Физика низких температур, 2002, т. 28, № 11, с. 1183–1194

Точное решение задачи об электроне в магнитном поле, состоящем из однородного поля и параллельных ему произвольно расположенных магнитных струн

И. М. Дубровский

Институт металлофизики им. Г. В. Курдюмова НАН Украины
бул. Вернадского, 36, г. Киев, 03680, Украина
E-mail: lodub@dildub.kiev.ua

Статья поступила в редакцию 4 марта 2002 г.

Показано, что требования конечности, однозначности и определенности волновой функции и плотности тока вероятности с необходимостью приводят к тому, что волновые функции электрона при приближении к магнитной струне должны по модулю убывать быстрее, чем корень квадратный расстояния до струны (магнитной струной называют бесконечно тонкий соленоид с конечным магнитным потоком). Получен энергетический спектр электрона, в общем случае совпадающий со спектром в отсутствие струн. Найден общий вид собственных функций основного состояния и оператор, действием степеней которого можно получить собственные функции возбужденных состояний. В случае, когда имеется только одна струна с магнитным потоком, не кратным удвоенному кванту потока, в энергетическом спектре появляется еще одна эквидистантная последовательность собственных значений. Она сдвинута по отношению к основной на долю интервала, равную положительной дробной части частного от деления магнитного потока на величину удвоенного кванта. Эта последовательность начинается от уровня, номер которого равен числу остальных магнитных струн. Получены также волновые функции для этих особых состояний.

Показано, що вимоги скінченності, однозначності і визначеності хвильової функції та густини струму ймовірності з необхідністю призводять до того, що хвильові функції електрона при наближенні до магнітної струни повинні по модулю спадати швидче, ніж квадратний корінь з відстані до струни (магнітною струною називають нескінчено тонкий соленоїд з скінченим магнітним потоком). Одержано енергетичний спектр електрона, який у загальному випадку співпадає зі спектром у відсутності струн. Знайдено загальний вигляд власних функцій основного стану і оператор, діючи ступенями якого можна одержати власні функції збуджених станів. У випадку, коли існує тільки одна струна з магнітним потоком, що не є кратним подвоєному кванту потоку, у енергетичному спектрі виникає ще одна еквідистантна послідовність власних значень. Вона зсунута по відношенню до основної на частку інтервала, що дорівнює додатній дробовій частині частки від ділення магнітного потоку на величину подвоєного кванта. Ця послідовність починається від рівня, номер якого дорівнює кількості інших магнітних струн. Одержано також хвильові функції для цих особливих станів.

PACS: 03.65.Bz, 03.65.Ge

1. Введение

Магнитной струной называют бесконечно тонкий соленоид с конечным магнитным потоком. Поскольку напряженность магнитного поля струны всюду, кроме ее линии, равна нулю, взаимодействие заряженной частицы со струной — чисто квантовый эффект, не имеющий классического аналога (эффект Ааронова—Бома). Задача о таком взаимодействии возникает при рассмотрении электрона в кристалле, содержащем винтовую дислокацию, методом эффективного гамильтониана. Эффективное уравнение Шредингера в плоскости, перпендикулярной дислокационной линии, можно рассматривать отдельно. Тогда линейные по деформации члены описывают в гамильтониане магнитную струну (совпадающую с дислокационной линией) с магнитным потоком, пропорциональным компоненте квазиимпульса вдоль дислокационной линии. Эта задача, а также обобщение ее на случай присутствия однородного магнитного поля, параллельного струне, неоднократно рассматривались (см. [1–3]) и интересны тем, что описывают простейший случай взаимодействия электрона со сдвиговой деформацией кристалла, в котором переменные разделяются. Во втором разделе настоящей работы эти исследования будут дополнены граничными условиями в точке пересечения струной плоскости, в которой находится электрон. Будут также рассмотрены условия, при которых струна может приближенно описывать влияние на состояния электрона неоднородности магнитного поля малого радиуса.

Эвристические рассуждения о влиянии струны на состояния двумерного электронного газа в магнитном поле, а также о взаимодействии в газе двумерных композитных, т. е. имеющих электрический заряд и связанную с ним магнитную струну, частиц, играют фундаментальную роль в теории квантового эффекта Холла [4]. В связи с этим может представлять интерес полученное в разд. 4 точное решение задачи о заряженной частице в магнитном поле, состоящем из однородного поля и многих, произвольно расположенных струн. Эта модель описывает также электрон в кристалле с параллельными винтовыми дислокациями в магнитном поле. Как отмечалось в [1], квантование в такой системе нельзя провести по правилам Бора—Зоммерфельда, хотя соответствующая классическая задача решается точно. Примечательно также, что точное решение получено для неупорядоченной, не имеющей никакой пространственной симметрии системы. Решение стало возможным благодаря преобразованию гамильтониана, описанному в разд. 3. Для этого преобразования необходимы граничные условия в точке, через которую проходит струна, полученные в разд. 2.

2. Электрон в поле одной струны

Уравнение Шредингера в случае одной струны с магнитным потоком F

$$\hat{\mathscr{H}}\,\Omega(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\mu}\left[\left(\hat{p}_x - \frac{eHy}{2c} - \frac{eFy}{2\pi c(x^2+y^2)}\right)^2 + \left(\hat{p}_y + \frac{eHx}{2c} + \frac{eFx}{2\pi c(x^2+y^2)}\right)^2 + \hat{p}_z^2\right]\Omega(\mathbf{r}) = E\Omega(\mathbf{r}) \tag{1}$$

легко решается путем разделения переменных в цилиндрических координатах с осью, совпадающей с линией струны [2,3]. Здесь e — модуль заряда электрона и учтено, что заряд отрицателен; $\mathbf{H}$ — напряженность однородного магнитного поля, параллельного оси $\mathbf{Z}$; F может быть положительной или отрицательной величиной в зависимости от направления магнитного поля струны относительно однородного поля; μ — масса электрона. Исключим из рассмотрения движение вдоль оси $\mathbf{Z}$ и далее будем рассматривать только двумерную задачу. В полярных координатах (r,φ) собственные функции имеют вид

$$\Omega(\mathbf{r}) = \exp(im\varphi)\exp\left(-\frac{r^2}{2l^2}\right)\times$$

$$\times r^{|\nu|}\Phi\left(-\frac{E}{\hbar\omega} + \frac{\nu+|\nu|+1}{2},\ |\nu|+1;\ \frac{r^2}{l^2}\right), \tag{2}$$

где $\Phi(a,c;x)$ — вырожденная гипергеометрическая функция, m — любое целое число, нормировочный множитель здесь и далее для краткости будем опускать,

$$\omega = \frac{eH}{\mu c},\ l^2 = \frac{2c\hbar}{eH},\ \nu = m + \frac{F}{2F_0},\ F_0 = \frac{\pi\hbar c}{e}. \tag{3}$$

Для конечности волновой функции в начале координат (в точке, где находится струна) и однозначности ее при обходе этой точки из двух фундаментальных решений вырожденного гипергеометрического уравнения выбрана функция $\Phi(a,c;x)$, и m должно быть целым числом.

