^*) = \kappa(\varphi, \varphi^*, -\dot\varphi, -\dot\varphi^*) . \qquad (28)$$

Отметим, что если ПП является спинором, то операция обращения времени несколько отличается от (27) [16]. В данной работе ограничимся рассмотрением случая, когда справедлива операция (27). Будем учитывать, как и в классической механике [14], члены до квадратичных по скоростям, в данном случае по производным $\dot\varphi$, $\dot\varphi^*$. В классической механике кинетическая энергия не содержит линейных по скоростям членов и зависит только от квадратов скоростей. В случае комплексных переменных условие (28) может выполняться и для линейных по величинам $\dot\varphi, \dot\varphi^*$ членов. Кроме того, кинетическая энергия, как и всякая наблюдаемая величина, должна быть инвариантна относительно фазовых преобразований

$$\varphi \to \varphi\, e^{i\chi}, \qquad (29)$$

χ — вещественное число. Принимая все отмеченное во внимание, запишем кинетическую энергию в виде

$$\kappa(\varphi, \varphi^*, \dot\varphi, \dot\varphi^*) = \sum_a [A_a(\varphi^*, \varphi)\dot\varphi_a - A_a(\varphi, \varphi^*)\dot\varphi_a^*] + \\ + \sum_{ab} [B_{ab}(\varphi^*, \varphi)\dot\varphi_a \dot\varphi_b + B_{ab}(\varphi, \varphi^*)\dot\varphi_a^* \dot\varphi_b^* + \\ + D_{ab}(\varphi, \varphi^*)\dot\varphi_a^* \dot\varphi_b]. \qquad (30)$$

В силу требований вещественности и инвариантности относительно обращения времени (28) кинетической энергии для коэффициентов в (30) должны выполняться условия

$$\begin{gathered} A_a(\varphi, \varphi^*) = -A_a^*(\varphi^*, \varphi), \\ B_{ab}(\varphi, \varphi^*) = B_{ba}(\varphi, \varphi^*) = B_{ab}^*(\varphi^*, \varphi), \\ D_{ab}(\varphi, \varphi^*) = D_{ba}^*(\varphi, \varphi^*) = D_{ba}(\varphi^*, \varphi). \end{gathered} \qquad (31)$$

Требование фазовой инвариантности приводит к условиям

$$\begin{gathered} A_a(\varphi^* e^{-i\chi}, \varphi e^{i\chi})\, e^{i\chi} = A_a(\varphi^*, \varphi), \\ B_{ab}(\varphi^* e^{-i\chi}, \varphi e^{i\chi})\, e^{2i\chi} = B_{ab}(\varphi^*, \varphi), \\ D_{ab}(\varphi^* e^{-i\chi}, \varphi e^{i\chi}) = D_{ab}(\varphi^*, \varphi). \end{gathered} \qquad (32)$$

Учитывая только главные члены разложения коэффициентов в (30) по степеням ПП, получим максимально простую форму кинетической энергии:

$$\kappa(\varphi,\varphi^*,\dot\varphi,\dot\varphi^*) = -i\sum_a \beta_a(\varphi_a^*\dot\varphi_a - \varphi_a\dot\varphi_a^*) + \\ + \frac{1}{2}\sum_{ab}\gamma_{ab}\dot\varphi_a^*\dot\varphi_b, \quad (33)$$

где $\beta_a = \beta_a^*$, $\gamma_{ab} = \gamma_{ba}^*$ — феноменологические постоянные. Требования симметрии ТП относительно других преобразований могут накладывать дополнительные условия на коэффициенты, входящие в выражение для кинетической энергии. Отметим, что вид энергии (33) аналогичен выбору кинетической энергии с линейными по временной производной от волновой функции членами при получении уравнения Шредингера методом Лагранжа [14]. Если воспользоваться этой упрощенной формой кинетической энергии, то получим следующее выражение для плотностей сохраняющихся величин (22):

$$\pi_\nu = -i\sum_a \beta_a(\varphi_a^*\Psi_{a\nu} - \varphi_a\Psi_{a\nu}^*) + \\ + \frac{1}{2}\sum_{ab}(\gamma_{ab}^*\dot\varphi_b^*\Psi_{a\nu} + \gamma_{ab}\dot\varphi_b\Psi_{a\nu}^*). \quad (34)$$

Заметим, что данные величины в стационарных состояниях $\dot\varphi = 0$ отличны от нуля в том случае, когда кинетическая энергия содержит линейные по $\dot\varphi$ члены. Это имеет место, если ПП комплексный. В случае многочастичных систем с комплексными ПП отличные от нуля интегралы движения в стационарных равновесных состояниях существенно определяют устойчивость токовых состояний в таких системах.

При плотности кинетической энергии (33) плотность интеграла энергии (24) имеет вид

$$\vartheta = \frac{1}{2}\sum_{ab}\gamma_{ab}\dot\varphi_a^*\dot\varphi_b + \omega(\varphi,\varphi^*,\nabla\varphi,\nabla\varphi^*) \quad (35)$$

и не содержит членов, линейных по временным производным ПП. Определив канонические импульсы

$$p_a = \frac{\partial\Lambda}{\partial\dot\varphi_a^*} = -i\,\beta_a\varphi_a + \frac{1}{2}\sum_b\gamma_{ab}\dot\varphi_b \quad (36)$$

и перейдя в (35) от скоростей к импульсам, находим функцию Гамильтона

$$\mathcal{H} = -2i\sum_{ab}\beta_b\gamma_{ab}^{-1}(p_a^*\varphi_b - p_a\varphi_b^*) + \\ + 2\sum_{ab}\gamma_{ab}^{-1}(p_a p_b^* + \beta_a\beta_b\varphi_a\varphi_b^*) + \omega(\varphi,\varphi^*,\nabla\varphi,\nabla\varphi^*), \quad (37)$$

где γ^{-1} — матрица, обратная γ. Обратим внимание, что гамильтониан содержит линейные по импульсам члены. Подстановкой (37) в канонические уравнения

$$\dot\varphi_a = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_a^*}, \quad \dot p_a = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\varphi_a^*} + \nabla\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\nabla\varphi_a^*} \quad (38)$$

получим уравнения динамики ПП в гамильтоновой форме.