Существенное отличие множества функций $\Omega_{E,m}(r,\varphi)$ от соответствующих решений задачи в отсутствие магнитной струны [5] в том, что оно всегда включает или функцию с $|\nu|=0$ при $m\neq 0$, если $F/2F_0$ — целое число, или две функции с $0<|\nu|<1$. В первом случае функция не имеет предела при $r\to 0$ и поэтому не может быть волновой функцией. Во втором случае обе функции имеют особенность градиента при $r\to 0$. Различные авторитетные источники по-разному формулируют требования к непрерывности производных волновой функции. Так, авторы монографий [6,7] считают, что первые производные волновой функции остаются непрерывными и ограниченными во всем пространстве, причем не приводятся физические аргументы для обоснования этого требования. В [7] указано, что этого требования достаточно для ограниченности и непрерывности плотности тока вероятности. В монографии [8] допускают, чтобы производные стремились к бесконечности «не слишком сильно». В [5] указывается, что непрерывность производных может иметь исключения, обусловленные конкретной рассматриваемой задачей.

Введем обозначение:

$$\frac{F}{2F_0} = a + \alpha, \quad a \text{ — целое, } 0 \le \alpha < 1. \tag{4}$$

Азимутальная компонента плотности тока в состоянии (2) имеет вид

$$j_\varphi = -\frac{e\hbar}{\mu} \exp\left(-\frac{r^2}{l^2}\right) |\Phi|^2 r^{2|\nu|} \left(\frac{\nu}{r} + \frac{eH}{2c\hbar} r\right). \tag{5}$$

Очевидно, что при $0 < 2|\nu| \le 1$ выражение (5) приводит к физически бессмысленному результату — бесконечному или ненулевому значению азимутального тока при $r = 0$. При $1 < 2|\nu| < 2$ уравнение (5) дает физически допустимые значения тока вероятности во всем пространстве, хотя градиент функции имеет особенность при $r = 0$. Поэтому примем следующие ограничения на возможные значения m, не учтенные в [2,3]. При $\alpha = 0$ значения $m \ne -a$. Если ν — не целое число, т.е. $\alpha \ne 0$, то всегда есть такое m, что $|\nu| \le 1/2$, и состояние с таким значением m нужно исключить из числа решений уравнения Шредингера. При $\alpha \le 1/2$ $m \ne -a$, а при $\alpha \ge 1/2$ число $m \ne -1 - a$. Эти правила отбора физически допустимых состояний можно объединить граничным условием: в точке, где находится магнитная струна, волновая функция равна нулю, причем при приближении к этой точке ее модуль убывает быстрее, чем $r^{1/2}$. (Отметим, что ограничиться условием обращения функции в нуль нельзя и по другой причине: линейное многообразие, определяемое таким условием, не замкнуто. Действительно, последовательность функций $r^{1/n}$ принадлежит этому многообразию, но ее предел — нет.) Такие условия должны выполняться и в случае многих струн, который будет рассмотрен далее. По этой причине спин не взаимодействует с магнитными струнами, и его учет не представляет интереса.

Энергетический спектр определяют граничные условия на внешней границе области определения. Если область определения считать бесконечной, то для интегрируемости собственных функций необходимо принять

$$-\frac{E}{\hbar\omega} + \frac{\nu + |\nu| + 1}{2} = -N, \tag{6}$$

где N — неотрицательное целое число. Тогда собственные значения энергии, соответствующие собственным функциям (2), имеют вид

$$E_{Nm} = \hbar\omega\left(N + \frac{\nu + |\nu| + 1}{2}\right). \tag{7}$$

Вырожденные гипергеометрические функции в (2) при этом сводятся к обобщенным полиномам Лагерра $L_N^{|\nu|}(r^2/l^2)$.

Квантовые числа N и m не интерпретируются непосредственно в терминах классического движения электрона. Для физической интерпретации получаемых в дальнейшем результатов и сопоставления их с квазиклассическим описанием удобно в этом решении перейти к введенным в [1] квантовым числам n и k, определяющим соответственно энергию и расстояние центра классической орбиты от начала координат. Из решения классической задачи можно получить выражения для интегралов движения $C_x(\mathbf{p}, \mathbf{r})$, $C_y(\mathbf{p}, \mathbf{r})$ — декартовых координат центра орбиты, через декартовы координаты и импульсы классической частицы, обобщенные на случай магнитной струны:

$$\begin{aligned} C_x &= -\frac{1}{\mu\omega} p_y - \frac{F}{2\pi H} \frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{x}{2}, \\ C_y &= \frac{1}{\mu\omega} p_x - \frac{F}{2\pi H} \frac{y}{x^2 + y^2} + \frac{y}{2}. \end{aligned} \tag{8}$$

Переходя к операторам, можно записать оператор квадрата расстояния центра классической орбиты от магнитной струны:

$$\hat{R}^2 = \hat{C}_x^2 + \hat{C}_y^2 = l^2\left(\frac{1}{\hbar\omega}\hat{\mathcal{H}} + i\frac{\partial}{\partial\varphi} - \frac{F}{2F_0}\right). \tag{9}$$

Очевидно, $\hat{R}^2$ коммутирует с гамильтонианом и функция (2) является его собственной функцией, а соответствующее собственное значение имеет вид

$$R_{jm}^2 = l^2\left(N + \frac{|\nu| - \nu}{2} + \frac{1}{2}\right). \tag{10}$$

Введем квантовые числа энергии n и расстояния центра орбиты от начала координат k:

$$\begin{aligned} n &= N + \frac{|m + a| + m + a}{2} \ge 0, \\ k &= N + \frac{|m + a| - m - a}{2} \ge 0, \end{aligned} \tag{11}$$

$$n-k=m+a, \quad N=k+\frac{(n-k)-|n-k|}{2}.$$

Эти числа могут принимать любые неотрицательные значения за исключением случаев, предусмотренных выведенными выше правилами отбора. Приведем выражения для энергии, расстояния центра орбиты от начала координат, а также радиуса ларморовской орбиты r_0 через квантовые числа n и k:

$$E_{nk}=\hbar\omega\left[n+\theta\left(n-k\right)\alpha+\frac{1}{2}\right],$$

$$r_0^2=l^2\left[n+\theta\left(n-k\right)\alpha+\frac{1}{2}\right], \qquad (12)$$

$$R_{nk}^2=l^2\left\{k+[\theta\left(n-k\right)-1]\alpha+\frac{1}{2}\right\}, \ \theta\left(x\right)=\begin{cases}1; & x\geq 0\\ 0; & x<0\end{cases}.$$

Отсюда можно получить классическую интерпретацию правил отбора. При $n=k$ линия орбиты проходила бы через точку, где расположена струна, если $\alpha=0$, или вблизи, охватывая ее, если $\alpha\leq 1/2$. Если $\alpha\geq 1/2$, то орбита с $m+a=n-k=-1$ проходила бы вблизи струны, не охватывая ее. Такие орбиты оказываются запрещенными. («Вблизи» означает, что $\left|r_0^2-R^2\right|\leq l^2/2$). Орбиты с $n<k$ не охватывают струну, энергетические уровни составляют обычный спектр Ландау и вырождены по k. При $n\geq k$ орбиты охватывают струну, энергетические уровни тоже эквидистантны, но сдвинуты по отношению к уровням Ландау на $\hbar\omega\alpha$ и вырождены по всем значениям $k\leq n$. Такие состояния в дальнейшем будем называть особыми. Однако полного соответствия между распределением электронной плотности и классической орбитой нет. Координаты центра орбиты (8) не коммутируют между собой, поэтому если модуль радиуса-вектора центра определен (12), то его азимут оказывается полностью неопределенным. В рассматриваемом случае одной струны этот азимут несуществен для вычисления интеграла действия I_r и момента импульса электрона относительно оси M:

$$I_r=\frac{1}{2\pi}\oint p_r dr=\begin{cases}\hbar r_0^2/l^2\\ \hbar R^2/l^2\end{cases}, \quad p_r=\frac{xp_x+yp_y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$M=xp_y-yp_x=\frac{\hbar r_0^2}{l^2}-\frac{\hbar R^2}{l^2}-\frac{\hbar F}{2F_0}. \qquad (13)$$

Здесь верхнее значение I_r соответствует орбитам, не охватывающим магнитную струну. Применяя к I_r и M правила квантования Бора—Зоммерфельда:

$$I_r=\hbar\left(N+\frac{1}{2}\right), \quad M=\hbar m, \qquad (14)$$

и учитывая пропорциональность энергии квадрату радиуса орбиты, можно получить формулу (7). Отметим, что для получения правильного результата необходимо использовать квазиклассическое квантование для каждой степени свободы отдельно, в соответствии с правилами. Часто используемое квантование полного адиабатического инварианта

$$\frac{1}{2\pi}\oint p_x dx+p_y dy=I_r+\frac{1}{2\pi}\oint Md\varphi=$$

$$=\begin{Bmatrix}\hbar r_0^2/l^2\\ \dfrac{\hbar r_0^2}{l^2}-\dfrac{\hbar F}{2F_0}\end{Bmatrix}=\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar \qquad (15)$$

приводит к физически бессмысленному результату: при $|a+\alpha|>n+1/2$ и $a<0$ оказывается $r_0^2<0$.

Если $\alpha=0$, т.е. магнитный поток струны равен целому числу удвоенных квантов потока, то энергетический спектр отличается от спектра в отсутствие струны только исключением состояний с $n=k$. Волновые функции при этом отличаются тем, что в множителях, зависящих от r, квантовое число момента количества движения m заменяется на $\nu=m+a$.

В случае нескольких струн количество возможных вариантов значений квантуемых интегралов действия быстро увеличивается с ростом числа струн. Какой именно вариант осуществляется, зависит от радиуса ларморовской орбиты и от обеих координат ее центра, которые не могут наблюдаться одновременно. Поэтому получить энергетический спектр путем квантования интегралов действия в случае нескольких струн невозможно. В работе [1] была предложена гипотеза для определения спектра в этом случае, но, как будет показано ниже, она приводит к неправильным результатам.

В заключение этого раздела рассмотрим состояния электрона в поле соленоида с конечным радиусом r_1 и напряженностью поля внутри него H_i и однородном вне соленоида поле H_e. Введем безразмерные переменную x и энергию ε:

$$x=\frac{r^2 eH_e}{2c\hbar}, \qquad \varepsilon=\frac{E\mu c}{\hbar eH_e}. \qquad (16)$$

Волновые функции вне и внутри соленоида имеют вид

$$\Omega_e = \exp(im\phi)\exp\left(-\frac{x}{2}\right)x^{|\nu|/2}\Psi\left(-\varepsilon+\frac{\nu+|\nu|+1}{2},\ |\nu|+1;\ x\right), \tag{17}$$

$$\Omega_i = \exp\left(im'\phi\frac{\beta}{|\beta|}\right)\exp\left(-\frac{|\beta|x}{2}\right)x^{|m'|/2}\,\Phi\left(-\frac{\varepsilon}{|\beta|}+\frac{m'+|m'|+1}{2},\,|m'|+1;\ |\beta|x\right), \tag{18}$$

где $\beta = H_i/H_e$ с учетом знака (направление H_e будем считать положительным),

$$\nu = m+\frac{F}{2F_0} = m+\frac{e\pi r_1^2}{2\pi c\hbar}(H_i - H_e) = m + x_1\left(\frac{H_i}{H_e}-1\right) = m + x_1(\beta-1) = m + x_1\eta. \tag{19}$$

Сшивание значений функций (17) и (18) при $x = x_1$ определяет отношение коэффициентов при них и, кроме того, требует, чтобы

$$m = m'\frac{\beta}{|\beta|} = m'\,\mathrm{sgn}\,\beta. \tag{20}$$

Значения коэффициентов вычисляются из условия нормировки. Условие непрерывности производной по φ при этом выполняется автоматически, как следует из (20). Условие непрерывности производной по r можно заменить на непрерывность логарифмической производной по x:

$$-\frac{|\beta|}{2}+\frac{|m|}{2x_1}+|\beta|\frac{\Phi'}{\Phi} = -\frac{1}{2}+\frac{|\nu|}{2x_1}+\frac{\Psi'}{\Psi}. \tag{21}$$