6. Пространственные симметрии

Рассмотрим следствия, вытекающие из симметрии системы относительно пространственных трансляций и поворотов. Предположим, что ТП системы не меняется при сдвиге системы на вектор $\mathbf{r}_0$: $\varphi'(\mathbf{r}) = \varphi(\mathbf{r}+\mathbf{r}_0)$. В этом случае матрица преобразования (7) и величины (10) и (13) имеют вид

$$T_{ab}(\mathbf{r},\mathbf{r}';\mathbf{r}_0) = \delta_{ab}\delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r}-\mathbf{r}_0), \\ \Theta_{ab}^\nu(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \delta_{ab}\nabla_\nu\delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r}),\ \Psi_{a\nu}(\mathbf{r}) = \nabla_\nu\varphi_a(\mathbf{r}). \quad (39)$$

Тензор плотности потока импульса, связанного с существованием поля параметра порядка, имеет вид

$$j_{\nu i}^{(I)} = \sum_a\left[\frac{\partial\omega}{\partial\nabla_i\varphi_a}\nabla_\nu\varphi_a + \text{к. с.}\right], \quad (40)$$

а плотность импульса —

$$\pi_\nu^{(I)} = \sum_a\left[\frac{\partial\kappa}{\partial\dot\varphi_a}\nabla_\nu\varphi_a + \text{к. с.}\right]. \quad (41)$$

Если кинетическая энергия выбрана в форме (33), то

$$\pi_\nu^{(I)} = -i\sum_a\beta_a(\varphi_a^*\nabla_\nu\varphi_a - \varphi_a\nabla_\nu\varphi_a^*) + \\ + \frac{1}{2}\sum_{ab}(\gamma_{ab}^*\dot\varphi_b^*\nabla_\nu\varphi_a + \gamma_{ab}\dot\varphi_b\nabla_\nu\varphi_a^*). \quad (42)$$

Обратим внимание, что для комплексных полей плотность импульса отлична от нуля и в стационарных состояниях $\dot\varphi = 0$, в частности, в условиях термодинамического равновесия.

Если система инвариантна относительно поворотов в координатном пространстве $\varphi'(\mathbf{r}) = \varphi(g^{-1}\mathbf{r})$, где $(g^{-1}\mathbf{r})_i = \sum_j R_{ji}(g)x_j$, а $R_{ji}(g)$ — матрица трехмерных поворотов g, определяемая набором трех параметров, например углов Эйлера, то сохраняется момент импульса, связанный с полем ПП. Однако в том случае, когда при поворотах не затрагиваются компоненты ПП, т.е. не происходит их «перепутывание», закон сохранения момента импульса не является независимым, а оказывается следствием закона сохранения импульса. Плотность потока момента импульса и плотность момента импульса выражаются через плотность потока импульса (40) и плотность импульса (41):

$$j_{\nu i}^{(L)} = \sum_{m,\mu} \varepsilon_{\nu m\mu} x_m j_{\mu i}^{(I)}, \ \pi_{\nu}^{(L)} = \sum_{m,\mu} \varepsilon_{\nu m\mu} x_m \pi_{\mu}^{(I)}, \quad (43)$$

где $\varepsilon_{\nu m\mu}$ — антисимметричный тензор. Если ТП системы инвариантен относительно одновременных поворотов в координатном пространстве и в пространстве компонент ПП, то возникает нетривиальный закон сохранения, связанный с вращением. Этот случай рассмотрен в следующем разделе.

7. Внутренние симметрии

В предыдущем разделе рассмотрены преобразования, затрагивающие только пространственные координаты компонент ПП. Рассмотрим теперь преобразования с матрицей вида

$$T_{ab}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \lambda) = T_{ab}(\lambda) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (44)$$

не затрагивающей пространственные координаты. Следуя терминологии, принятой в теории поля [10], назовем симметрии, связанные с такими преобразованиями, «внутренними». Для бесконечно малых преобразований

$$T_{ab}(\lambda) = \delta_{ab} + \sum_{\nu=1}^{s} \Theta_{ab}^{\nu} \lambda_{\nu}, \qquad \Theta_{ab}^{\nu} = \left.\frac{\partial T_{ab}(\lambda)}{\partial \lambda_{\nu}}\right|_{\lambda=0}, \quad (45)$$

причем, согласно условию (11),

$$\Theta_{ab}^{\nu} + \Theta_{ba}^{\nu *} = 0. \quad (46)$$

Плотность потока, обусловленная преобразованием симметрии (44), имеет вид

$$j_{\nu i}^{(M)} = \sum_{ab} \left[\frac{\partial \omega}{\partial \nabla_i \varphi_a} \varphi_b - \frac{\partial \omega}{\partial \nabla_i \varphi_b^*} \varphi_a^* \right] \Theta_{ab}^{\nu}, \quad (47)$$

а плотность соответствующей сохраняющейся величины —

$$\pi_{\nu}^{(M)} = \sum_{ab} \left(\frac{\partial \kappa}{\partial \dot{\varphi}_a} \varphi_b - \frac{\partial \kappa}{\partial \dot{\varphi}_b^*} \varphi_a^* \right) \Theta_{ab}^{\nu}. \quad (48)$$