Оно определяет спектр собственных значений ε. Область определения собственных функций будем считать бесконечной. Поскольку $\Psi(a,c;x) \sim x^{-a}$ при $x \to \infty$, решение (17), (18) удовлетворяет граничным условиям на бесконечности и в нуле при любых значениях параметров. Используя свойства вырожденных гипергеометрических функций (см. [5]), можно записать

$$\frac{\Phi'}{\Phi} = \frac{1}{|\beta|x_1}\left(-\frac{\varepsilon}{|\beta|}+\frac{m+|m|+1}{2}\right)\left[\frac{\Phi\left(-\frac{\varepsilon}{|\beta|}+\frac{m+|m|+3}{2},\ |m|+1;\ |\beta|x_1\right)}{\Phi\left(-\frac{\varepsilon}{|\beta|}+\frac{m+|m|+1}{2},\ |m|+1;\ |\beta|x_1\right)}-1\right],$$

$$\frac{\Psi'}{\Psi} = \frac{-\varepsilon+\frac{\nu+|\nu|+1}{2}}{x_1}\left[\left(-\varepsilon+\frac{\nu-|\nu|+1}{2}\right)\frac{\Psi\left(-\varepsilon+\frac{\nu+|\nu|+3}{2},\,|\nu|+1;\ x_1\right)}{\Psi\left(-\varepsilon+\frac{\nu+|\nu|+1}{2},\,|\nu|+1;\ x_1\right)}-1\right]. \tag{22}$$

Равенство (21) — сложное трансцендентное уравнение, зависящее от параметров соленоида H_i и x_1. Проще рассмотреть его в предельном случае соленоида малого радиуса, но с конечным магнитным потоком:

$$x_1 \to 0,\quad |\beta| \to \infty,\quad \zeta = x_1|\beta| = \mathrm{const}. \tag{23}$$

Тогда вместо (21) приближенно получим

$$\Theta_m(\zeta) = \frac{|\nu|}{2}+\left(-\varepsilon+\frac{\nu+|\nu|+1}{2}\right)\left[\left(-\varepsilon+\frac{\nu-|\nu|+1}{2}\right)\frac{\Psi\left(-\varepsilon+\frac{\nu+|\nu|+3}{2},\,|\nu|+1;\ x_1\right)}{\Psi\left(-\varepsilon+\frac{\nu+|\nu|+1}{2},\,|\nu|+1;\ x_1\right)}-1\right], \tag{24}$$

где

$$\Theta_m(\zeta)=\frac{|m|-\zeta}{2}+\frac{m+|m|+1}{2}\left[\frac{\Phi\left(\frac{m+|m|+3}{2},\ |m|+1;\ \zeta\right)}{\Phi\left(\frac{m+|m|+1}{2},\ |m|+1;\ \zeta\right)}-1\right]. \tag{25}$$

Спектр значений ε получается из (24), если положить

$$-\varepsilon+\frac{\nu+|\nu|+1}{2}=-N-\gamma, \tag{26}$$

где N — произвольное натуральное число или нуль, $|\gamma|<1$. Тогда (см. [9]), если ν — не целое число,

$$\Psi(-N-\gamma,|\nu|+1;\ x_1)\approx\frac{\Gamma(-|\nu|)}{\Gamma(-|\nu|-N)}+\frac{\Gamma(|\nu|)}{\Gamma(-N-\gamma)x_1^{|\nu|}};\ \ \Gamma(-N-\gamma)\approx\frac{(-1)^{N-1}}{\gamma N!}. \tag{27}$$

Из (24) имеем

$$\gamma=\frac{(-1)^N x_1^{|\nu|}\Gamma(-|\nu|)\,(2\Theta_m(\zeta)-|\nu|)}{N!\,\Gamma(|\nu|)\,\Gamma(-|\nu|-N)\,(2\Theta_m(\zeta)+|\nu|)}. \tag{28}$$

Исходя из асимптотики $\Phi(a,c;x)$ при $x\to\infty$ и $x\to 0$, можно показать, что $\Theta_m(\zeta)>0$, поэтому знаменатель (28) не имеет нулей и γ всегда мало в меру малости $x_1^{|\nu|}$. Если ν — целое число и $\nu\neq 0$, то

$$\Psi(-N-\gamma,|\nu|+1;x_1)\approx(-1)^N\left[\frac{(N+|\nu|)!}{|\nu|!}-\gamma\frac{N!}{x_1^{|\nu|}}(|\nu|-1)!\right],\ \ \gamma=\frac{x_1^{|\nu|}\big(N+|\nu|\big)!\big(2\Theta_m(\zeta)-|\nu|\big)}{N!|\nu|!\big(|\nu|-1\big)!\big(2\Theta_m(\zeta)+|\nu|\big)}. \tag{29}$$

Формула (29) является предельным случаем (28), когда ν стремится к целому числу, так что (28) — общая формула для всех $\nu\neq 0$. Можно показать, что при $\nu=0$ величина $\gamma\sim-\left(\ln x_1\right)^{-1}$, т.е. этот случай не может быть описан как предел (28). Сшитые вырожденные гипергеометрические функции при стремлении к нулю точки сшивания x_1, а следовательно, и γ будут переходить в соответствующие полиномы Лагерра при всех m равномерно по x, кроме случая $\nu=0$.

Таким образом, состояния в поле магнитной струны при $|\nu|>1/2$ на неограниченной плоскости приближенно описывают соответствующие состояния в поле соленоида малого радиуса. Качественное отличие заключается в том, что уровни энергии в поле соленоида не вырождены, хотя и образуют тесные группы вблизи уровней Ландау и на расстоянии $\hbar\omega\alpha$ от них, а в поле струны каждый уровень Ландау расщеплен на два вырожденных уровня. Это происходит оттого, что энергия определяется не только классической орбитой, охватывающей соленоид, но и тем, что волновая функция внутри соленоида не равна нулю.

3. Факторизация гамильтониана

Гамильтониан электрона в магнитном поле, которое представляет собой суперпозицию однородного поля и I параллельных ему магнитных струн с потоками F_i, расположенными в точках $\mathbf{z}_i=(\zeta_{ix},\zeta_{iy})$ плоскости, перпендикулярной магнитному полю $(i=1,2,\dots,I)$, имеет вид

$$\hat{\mathcal{H}}=\frac{1}{2\mu}\left[\left(\hat{p}_x-\frac{eHy}{2c}-\sum_{i=1}^{I}(a_i+\alpha_i)\,w_{iy}\right)^2+\right.$$

$$\left.+\left(\hat{p}_y+\frac{eHx}{2c}+\sum_{i=1}^{I}(a_i+\alpha_i)w_{ix}\right)^2\right], \tag{30}$$

где

$$w_{ix}=\frac{x-\zeta_{ix}}{(x-\zeta_{ix})^2+(y-\zeta_{iy})^2},$$

$$w_{iy}=\frac{y-\zeta_{iy}}{(x-\zeta_{ix})^2+(y-\zeta_{iy})^2} \tag{31}$$

— компоненты вектора $\mathbf{w}_i$. Легко проверить, что $\operatorname{div}\mathbf{w}_i=0$ всюду, где имеют смысл производные от его компонент. В то же время поток $\mathbf{w}_i$ через любую окружность с центром в точке $\mathbf{z}_i$, где находится струна, равен 2π. Поэтому

$$\operatorname{div} \mathbf{w}_i = \frac{\partial w_{ix}}{\partial x} + \frac{\partial w_{iy}}{\partial y} = 2\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{z}_i). \quad (32)$$