Если кинетическая энергия выбрана в форме (33), то

$$\pi_{\nu}^{(M)} = -i \sum_{ab} (\beta_a + \beta_b) \varphi_a^* \varphi_b \Theta_{ab}^{\nu} + \frac{1}{2} \sum_{abc} (\gamma_{ac}^* \dot{\varphi}_c^* \varphi_b - \gamma_{bc} \dot{\varphi}_c \varphi_a^*) \Theta_{ab}^{\nu}. \quad (49)$$

Примером системы, инвариантной относительно преобразований внутренней симметрии, является ферромагнетик, ТП которого включает обменную энергию ω_e. В случае кубической симметрии плотность обменной энергии имеет вид [18]

$$\omega_e = \frac{1}{2} \alpha \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x_i} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x_i}, \quad (50)$$

где α — феноменологическая постоянная, $\mathbf{M}$ — плотность магнитного момента. Вещественными компонентами ПП в данном случае являются проекции вектора $\mathbf{M}$. Очевидно, что выражение (50) инвариантно относительно поворотов плотности магнитного момента на произвольный угол $\boldsymbol{\theta} = \theta \mathbf{n}$:

$$M_a'(\mathbf{r}) = \sum_{b=1}^{3} R_{ab}(\boldsymbol{\theta}) M_b(\mathbf{r}), \quad (51)$$

где $R_{ab}(\boldsymbol{\theta})$ — ортогональная матрица поворота, $\mathbf{n}$ — орт, задающий направление оси поворота. В этом случае $\Theta_{ab}^{\nu} = -\varepsilon_{\nu ab}$, а плотность потока имеет известный вид [19]:

$$j_{\nu i}^{(M)} = \alpha \, [\mathbf{M} \times \nabla_i \mathbf{M}]_{\nu}. \quad (52)$$

В термодинамически равновесном состоянии плотность потока (52) отлична от нуля, например, в области доменных границ. Более детально этот случай рассмотрен ниже. Уравнения динамики намагниченности в ферромагнетике [18,19] могут быть получены в рамках лагранжева подхода, если в качестве обобщенных координат выбрать угловые переменные, задающие ориентацию вектора намагниченности.

Возможны случаи, когда ТП изменяется при некоторых пространственных и внутренних преобразованиях в отдельности, но остается инвариантным при совместных таких преобразованиях. Пусть пространственные координаты преобразуются согласно правилу

$$x_i' = \sum_k a_{ik}(\lambda) x_k, \text{ где } \sum_i a_{ik}(\lambda) a_{il}(\lambda) = \delta_{kl}, \quad (53)$$

и одновременно происходит вращение в пространстве компонент ПП, определяемое тем же набором параметров λ, так что

$$T_{ab}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \lambda) = T_{ab}(\lambda) \delta\left(x_i' - \sum_k a_{ik}(\lambda) x_k \right). \quad (54)$$

В этом случае

$$\Psi_{a\nu}(\mathbf{r}) = \sum_{i,k}\theta^{\nu}_{ik}x_k\nabla_i\,\varphi_a(\mathbf{r}) + \sum_b \Theta^{\nu}_{ab}\varphi_b(\mathbf{r}), \quad (55)$$

где

$$\theta^{\nu}_{ik} = \left.\frac{\partial a_{ik}(\lambda)}{\partial\lambda_\nu}\right|_{\lambda=0}, \quad \Theta^{\nu}_{ab} = \left.\frac{\partial T_{ab}(\lambda)}{\partial\lambda_\nu}\right|_{\lambda=0}.$$

Уравнение непрерывности (17) теперь справедливо для полных плотностей

$$j_{\nu i} = j^{(L)}_{\nu i} + j^{(M)}_{\nu i}, \quad \pi_\nu = \pi^{(L)}_\nu + \pi^{(M)}_\nu,$$

где $j^{(M)}_{\nu i}, \pi^{(M)}_\nu$ определены формулами (47)–(49) и описывают вклад в полный момент импульса, связанный с многокомпонентностью ПП, который является аналогом спинового момента в квантовой теории поля [10]. Орбитальные плотности момента импульса и его потока определяются выражениями

$$j^{(L)}_{\nu i} = \frac{1}{2}\sum_a\sum_{ik}\left[\frac{\partial\omega}{\partial\nabla_i\varphi_a}(\nabla_l\varphi_a x_k - \nabla_k\varphi_a x_l) + \text{к.с.}\right]\theta^{\nu}_{kl}, \quad (56)$$

$$\pi^{(L)}_\nu = \frac{1}{2}\sum_a\sum_{ik}\left[\frac{\partial\kappa}{\partial\dot\varphi_a}(x_k\nabla_i\,\varphi_a - x_i\nabla_k\varphi_a) + \text{к.с.}\right]\theta^{\nu}_{ik}. \quad (57)$$

При выборе кинетической энергии в форме (33)

$$\pi^{(L)}_\nu = -\frac{i}{2}\sum_a\sum_{ik}[\beta_a\varphi^*_a(x_k\nabla_i\,\varphi_a - x_i\nabla_k\varphi_a) - \text{к.с.}]\theta^{\nu}_{ik} + \frac{1}{4}\sum_{ab}\sum_{ik}[\gamma^*_{ab}\dot\varphi^*_b(x_k\nabla_i\,\varphi_a - x_i\nabla_k\varphi_a) + \text{к.с.}]\theta^{\nu}_{ik}. \quad (58)$$

Закон сохранения полного момента импульса в рассмотренном случае является новым независимым законом сохранения.

8. Фазовая симметрия

Важным видом внутренней симметрии является симметрия относительно фазовых преобразований с постоянным значением фазы (фазовые преобразования первого рода). Эта симметрия не допускает такого наглядного истолкования, как, например, симметрия по отношению к трансляциям и поворотам. Существование фазовой симметрии обусловлено квантовомеханической природой строения вещества. В квантовой теории поля с фазовой симметрией связан закон сохранения заряда [10]. В нерелятивистской квантовой теории многих частиц рассматриваются электронейтральные системы, состоящие из нейтральных частиц либо из заряженных частиц разного знака, так что закон сохранения заряда заранее предполагается выполненным. Здесь нарушение фазовой симметрии состояния влечет за собой возможность существования сверхтекучих потоков, например, потоков заряда в сверхпроводниках и сверхтекучих потоков массы в жидком гелии.

В случае фазовых преобразований $\varphi \to \varphi' = \varphi e^{i\chi}$ получаем

$$T_{ab}(\mathbf{r},\mathbf{r}';\chi) = \delta_{ab}e^{i\chi}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'), \ \Theta_{ab} = i\delta_{ab}. \quad (59)$$

Отметим, что для пространственно неоднородных состояний комплексность поля существенна и поле нельзя сделать вещественным с помощью фазового преобразования первого рода. Из общих формул (47), (48) с учетом (59) следуют выражения для плотности потока и плотности сохраняющейся величины, связанной с фазовой симметрией:

$$\mathbf{j}^{(\chi)} = i\sum_a\left(\frac{\partial\omega}{\partial\nabla\varphi_a}\varphi_a - \frac{\partial\omega}{\partial\nabla\varphi^*_a}\varphi^*_a\right), \quad (60)$$

$$\pi^{(\chi)} = i\sum_a\left(\frac{\partial\kappa}{\partial\dot\varphi_a}\varphi_a - \frac{\partial\kappa}{\partial\dot\varphi^*_a}\varphi^*_a\right). \quad (61)$$

Если кинетическая энергия выбрана в форме (33), то с фазовой симметрией связан интеграл движения

$$\pi^{(\chi)} = 2\sum_a\beta_a|\varphi_a|^2 + \frac{i}{2}\sum_{ab}(\gamma^*_{ab}\dot\varphi^*_b\varphi_a - \gamma_{ab}\dot\varphi_b\varphi^*_a). \quad (62)$$

Заметим, что в квантовой механике для уравнения Шредингера плотность сохраняющейся величины, связанной с фазовой симметрией лагранжиана и гамильтониана, имеет смысл плотности вероятности, а интеграл движения — полной вероятности.

При записи компоненты комплексного параметра порядка через модуль и фазу

$$\varphi_a = \eta_a e^{i\xi_a},$$

формула (62) примет вид

$$\pi^{(\chi)} = 2\sum_a\beta_a\eta_a^2 + \frac{1}{2}\sum_{ab}\{(\gamma^*_{ab} + \gamma_{ab})\eta_a \times [\eta_b\dot\xi_b\cos(\xi_a - \xi_b) - \dot\eta_b\sin(\xi_a - \xi_b)] + i(\gamma^*_{ab} - \gamma_{ab})\eta_a[\dot\eta_b\cos(\xi_a - \xi_b) + \eta_b\dot\xi_b\sin(\xi_a - \xi_b)]\}. \quad (63)$$

Видно, что плотность сохраняющейся величины (63), как, впрочем, и любая другая наблюдаемая величина, зависит только от разности фаз или их производных, чем обеспечивается инвариантность наблюдаемых величин относительно фазовых преобразований (29).

Для систем с нарушенной фазовой симметрией уравнения (4) имеют пространственно неоднородные решения

$$\varphi_a(\mathbf{r}) = \eta_a e^{i\mathbf{qr}}, \qquad (64)$$

где модуль η_a не зависит от координат, а $\mathbf{q}$ — постоянный вектор. Подстановка функции (64) в уравнения (4) приведет к системе L алгебраических нелинейных уравнений, определяющей модули компонент ПП как функции величины q. Эта система имеет решения вида (64) при достаточно малых значениях q. При значениях q, превосходящих некоторое критическое значение q_c, решения вида (64) отсутствуют. Нетрудно убедиться, что в состояниях, описываемых решениями (64), сохраняется полный импульс. Возможность сохранения импульса в пространственно неоднородных состояниях — важная отличительная особенность систем с комплексным ПП. Действительно, если осуществить трансляцию системы как целого на произвольный вектор $\mathbf{r}_0$, то функция (64) умножится на экспоненциальный множитель с постоянной фазой,

$$\varphi_a(\mathbf{r} + \mathbf{r}_0) = \varphi_a(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{qr}_0},$$

и в силу фазовой инвариантности ТП это не приведет к его изменению. Согласно результатам разд. 6, решение (64) описывает состояние системы с сохраняющимся полным импульсом, плотность которого определяется формулой

$$\boldsymbol{\pi}^{(I)} = 2\mathbf{q} \sum_a \beta_a \eta_a^2. \qquad (65)$$

Отметим, что состояние (64) эквивалентно определенному в рамках микроскопического подхода [20] пространственно однородному, трансляционно неинвариантному состоянию сверхтекучей системы с ненулевым полным импульсом.