Факторизация этого гамильтониана производится путем введения операторов, являющихся обобщением операторов, введенных в [10,11], на случай присутствия струн:

$$\hat{\pi}_\pm = \left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right) \pm i\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial y}\right) \pm \frac{i\hbar}{l^2}\left(x \pm iy\right) \pm$$

$$\pm i\hbar\sum_{i=1}^{N}\left(a_i + \alpha_i\right)(w_{ix} \pm iw_{iy}). \quad (33)$$

Коммутатор $[\hat{\pi}_+, \hat{\pi}_-]$, в отличие от [10,11], строго говоря, не всюду равен постоянной величине (см. (32)):

$$[\hat{\pi}_+, \hat{\pi}_-] = -2\hbar\mu\omega -$$

$$-4\pi\hbar^2\sum_{i=1}^{N}\left(a_i + \alpha_i\right)\delta(x - \zeta_{xi})\,\delta(y - \zeta_{yi}), \quad (34)$$

но при учете того, что волновые функции должны, как показано выше, иметь нули в точках, где находятся струны, гамильтониан (30), как и в [10,11], может быть представлен в виде

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{1}{2\mu}\hat{\pi}_+\hat{\pi}_- + \frac{1}{2}\hbar\omega. \quad (35)$$

Введем переменные и обозначения (см. [11]):

$$z_\pm = x \pm iy, \quad \zeta_{i\pm} = \zeta_{ix} \pm i\zeta_{iy},$$
$$w_{i\pm} = w_{ix} \pm iw_{iy} = \frac{1}{z_\mp - \zeta_{i\mp}}. \quad (36)$$

Подчеркнем, что комплексные переменные $z_\pm$ не являются независимыми, поскольку они комплексно-сопряженные. Две независимых комплексных переменных вводили бы четыре независимых действительных переменных вместо x и y. Введем операторы:

$$\frac{\partial}{\partial z_\pm} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} \mp i\frac{\partial}{\partial y}\right). \quad (37)$$

Это не дифференцирование по комплексной переменной, а линейная комбинация операторов дифференцирования по координатам. В частности, функции, к которым будут применяться эти операторы, могут не удовлетворять условиям Коши — Римана. Из определений (36) и (37) можно получить

$$\left[\frac{\partial}{\partial z_\pm}, z_\pm\right] = 1, \quad \left[\frac{\partial}{\partial z_\pm}, z_\mp\right] = 0, \quad (38)$$

поэтому действие операторов (37) на функции от переменных $z_\pm$ можно рассматривать как дифференцирование по независимым действительным переменным. (Исключение составляют производные $\partial w_\pm/\partial z_\pm$, пропорциональные δ-функциям, но, как уже отмечалось, это несущественно в пространстве рассматриваемых функций.) Операторы $\hat{\pi}_\pm$ в этих переменных имеют вид

$$\hat{\pi}_\pm = -i\hbar\left(2\frac{\partial}{\partial z_\mp} \mp \frac{1}{l^2}z_\pm \mp \sum_{i=1}^{N}\frac{a_i + \alpha_i}{z_\mp - \zeta_{i\mp}}\right). \quad (39)$$

Из (34) и (35) следует, что для функций, имеющих нули в точках, где расположены струны, можно записать

$$[\hat{\mathcal{H}}, \hat{p}_-] = -\hbar\omega\hat{\pi}_-, \quad [\hat{\mathcal{H}}, \hat{\pi}_+] = \hbar\omega\hat{\pi}_+. \quad (40)$$

Отсюда легко показать, что если функция ϕ — собственная функция гамильтониана, соответствующая собственному значению E, то функция $\hat{\pi}_\pm\phi$ тоже будет собственной, соответствующей значению $E \pm \hbar\omega$, если только она удовлетворяет всем условиям, которые налагаются на решения уравнения Шредингера.

В случае многих струн в классической задаче также можно найти интегралы движения для траекторий, не пересекающих струны, соответствующие координатам центра классической орбиты. Они аналогичны (8) с заменой Fw_x, Fw_y на соответствующие суммы $\sum F_i w_{ix}, \sum F_i w_{iy}$. При переходе к квантовой механике им также соответствуют операторы, коммутирующие с гамильтонианом в пространстве функций, которые обращаются в нуль в точках, где находятся струны, но не коммутирующие один с другим. Из них можно построить операторы

$$\hat{C}_\mp = \hat{C}_x \pm i\hat{C}_y = \pm\frac{i}{\mu\omega}\hat{\pi}_\pm + z_\pm \quad (41)$$

и эрмитов оператор квадрата расстояния центра орбиты от любой точки (ξ_x, ξ_y)

$$\hat{R}^2(\xi_x, \xi_y) = (\hat{C}_+ - \xi_-)(\hat{C}_- - \xi_+) + \frac{1}{2}l^2, \quad (42)$$

коммутирующий с гамильтонианом. Из коммутационных соотношений

$$[\hat{R}^2, \hat{C}_+] = l^2\hat{C}_+, \quad [\hat{R}^2, \hat{C}_-] = -l^2\hat{C}_- \quad (43)$$

следует, что оператор $\hat{R}^2(\xi_x, \xi_y)$ имеет дискретный спектр с шагом l^2, и повышающим собственное значение оператором для множества собственных состояний является $\hat{C}_+$, а понижающим — $\hat{C}_-$.

4. Решение задачи в случае многих струн

Заменим искомые волновые функции, представив

$$\Omega = \exp\left(-\frac{z_+ z_-}{2l^2}\right)\psi, \qquad (44)$$

где начало координат $z_+ = z_- = 0$ выбрано произвольно, и введем операторы

$$\hat{P}_\pm = -i\hbar\left(2\frac{\partial}{\partial z_\mp} \mp \sum_{i=1}^{N}\frac{a_i + \alpha_i}{z_\mp - \zeta_{i\mp}}\right). \qquad (45)$$

Тогда уравнение для функции ψ имеет вид

$$\frac{1}{2\mu}\left[\hat{P}_+\hat{P}_-\psi + \frac{2i\hbar}{l^2}z_+\hat{P}_-\psi\right] + \frac{1}{2}\hbar\omega\psi = E\psi,$$

или (46)

$$\frac{1}{2\mu}\left[\hat{P}_+ + \frac{2i\hbar}{l^2}z_+\right]\hat{P}_-\psi = \left(E - \frac{1}{2}\hbar\omega\right)\psi.$$

Из коммутационных соотношений (34), (40) легко показать, что если функция ϕ является решением уравнения (46) с собственным значением E_0, то функция $(\hat{P}_+ + 2i\hbar z_+/l^2)\,\phi$ тоже является решением с собственным значением $E_0 + \hbar\omega$, если она удовлетворяет граничным условиям. Как можно ожидать из предыдущих разделов этой статьи, на неограниченной однородной плоскости спектр задачи должен состоять из одной или нескольких эквидистантных последовательностей вырожденных уровней. Основное состояние при этом должно иметь энергию $\hbar\omega/2$.