До сих пор мы не использовали конкретный вид зависимости ТП от ПП и его производных. Чтобы написать явное выражение для потоков, следует задать зависимость ТП от градиентов. Ограничимся учетом в ТП квадратичных по градиентам слагаемых, выбрав его в виде

$$\omega_g = \frac{1}{2} \sum_{ab} \sum_{ik} c_{ab}^{ik} \nabla_i \varphi_a^* \nabla_k \varphi_b, \qquad (66)$$

где $c_{ab}^{ik} = c_{ba}^{ki*}$. В этом случае плотность потока импульса примет вид

$$j_{ki}^{(I)} = \frac{1}{2} \sum_{ab,l} (c_{ab}^{il*} \nabla_l \varphi_b^* \nabla_k \varphi_a + c_{ab}^{il} \nabla_l \varphi_b \nabla_k \varphi_a^*) =$$

$$= \frac{1}{2} q_k \sum_{ab,l} (c_{ab}^{il*} + c_{ab}^{il}) \eta_a \eta_b q_l. \qquad (67)$$

Плотности сохраняющейся величины и ее потока (60), (61), следующие из условия фазовой инвариантности, для рассматриваемого состояния таковы:

$$\pi^{(\chi)} = 2 \sum_a \beta_a \eta_a^2, \quad j_i^{(\chi)} = \frac{1}{2} \sum_{ab,l} (c_{ab}^{il*} + c_{ab}^{il}) \eta_a \eta_b q_l. \qquad (68)$$

Как видим, величины (68) связаны с плотностью и потоком импульса соотношениями

$$\pi_i^{(I)} = q_i \pi^{(\chi)}, \quad j_{ki}^{(I)} = q_k j_i^{(\chi)}, \qquad (69)$$

так что в данном состоянии с постоянным потоком законы сохранения, следующие из трансляционной и фазовой инвариантности ТП, фактически приводят к одинаковым следствиям. Это верно только в случае (64). Можно было бы, как это принято, определить сверхтекучие скорость $\mathbf{v}_s$ и плотность ρ_s:

$$\mathbf{v}_s \propto \mathbf{q}, \quad \rho_s \propto \sum_a \beta_a \eta_a^2,$$

представив плотность импульса в виде $\boldsymbol{\pi}^{(I)} = \rho_s \mathbf{v}_s$. Закону сохранения величины $\boldsymbol{\pi}^{(\chi)}$, таким образом, придается смысл закона сохранения сверхтекучей массы (при постоянных T и μ). Отметим, что в данном подходе для описания динамики системы с одним комплексным ПП может быть получено уравнение, аналогичное уравнению Гросса—Питаевского [19], описывающее динамику слабонеидеального бозе-газа.

9. Несохраняющиеся потоки

До сих пор рассматривались потоки в системах, ТП которых инвариантен относительно непрерывных преобразований (7). Для этих потоков, которые естественно назвать сохраняющимися, дивергенция в стационарном состоянии равна нулю, а в нестационарном состоянии справедливо уравнение непрерывности (17). В случае, когда инвариантность ТП отсутствует, естественно сохранить введенные определения потоков. Однако в рассматриваемом случае дивергенция этих потоков не равна нулю, а вместо (15) получим

$$\operatorname{div} \mathbf{j}_\nu = \sigma_\nu, \qquad (70)$$

где функция σ_ν имеет смысл плотности источника. Интегрируя (70) по объему, получим, что полное производство величины, переносимой потоком $\mathbf{j}_\nu$, равно полному потоку через границу рассматриваемого объема. Если полный поток через границу равен нулю, то равно нулю общее количество производимой величины, хотя локально источник этой величины отличен от нуля.

В нестационарных условиях при неинвариантном ТП уравнение сохранения имеет вид

$$\frac{\partial \pi_\nu}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j}_\nu = \sigma_\nu, \qquad (71)$$

где $\mathbf{j}_\nu, \pi_\nu$ определяются формулами (16) и (22). В данном случае величины Π_ν (19) уже не являются интегралами движения, даже в том случае, когда полный поток через границу равен нулю.

Примером системы, где существуют несохраняющиеся бездиссипативные потоки, является ферромагнетик с доменными границами. Термодинамический потенциал ферромагнетика ω_f помимо обменной энергии (50), инвариантной относительно вращения магнитного момента (51), включает нарушающую эту инвариантность энергию анизотропии

$$\omega_a = \frac{\beta}{2}\left[M^2 - (\mathbf{Mn})^2\right], \qquad (72)$$

где $\mathbf{n}$ — ось анизотропии, β — постоянная анизотропии. В этом случае плотность потока намагниченности по-прежнему определяется формулой (52), а плотность источника — формулой

$$\sigma_\nu^{(M)} = \beta\,(\mathbf{nM})\,[\mathbf{n} \times \mathbf{M}]_\nu. \qquad (73)$$

С полем намагниченности связаны плотности потока и источника импульса

$$j_{\nu i}^{(I)} = \alpha \nabla_i \mathbf{M} \nabla_\nu \mathbf{M}, \qquad \boldsymbol{\sigma}^{(I)} = \nabla \omega_f \qquad (74)$$

и плотности потока и источника орбитального момента импульса

$$j_{\nu i}^{(L)} = \alpha \sum_a [\mathbf{r} \times \boldsymbol{\nabla} M_a]_\nu \nabla_i M_a, \;\; \boldsymbol{\sigma}^{(L)} = [\mathbf{r} \times \boldsymbol{\sigma}^{(I)}]. \qquad (75)$$

Вблизи блоховской доменной стенки [21], лежащей в плоскости yz,

$$M_x = 0, \;\; M_y = M \sin \vartheta, \quad M_z = M \cos \vartheta,$$

а угол ϑ, определяющий ориентацию намагниченности, величина которой предполагается постоянной, удовлетворяет уравнению

$$\nabla_x^2 \vartheta - \frac{\beta}{\alpha} \sin \vartheta \cos \vartheta = 0. \qquad (76)$$

Локализованное решение этого уравнения имеет вид

$$\cos \vartheta = -\operatorname{th} \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\, x. \qquad (77)$$

В этом случае отличны от нуля следующие компоненты плотности потока и источника намагниченности:

$$j_{xx}^{(M)} = -\alpha M^2 \nabla_x \vartheta, \;\; \sigma_x^{(M)} = -\beta M^2 \sin \vartheta \cos \vartheta. \quad (78)$$

Как видим, уравнение (76) следует из уравнения непрерывности (70) для намагниченности. Отличные от нуля плотности потока и источника импульса имеют вид

$$j_{xx}^{(I)} = \alpha M^2 (\nabla_x \vartheta)^2, \;\; \sigma_x^{(I)} = \beta M^2 \nabla_x (\sin^2 \vartheta). \quad (79)$$

Уравнение непрерывности для импульса дает первый интеграл уравнения (76). Приведем также отличные от нуля плотности потока и источника орбитального момента импульса:

$$j_{yx}^{(L)} = \alpha z M^2 (\nabla_x \vartheta)^2, \quad j_{zx}^{(L)} = -\alpha y M^2 (\nabla_x \vartheta)^2,$$
$$\sigma_y^{(L)} = \beta z M^2 \nabla_x (\sin^2 \vartheta), \quad \sigma_z^{(L)} = -\beta y M^2 \nabla_x (\sin^2 \vartheta). \qquad (80)$$

Таким образом, вблизи доменной стенки имеются локализованные потоки, с которыми в силу равновесности состояния не связана диссипация энергии. Однако в отличие от потоков, генерируемых фазовым преобразованием, таким потокам не сопоставлены интегралы движения. Такие состояния могут быть стабильными только в том случае, если они отвечают абсолютному минимуму ТП.

10. Заключение

Как следует из проведенного рассмотрения, появление бездиссипативных потоков в многочастичных системах обусловлено весьма общими причинами, в значительной мере не связанными с деталями их внутренней структуры. Можно выделить несколько условий, выполнение которых необходимо для существования потоков без диссипации энергии. Во-первых, система должна находиться в состоянии, симметрия которого нарушена, в связи с чем такое состояние, помимо обычных термодинамических переменных, будет характеризоваться некоторыми дополнительными переменными — параметрами порядка. Во-вторых, это состояние должно быть пространственно неоднородным, т.е. компоненты ПП должны быть функциями пространственных координат. В этом случае система описывается набором вещественных или комплексных полей. В-третьих, полное отсутствие диссипации реализуется только в том случае, если система находится в стационарном, термодинамически равновесном состоянии, которому отвечает локальный или абсолютный минимум ТП. Было показано, что в этом случае, как и в теории поля [10], каждому непрерывному преобразованию ПП, сохраняющему величину ТП, соответствует плотность сохраняющегося потока и интеграл движения. Потоки без диссипации могут существовать и в том случае, когда состояние системы пространственно неоднородно, но ее ТП неинвариантен относительно преобразований симметрии. В этом случае генерируемый данной симметрией поток не будет сохраняться и этому потоку не будет отвечать интеграл движения.

С пространственной неоднородностью ПП связана дополнительная энергия, поэтому такое состояние может быть устойчивым только при некоторых условиях. Как отмечалось, оно устойчиво, если реализуется абсолютный минимум ТП, т.е. повышение энергии вследствие неоднородности компенсируется понижением других вкладов в полную энергию системы. Примером такой системы может служить ферромагнетик с доменной структурой. Если деформированное состояние отвечает не абсолютному, а локальному минимуму ТП, то такое состояние является метастабильным и его время жизни определяется величиной потенциального барьера, отделяющего данное состояние от другого состояния с меньшим значением ТП. Наконец, деформированное состояние системы может не соответствовать абсолютному минимуму ТП, но с этим состоянием может быть связан некоторый закон сохранения, который не позволяет системе самопроизвольно перейти в состояние с меньшим значением ТП. В последнем случае состояние, отвечающее локальному минимуму ТП, будет столь же стабильным, как и состояние, отвечающее абсолютному минимуму ТП. По-видимому, именно так обстоит дело в системах, которые обычно называют сверхпроводящими и сверхтекучими. Важная особенность этих систем состоит в том, что поле их ПП — комплексное, а следовательно, фазовая инвариантность состояния в этом случае нарушена. Поскольку фаза комплексного ПП не является наблюдаемой величиной (наблюдаемой может быть только разность фаз или градиент фазы), то все наблюдаемые величины и, в частности, ТП не зависят от фазы и инвариантны относительно фазовых преобразований. Таким образом, фазовая симметрия ТП является точной, в отличие от симметрий, связанных с трансляциями и вращениями, и не может быть нарушена какими-либо взаимодействиями. Поскольку фазовая симметрия — точная, с ней всегда связан сохраняющийся поток и интеграл движения. Еще одна черта комплексных полей, на важность которой, на наш взгляд, не было обращено должного внимания, — кинетическая энергия таких полей содержит вклад, линейный по временным производным ПП. Это приводит к тому, что система с нарушенной фазовой симметрией обладает отличным от нуля интегралом движения в стационарном состоянии. Наличие такого интеграла движения не позволяет системе самопроизвольно перейти в состояние с меньшим значением ТП. Благодаря этому свойству в системах с нарушенной фазовой симметрией токовые состояния, хотя они и не отвечают абсолютному минимуму ТП, оказываются весьма устойчивыми. Так, сверхпроводящее кольцо с наведенным током поддерживалось более двух с половиной лет при температуре ниже T_c, и за это время не было обнаружено какого-либо уменьшения тока [1]. При строго фиксированных внешних условиях токовые состояния (за исключением, может быть, низкоразмерных систем) имели бы бесконечное время жизни. Неизбежные колебания внешних параметров, прежде всего температуры, выводят систему из равновесного состояния, а всякие отклонения от термодинамического равновесия и нестационарные процессы в системе приводят к диссипации энергии и затуханию потока.