Рассмотрим задачи для неограниченной плоскости при конечном числе струн. Если ϕ — функция основного состояния системы, т.е. $E_0 = \hbar\omega/2$, то действие оператора $\hat{P}_-$ переводит ϕ в функцию, тождественно равную нулю, т.е. ϕ — собственная функция $\hat{P}_-$ с нулевым собственным значением. При других значениях E_0, если $\hat{P}_-\phi$ обращается в нуль во всех точках, где находятся струны, то она является собственной функцией (46) с собственным значением $E_0 - \hbar\omega$. Оператор $\hat{P}_-$ может также перевести функцию ϕ в функцию, не удовлетворяющую условиям. Тогда, если уровень E_0 не вырожден, то он является нижайшим уровнем спектра особых состояний, если же он вырожден, то, возможно, некоторая линейная комбинация принадлежащих ему собственных функций переводится оператором $\hat{P}_-$ в функцию, удовлетворяющую условиям, с собственным значением $E_0 - \hbar\omega$. Следовательно, для полного решения задачи достаточно найти полную систему функций основного состояния в последовательности собственных значений Ландау и все возможные нижайшие собственные значения и соответствующие собственные функции в последовательностях особых состояний.

Собственная функция основного состояния является в то же время собственной функцией оператора $\hat{P}_-$ с нулевым собственным значением. Решая соответствующее уравнение первого порядка, получаем

$$\hat{P}_-\left\{\Phi(z_-)\prod_{i=1}^{N}(z_+ - \zeta_{i+})^{-\frac{a_i+\alpha_i}{2}}\right\} \equiv 0, \qquad (47)$$

где $\Phi(z_-)$ — произвольная функция от z_-. Ее следует выбрать так, чтобы собственная функция гамильтониана удовлетворяла всем необходимым условиям: а) не имела полюсов; б) удовлетворяла бы граничным условиям экспоненциального убывания при $|z_\pm| = r \to \infty$, т.е. функция $\psi(z_+, z_-)$ может расти не быстрее конечной степени r; в) стремилась бы к нулю при приближении к точке, где находится струна, быстрее, чем $\rho^{1/2}$ (ρ — расстояние от струны); г) была однозначно определена всюду с точностью до постоянного фазового множителя. Последние два условия налагают определенные требования на показатели степени в парах сомножителей вида $(z_+ - \zeta_{i+})^s(z_- - \zeta_{i-})^t$. Переходя к обычным переменным и перенеся начало координат в точку (ζ_{ix}, ζ_{iy}), получаем

$$(z_+ - \zeta_{i+})^s(z_- - \zeta_{i-})^t = (x' + iy')^s(x' - iy')^t =$$
$$= \exp\left[i\,(s - t)\,\varphi'\right]r'^{(s+t)}. \qquad (48)$$

Отсюда следует, что разность $s - t$ должна быть целым числом, а сумма $s + t > 1/2$. Если s и t — полуцелые, то $s - t$ и $s + t$ — целые числа и должно выполняться условие $s + t > 0$. На первом этапе решения можно отказаться и от этого требования, а затем, если полученные волновые функции принадлежат вырожденному уровню, построить их линейные комбинации, которые обращаются в нуль в нужных точках. Но ликвидировать точки ветвления путем линейной комбинации неоднозначных функций нельзя.

Тогда искомая функция должна иметь вид

$$\psi(x, y) = T(z_-)\prod_{i=1}^{N}(z_+ - \zeta_{i+})^{-\frac{a_i+\alpha_i}{2}} \times$$
$$\times (z_- - \zeta_{i-})^{\kappa_i + \frac{a_i - \alpha_i}{2}}, \text{ где } \kappa_i \ge \theta\left(\frac{1}{2} - \alpha_i\right), \qquad (49)$$

а $T(z_-)$ — произвольная целая функция, которая может быть представлена в виде конечной или бесконечной сходящейся суммы по степеням z_-. Поэтому в качестве полной системы собственных функций основного состояния на неограниченной плоскости могут быть выбраны функции ψ_k, которые определяются формулой (49) при $T_k(z_-) = z_-^k$ и минимальных целых κ_i. Степени z_-, рассматриваемые как функции (x,y) или (r,φ), т.е. $z_-^k = \exp(-ik\varphi)\, r^k$, ортогональны в круге любого радиуса, поэтому и функции ψ_k при фиксированном наборе целых неотрицательных чисел κ_i ортогональны с весом, а значит, линейно независимы. Собственные функции высших уровней можно получить из функций основного состояния с помощью действия степеней оператора $[\hat{P}_+ + 2i\hbar z_+/l^2]^s$. Действие оператора $\hat{P}_+$ на функцию вида (49) при $T_k(z_-) = z_-^k$ приводит к умножению ее на многочлен

$$\frac{2k}{z_-} + 2\sum_{i=1}^{N} \frac{\kappa_i - \alpha_i}{z_- - \zeta_{i-}}. \qquad (50)$$

Поэтому, чтобы при этом не нарушались требования к собственным функциям, необходимо действовать на линейные комбинации функций (49), которые получаются при умножении их на соответствующую степень полинома $\prod_{i=1}^{N} (z_{i-} - \zeta_{i-})$, т.е. увеличить на s величины κ_i, чтобы, действуя s раз повышающим оператором, не нарушить соответствия функции условиям в точках, где находятся струны.

Найденные собственные функции оператора энергии не являются собственными функциями оператора $\hat{R}^2$, и поэтому квантовое число k не связано непосредственно с определением расстояния центра орбиты от какой-либо точки. Поскольку оператор квадрата расстояния центра орбиты от начала координат или любой другой точки, как и в случае одной струны, коммутирует с гамильтонианом, то, в принципе, можно найти систему функций, которые будут собственными для обоих операторов. Однако в рассматриваемом случае это оказывается трудноразрешимой задачей.

Переходя к вопросу об особых состояниях, выберем начало координат в точке, через которую проходит одна из нецелочисленных струн. Будем искать решение в виде

$$\psi = \left[z_+^{S_+} z_-^{S_-} \prod_{i}^{N-1} (z_+ - \zeta_{i+})^{S_{i+}} (z_- - \zeta_{i-})^{S_{i-}} \right] \times$$
$$\times f(z_+, z_-) = V(z_+, z_-)\, f(u), \qquad (51)$$

где предполагается, что функция $u(z_+, z_-)$ — произведение сомножителей вида $(z_\pm - \zeta_{i\pm})$. Действие операторов $\hat{P}_\pm$ на ψ имеет вид

$$\hat{P}_\pm V f = -i\hbar \left[\nu_\pm(z_\mp) V f + V \frac{\partial u}{\partial z_\mp} f' \right], \qquad (52)$$

где

$$\nu_\pm = \sum_{i}^{N-1} \frac{2S_{i\mp} \mp (a_i + \alpha_i)}{z_\mp - \zeta_{i\mp}} + \frac{2S_\mp \mp (a + \alpha)}{z_\mp}. \qquad (53)$$

В точках (ζ_{i+}, ζ_{i-}), через которые проходят целочисленные струны $(\alpha_i = 0)$, возьмем $S_{i\pm} = \mp a_i/2$. Тогда слагаемые, соответствующие этим струнам, выпадут из сумм $\nu_\pm$. При этом функция ψ будет однозначной при обходе этих точек, но не будет обращаться в нуль на целочисленных струнах. Последнее условие удовлетворяется путем линейной комбинации вырожденных функций (см. (48) и ниже). Точки ветвления не могут быть устранены с помощью линейной комбинации неоднозначных функций. Поэтому пары показателей для точек, в которых находятся нецелочисленные струны, в том числе и для начала координат, могут быть в одном из двух вариантов:

$$\text{A)}\quad S_{i+} = -\frac{a_i + \alpha_i}{2},\quad S_{i-} = \kappa_i + \frac{a_i - \alpha_i}{2}; \qquad (54)$$

$$\text{B)}\quad S_{i+} = \kappa_i - \frac{a_i - \alpha_i}{2},\quad S_{i-} = \frac{a_i + \alpha_i}{2},$$

где $\kappa_i = \theta(1/2 - \alpha_i)$. Тогда каждой из нецелочисленных струн соответствует слагаемое вида $(\kappa_i \pm \alpha_i)/(z_\pm - \zeta_{i\pm})$ в одной из сумм.

Основное состояние последовательности особых состояний должно иметь энергию большую $\hbar\omega/2$, и при этом оператор $\hat{P}_-$, понижающий энергию, должен преобразовывать эту функцию так, что она перестает удовлетворять требованиям. Этим свойством обладает функция (51), если выбрать хотя бы одну пару показателей в виде B. Подставляя эту функцию в уравнение (46), после сокращения на V получаем

$$\nu_+\nu_- f + 2\nu_- \frac{\partial u}{\partial z_-} f' + 2\nu_+ \frac{\partial u}{\partial z_+} f' + 4\frac{\partial^2 u}{\partial z_- \partial z_+} f' +$$
$$+ 4\frac{\partial u}{\partial z_+}\frac{\partial u}{\partial z_-} f'' - 2\frac{z_+}{l^2}\nu_- f - 4\frac{z_+}{l^2}\frac{\partial u}{\partial z_+} f' =$$
$$= -\frac{2\mu}{\hbar^2}\left(E - \frac{\hbar\omega}{2}\right) f. \qquad (55)$$

Анализ этого уравнения показывает, что оно может иметь решение, только если кроме нецелочисленной струны в начале координат существует еще не более одной нецелочисленной струны в любой точке (ζ_{1+}, ζ_{1-}). Тогда, если положить

$$\nu_+ = 2\frac{\kappa_1 - \alpha_1}{z_- - \zeta_{1-}} = \frac{2\beta}{z_- - \zeta_{1-}},$$

$$\nu_- = 2\frac{\kappa_0 - \alpha_0}{z_+} = \frac{2\gamma}{z_+};\ u = \frac{z_+(z_- - \zeta_{1-})}{l^2}, \quad (56)$$

получим

$$\frac{\beta\gamma}{ul^2}f + \frac{\gamma}{l^2}f' + \frac{\beta}{l^2}f' + \frac{1}{l^2}f' + \frac{u}{l^2}f'' - \frac{\gamma}{l^2}f - \frac{u}{l^2}f' =$$

$$= -\frac{\mu}{2\hbar^2}\left(E - \frac{\hbar\omega}{2}\right)f, \quad (57)$$

$$u^2 f'' + u\left(\gamma + \beta + 1 - u\right)f' - \left[\left(-\frac{E}{\hbar\omega} + \frac{1}{2} + \gamma\right)u - \beta\gamma\right]f = 0.$$

Решения этого уравнения можно представить в виде

$$f = u^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \chi_k u^k, \quad (58)$$

где ν — корни определяющего уравнения

$$\nu^2 + \nu(\gamma + \beta) + \beta\gamma = 0. \quad (59)$$

Чтобы $f(x, y)$ было однозначной функцией, необходимо, чтобы хотя бы один из корней уравнения (59) был целочисленным. В общем случае это возможно при $\beta\gamma = 0$. Следовательно, особые состояния возможны, только если одна из всех струн будет нецелочисленной, а именно та струна, в которой было выбрано начало координат. При $\beta = 0$ и $\zeta_1 = 0$ уравнение (57) становится уравнением для вырожденной гипергеометрической функции и из граничных условий следует

$$f\left(\frac{z_+ z_-}{l^2}\right) = \Phi\left(-n, \gamma + 1;\ \frac{r^2}{l^2}\right) = L_n^\gamma\left(\frac{r^2}{l^2}\right),$$

$$E = \hbar\omega\left(n + \gamma + \frac{1}{2}\right). \quad (60)$$

Здесь n — любое натуральное число или нуль, поэтому спектр (60) описывает бесконечную эквидистантную последовательность. Нижайшее собственное значение этой последовательности не вырождено. Любому собственному значению с $n = N \neq 0$ соответствуют еще N собственных функций, которые получаются из каждого из состояний (60) с квантовыми числами $n = N - L$ $(0 < L \leq N)$ при действии на них оператора $(\hat{P}_+ + 2i\hbar z_+/l^2)^L$. Следовательно, каждый уровень вырожден с кратностью $n + 1$. Этим можно воспользоваться, чтобы получить линейные комбинации функций, принадлежащих одному уровню, которые обращаются в нуль во всех точках, где находятся целочисленные струны. Если имеются M целочисленных струн, то нижайшим уровнем, для которого этого можно добиться, является $(M + 1)$-кратно вырожденный (кроме случаев специального расположения струн, которые станут ясны из дальнейшего). Для этого необходимо составить из $(M + 1)$-ой функции линейную комбинацию, которая обращается в нуль в M точках $z_\pm = \zeta_{i\pm}$. Из полученной системы M линейных уравнений для коэффициентов комбинации можно однозначно выразить M коэффициентов через один из них, который затем определить из условия нормировки. Таким образом, если кроме одной нецелочисленной имеется M целочисленных струн, то, как бы они ни были расположены (кроме расположения, обращающего в нуль определитель соответствующей системы уравнений), спектр особых состояний описывается формулой (60) и начинается с $n = M$, причем нижайшее состояние не вырождено, а его собственная функция является определенной линейной комбинацией функций с $n = M$ и различными L $(0 < L \leq M)$.