В данной работе мы не касались проблемы критических потоков. В связи с этим отметим, что стационарные решения уравнений для ПП имеются при достаточно малых потоках. При потоках, превосходящих некоторое критическое значение, стационарные решения отсутствуют, и система может находиться только в нестационарном состоянии, которое сопровождается диссипацией энергии. Нестационарность может нарушаться и при меньших значениях потоков в случае, когда стационарное течение теряет устойчивость. Несмотря на аналогию в теоретическом описании сверхтекучего ^{4}He и сверхпроводников [6,7], следует подчеркнуть существенную разницу в поведении этих объектов в нестационарных условиях. Диссипативные эффекты при слабой нестационарности в сверхтекучем ^{4}He малы, и его сверхтекучие свойства хорошо проявляются и в слабонеравновесных условиях. Динамическое уравнение для сверхпроводников имеет диффузионную форму [22] и нестационарные процессы могут приводить к сильной диссипации энергии и быстрому разрушению сверхпроводящих свойств.

Несохраняющиеся бездиссипативные потоки, поскольку с ними не связаны законы сохранения, могут стабильно существовать только в состояниях, отвечающих абсолютному минимуму ТП. В этом существенное отличие бездиссипативных потоков, например, в ферромагнетиках [5] или жидких кристаллах, где симметрии, как правило, приближенные, от сверхпроводников и сверхтекучих жидкостей, где нарушена точная фазовая симметрия.

Существования комплексного, зависящего от координат поля ПП достаточно для объяснения эффекта появления бездиссипативных потоков.

Однако, оставаясь в рамках феноменологического подхода, невозможно определить ни структуру ПП, ни природу возникновения комплексного поля. Ответы на эти вопросы должна давать микроскопическая теория систем с нарушенными симметриями. На микроскопическом уровне природа появления комплексного поля в сверхпроводниках была выяснена Горьковым [23], который связал ПП теории Гинзбурга—Ландау с парным аномальным средним. Появление парных корреляций приводит также к изменению спектра квазичастичных возбуждений в сверхпроводниках. Как правило, в спектре появляется энергетическая щель, и именно в этом часто усматривают характерную черту явления сверхпроводимости. Между тем хорошо известно, что в сверхпроводниках с парамагнитными примесями при определенной концентрации последних энергетическая щель исчезает [22]. Однако это не приводит к исчезновению сверхпроводящих свойств, поскольку фазовая симметрия системы остается нарушенной вследствие остающегося отличным от нуля комплексного ПП. Энергетическая щель в определенных направлениях в импульсном пространстве обращается в нуль и в A-фазе сверхтекучего ^{3}He [24]. Эти примеры, а также предшествующее рассмотрение, показывают, что наличие щели в спектре возбуждений, хотя и влияет на многие свойства сверхпроводника, но не имеет какого-либо отношения к существованию в системе потоков, не сопровождающихся диссипацией, т.е. собственно к явлению сверхпроводимости.

С видом энергетического спектра квазичастиц Ландау связывал и свойство сверхтекучести в жидком ^{4}He. Согласно Ландау, явление сверхтекучести возможно, если выполняется введенный им известный критерий [9,19]. За шестьдесят лет после выхода работы Ландау [9], сыгравшей выдающуюся роль в развитии теории сверхтекучести, были получены многочисленные новые экспериментальные данные о строении жидкого ^{4}He и развиты новые теоретические представления. Исследования спектра возбуждений в ^{4}He методом неупругого рассеяния нейтронов показывают, что его вид принципиально не меняется при переходе из сверхтекучей в нормальную фазу [25], а следовательно, критерий Ландау выполнен и в нормальной фазе. Критерий Ландау выполняется и для спектров возбуждений в других несверхтекучих жидкостях. Представляется естественным вывод, что, как и в случае сверхпроводников, сверхтекучие свойства системы бозонов не связаны с видом спектра элементарных возбуждений, как, впрочем, и возбуждений иных видов. Что касается теории сверхтекучести Ландау [9], то ее успех в описании сверхтекучих свойств связан, как отмечалось выше, с введением сверхтекучих скорости и плотности для учета нарушения фазовой симметрии. Роль критерия Ландау изучал Воловик при анализе сверхтекучих свойств A-фазы ^{3}He [22] и сделал вывод, что превышение скорости Ландау не является критическим для существования бездиссипативного потока сверхтекучей компоненты. Объяснение сверхтекучести в ^{4}He как следствия нарушения фазовой симметрии дано в работе Гинзбурга и Питаевского [7]. Ограниченная область применимости этой теории, даже в ее модифицированной форме [8], связана с использованием разложения ТП вблизи T_λ по степеням модуля ПП. Однако основная идея работы, состоящая в описании сверхтекучих свойств посредством введения комплексного ПП, несомненно правильна не только вблизи температуры λ-перехода, но и во всей области существования сверхтекучей фазы.