Полученные точные результаты опровергают гипотезу, предложенную ранее автором (см. [1], стр. 148), и в некоторых случаях противоречат интуитивно ожидаемым результатам. Так, например, хотя нижайшее из особых состояний в случае одной нецелочисленной струны с $\alpha > 1/2$ (см. (2), (12)) локализовано вблизи нее в области с радиусом порядка $R_{00} + r_0 = l(\sqrt{\alpha + 1/2} + \sqrt{1/2})$, появление дополнительно хотя бы одной целочисленной струны на большом расстоянии от нецелочисленной делает существование этого состояния невозможным. Это следствие требования обращения волновой функции в нуль в точке, где находится целочисленная струна. Оно характерно для всех задач, где в отсутствие этого требования имеется дискретный спектр с невырожденным нижайшим состоянием. Например, в задаче о заряженной частице в поле притягивающего кулоновского центра основное состояние при обычных граничных условиях на большом расстоянии экспоненциально убывает, но условию обращения его в нуль в какой-либо удаленной точке удовлетворить невозможно. Причина не в том, что волновая функция основного состояния не может иметь нулей, как иногда считают. Функция основного состояния в трехмерной задаче с потенциалом $U = A/r^2 - B/r$ пропорциональна r^s, где $s = \sqrt{2mA/\hbar^2 + 1/4} - 1/2$ (см. [5], задача к § 36). Но требование точного обращения волновой функции в нуль в точке, нарушающей симметрию невозмущенной задачи, является очень сильным. Как показано в первом разделе этой работы, оно связано с природой магнитной струны. В отличие от нее δ-образный отталкивающий потенциал, как легко показать, допускает конечное значение волновой функции в точке, где он отличен от нуля, и приводит к тем меньшему сдвигу основного состояния, чем дальше он находится от центра. Еще более сильным возмущением является нецелочисленная струна. Как показано, включение одной такой струны, даже на расстоянии, значительно превышающем радиус локализации особых состояний, уничтожает все особые состояния из-за требования однозначности волновой функции при обходе по любому замкнутому контуру в области определения. Из-за этого в случае нескольких винтовых дислокаций особые состояния вообще невозможны, так как «магнитные потоки» в этом случае одинаковы для всех струн. Этот эффект, очевидно, сохранится и для соленоидов конечного радиуса.

Выводы

1. Показано, что постановка задачи о взаимодействии электрона с магнитной струной должна быть дополнена граничным условием: волновые функции при приближении к струне должны по модулю убывать быстрее, чем корень квадратный расстояния до струны.

2. Принимая эти граничные условия, в случае многих произвольно расположенных струн можно представить гамильтониан электрона в виде суммы энергии основного состояния и произведения двух сопряженных операторов. Результаты действия каждого из этих операторов на произвольную собственную функцию гамильтониана — также собственные функции гамильтониана, соответствующие увеличенному или уменьшенному на один квант собственным значениям, если только они удовлетворяют граничным условиям. Квант энергии определяется ларморовской частотой в однородном поле. Из этого следует, что спектр гамильтониана представляет собой одну или несколько эквидистантных последовательностей.

3. Получен общий вид функций основного состояния. Собственные функции, соответствующие другим собственным значениям главной (совпадающей со спектром в однородном поле) последовательности, могут быть получены действием соответствующих степеней оператора, повышающего энергию.

4. Показано, что дополнительная последовательность собственных значений может быть только одна. Она появляется тогда и только тогда, когда только одна из струн имеет магнитный поток не кратный удвоенному кванту потока. Сдвиг этой последовательности относительно основной составляет долю кванта энергии, равную положительной дробной части частного от деления магнитного потока струны на удвоенный квант потока. Нижайший уровень последовательности особых состояний сдвинут на эту величину от уровня главной последовательности, номер которого равен числу остальных струн.

5. Показано, что эти результаты не могут быть получены методом квазиклассического квантования, хотя соответствующая классическая задача имеет точное решение.

1. И. М. Дубровский, *Теория электронных явлений в деформированных кристаллах,* РИО ИМФ, Киев (1999).
2. В. К. Ткаченко, *ЖЭТФ* **77**, 1032 (1979).
3. С. В. Иорданский, А. Е. Кошелев, *ЖЭТФ* **91**, 326 (1986).
4. Р. Б. Лафлин, *УФН* **170**, 292 (2000).
5. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика. Нерелятивистская теория,* Физматиз, Москва (1963).
6. А. Мессиа, *Квантовая механика,* т. 1, Наука, Москва (1978).
7. Л. Шифф, *Квантовая механика,* Изд-во иностр. лит., Москва (1959).
8. Д. И. Блохинцев, *Основы квантовой механики,* Высшая школа, Москва (1961).
9. Г. Бейтмен и А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра,* Наука, Москва (1965).
10. M. H. Johnson and B. A. Lippman, *Phys. Rev.* **76**, 828 (1949).
11. A. Feldman and A. H. Kahn, *Phys. Rev.* **B1**, 4584 (1970).

Exact solution of the problem about an electron in a magnetic field consisting of uniform field and arbitrarily disposed magnetic strings parallel to it

I. M. Dubrovskii

It is shown that the requirements of finiteness, uniqueness, and definiteness of the wave function and the density of probability flux necessitate that as a string is approached the wave function of an electron should decrease modulo faster than the square root of the distance to the string (the infinitely thin sole-

noid with a finite magnetic flux is named a magnetic string). An energy spectrum of an electron is obtained. In the general case it coincides with that in the absence of strings. A general view of the eigenfunctions of the ground state is found. The eigen functions of the upper states can be obtained by acting on these functions with the operator that is derived too. In the case where there is only one string with a magnetic flux not multiple of the doubled quantum one, the energy spectrum displays yet another equidistant sequence of the eigenvalues. It is displaced from the common one by a fraction of the interval that equals the positive fractional part of the quotient of the magnetic flux by the doubled quantum. This sequence originates close to the level the number of which is equal to the quantity of other strings. The wave functions of these peculiar states are obtained.