Сделаем несколько замечаний о микроскопической природе комплексного поля в сверхтекучей бозонной системе. Фазовая симметрия на микроскопическом уровне может быть нарушена в результате появления одночастичных аномальных квазисредних $\langle a_{\mathbf{k}}\rangle$, $\langle a_{\mathbf{k}}^{+}\rangle$, где $a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}}^{+}$ — операторы уничтожения и рождения бозе-частиц с импульсом $\mathbf{k}$. В пространственно однородном случае такие квазисредние существуют только при $\mathbf{k}=0$, но в пространственно неоднородных условиях они отличны от нуля и при $\mathbf{k}\neq 0$. Как следует из микроскопического рассмотрения [26], в системе бозонов всегда, наряду с одночастичными аномальными квазисредними, существуют парные аномальные квазисредние $\langle a_{\mathbf{k}}a_{\mathbf{k}'}\rangle$, $\langle a_{\mathbf{k}}^{+}a_{\mathbf{k}'}^{+}\rangle$. В приближении самосогласованного поля [26], аномальные средние от большего числа частиц выражаются через одночастичные и парные аномальные средние. В более точном приближении это не так, и имеются независимые корреляции более чем двух частиц. Таким образом, в бозе-системе с преимущественным отталкиванием между частицами, как, вероятно, и в ^{4}He, должно существовать по крайней мере два комплексных поля, связанных с одночастичными и парными аномальными средними, т.е. ПП должен быть двухкомпонентным. Модель сверхтекучих бозе-систем с двумя конденсатами изучена в [27]. В случае, когда взаимодействие между частицами в бозе-системе имеет преимущественно характер притяжения, одночастичные аномальные средние невозможны и однокомпонентный ПП формируется только парными аномальными средними [28].

Как мы видели, нарушение симметрии и пространственная неоднородность параметра порядка в состоянии термодинамического равновесия являются достаточными условиями существования бездиссипативных потоков. Представляет интерес ответ на вопрос: являются ли эти условия необходимыми или возможны иные механизмы создания бездиссипативных потоков? Доказательство необходимости отсутствует. Альтернативные варианты можно ожидать, например, в низкоразмерных системах. Автор склонен полагать, что нарушение симметрии должно иметь место во всех случаях возникновения бездиссипативных потоков и, таким образом, является также и необходимым условием существования потоков без диссипации.

Автор благодарит С. В. Пелетминского за обсуждение работы.

1. Э. Линтон, *Сверхпроводимость,* Мир, Москва (1971).
2. P. L. Kapitsa, *Nature* **141,** 74 (1938).
3. D. D. Osheroff, R. C. Richardson, and D.M. Lee, *Phys. Rev. Lett.* **28,** 885 (1972).
4. J. G. Bednorz and K. A. Muller, *Z. Phys.* **B64,** 189 (1986).
5. Э. Б. Сонин, *УФН* **137,** 267 (1982).
6. В. Л. Гинзбург, Л. Д. Ландау, *ЖЭТФ* **20,** 1064 (1950).
7. В. Л. Гинзбург, Л. П. Питаевский, *ЖЭТФ* **34,** 1240 (1958).
8. В. Л. Гинзбург, А. А. Собянин, *УФН* **120,** 153 (1976).
9. Л. Д. Ландау, *ЖЭТФ* **11,** 592 (1941).
10. Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков, *Введение в теорию квантованных полей,* Наука, Москва (1973).
11. Л. Д. Ландау, *ЖЭТФ* **7,** 19 (1937).
12. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Статистическая физика,* Наука, Москва (1964).
13. Ю. М. Полуэктов, В. В. Красильников, *ФНТ* **15,** 1251 (1989).
14. Г. Голдстейн, *Классическая механика,* Наука, Москва (1975).
15. С. В. Пелетминский, А. И. Соколовский, *ТМФ* **18,** 121 (1974).
16. А. И. Ахиезер, С. В. Пелетминский, *Методы статистической физики,* Наука, Москва (1977).
17. Ю. М. Полуэктов, В. В. Слезов, *Силы и диссипация энергии в неоднородных неравновесных сверхпроводниках,* Препринт ХФТИ, 87–44 (1987).
18. А. И. Ахиезер, В. Г. Барьяхтар, С. В. Пелетминский, *Спиновые волны,* Наука, Москва (1967).
19. Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Статистическая физика. Часть 2*, Наука, Москва (1978).
20. Н. Н. Боголюбов (мл.), М. Ю. Ковалевский, С. В. Пелетминский, А. Н. Тарасов, А. М. Курбатов, *Физика ЭЧАЯ* **16,** 875 (1985).
21. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, в кн.: *Л.Д. Ландау. Собрание трудов. Том 1,* Наука, Москва (1969), с. 128.
22. А. М. Гулян, Г. Ф. Жарков. *Сверхпроводники во внешних полях,* Наука, Москва (1990).
23. Л. П. Горьков, *ЖЭТФ* **36,** 1818 (1959).
24. Г. Е. Воловик, *УФН* **143,** 73 (1984).
25. И. В. Богоявленский, Л. В. Карнацевич, Ж. А. Козлов, В. Г. Колобродов, В. Б. Приезжев, А. В. Пучков, А. Н. Скоморохов, *ФНТ* **20,** 626 (1994).
26. Ю. М. Полуэктов, *ФНТ* **28**, 604 (2002).
27. С. И. Шевченко, *ФНТ* **11**, 339 (1985).
28. П. С. Кондратенко, *ТМФ* **22**, 278 (1975).

Non-dissipative flows in many-particle systems as a consequece of symmetry breaking

Yu. M. Poluektov

It is shown that there may exist undamped flows in many particle systems which are in thermodynamic equilibrium spatially inhomogeneous states with broken symmetries. If the thermodynamic potential of a system is invariant with respect to some transformation depending on continuous parameters, then to this transformation correspond the densities of conserving flows and the integrals of motion, the number of which is equal to that of continuous parameters of the transformation. The stability of the superconducting and superfluid flows, the onset of which is a consequence of the phase symmetry breakdown, is explained by the conservation law which allows no breakdown of these states not adequate to an absolute minimum of the thermodynamic potential.