

# Влияние мультипликативного шума на неравновесные свойства вихрей в слоистых сверхпроводниках

Т. С. Шапошникова

*Казанский научный центр, Казанский физико-технический институт им. Е. К. Завойского РАН  
ул. Сибирский тракт, 10/7, г. Казань, 420029, Россия  
E-mail: t\_shap@dionis.kfti.kcn.ru*

Статья поступила в редакцию 5 марта 2001 г.

Рассмотрены условия появления мультипликативного шума в вихревой системе сверхпроводников с ярко выраженной слоистостью. Построено стохастическое дифференциальное уравнение движения запиннигованного  $2D$ -вихря и найдено его стационарное решение. Определены области значений параметров этого уравнения, при которых в системе вихрей возможен стохастический фазовый переход. Предложена схема эксперимента для наблюдения такого перехода с помощью метода поглощения мощности переменного магнитного поля.

Розглянуто умови появи мультиплікативного шуму у вихреві системі надпровідників з ярко вираженою шаруватістю. Побудовано стохастичне диференціальне рівняння руху запіннігованого  $2D$ -вихора та знайдено його стаціонарне рішення. Визначено області значень параметрів цього рівняння, при яких в системі вихорів можливий стохастичний фазовий перехід. Надано схему експеримента для спостереження такого переходу за допомогою метода поглинання потужності змінного магнітного поля.

PACS: 74.72.-h, 74.60.Ge, 05.10.Gg

## Введение

Двумерный характер вихрей в высокотемпературных сверхпроводниках, имеющих ярко выраженную слоистую структуру [1], приводит к появлению многочисленных новых состояний на фазовой диаграмме по температуре и магнитному полю [2,3]. Исследования динамики вихрей в различных областях фазовой диаграммы ВТСП показали, что в большой области полей и температур эффективен объемный пиннинг, который определяется взаимодействием вихрей с неоднородностями материала, такими как кислородные вакансии, примесные атомы, границы двойников в монокристаллах и границы зерен в керамике. Эти «внутренние» центры пиннинга, а также центры пиннинга, созданные искусственно (например, центры пиннинга в виде колонн), имеют различные характерные размеры и энергии, а их количество можно варьировать в широких пределах.

Одной из важнейших характеристик сверхпроводника является критический ток, величина ко-

торого определяется, как правило, усредненным потенциалом пиннинга [4], а распределение токов по образцу — формой образца. Величина критического тока существенно зависит от температуры, так как рост температуры приводит к увеличению тепловых флуктуаций положения вихрей и к термоактивированному депиннингу [2,5,6]. Работы [7–10] посвящены влиянию тепловых флуктуаций положения вихрей на величину критического тока [8], положение линии депиннинга вихревой решетки [7,8], размерный переход в системе вихрей [9] и гистерезис модулированного микроволнового поглощения [10].

Рассмотрение тепловых флуктуаций проводится путем введения в уравнение движения случайной силы, зависящей от температуры (см., например, [8,11]). Эта сила имеет вид аддитивного белого шума, и учет ее приводит к тому, что положение вихря становится случайной величиной, характеризуемой стационарной плотностью вероятности положения вихря  $\rho_s(x)$  в окрестности точки  $x$  потенциальной ямы. В случае аддитивного шума положения экстремумов плотности вероятности  $x_m$

всегда совпадают с детерминированными стационарными положениями равновесия вихря [12], и усиление такого шума приводит лишь к размытию плотности вероятности в окрестности детерминированного положения равновесия. В сверхпроводнике, по которому пропускают ток, появляется также низкочастотный аддитивный шум [13], связанный с прыжками вихревых связок или с формированием лавин вихрей в образцах  $YBa_2Cu_3O_7$  [14–18] и  $Bi_2Sr_2CaCu_2O_8$  [19].

Мы хотим обратить внимание на то, что в сверхпроводниках возникает также мультипликативный шум, который в отличие от аддитивного может быть связан с флуктуациями параметров самого потенциала пиннинга или может иметь внешний источник. Известно [12], что если интенсивность мультипликативного шума превосходит некоторое пороговое значение, то функциональная зависимость  $\rho_s(x)$  может резко измениться, т.е. произойдет стохастический фазовый переход, при котором появятся новые экстремумы в стационарной плотности вероятности  $\rho_s(x)$ . Это означает, что, кроме дезорганизующего действия, которое оказывает на систему и аддитивный шум, мультипликативный шум может привести к возникновению новых состояний, индуцировать новые неравновесные фазовые переходы, т.е. приводить к ситуациям, в ко-

торых система уже «не приспосабливается» к усредненным характеристикам среды, а реагирует на изменения среды более активным образом. Например, некоторые системы с мультипликативным шумом обладают сверхчувствительностью к слабым переменным сигналам [20].

В настоящей работе рассмотрены условия, при которых в системе  $2D$ -вихрей слоистых сверхпроводников появляется мультипликативный шум, приводящий к стохастическому фазовому переходу, и обсуждены особенности поглощения высокочастотной мощности, связанные с появлением этого стохастического фазового перехода. Структура статьи имеет следующий вид. В первом разделе вводится и обсуждается стохастическое уравнение движения  $2D$ -вихря, запиннингованного на точечном центре пиннинга. Во втором разделе получено стационарное решение стохастического уравнения (т.е. выражение для  $\rho_s(x)$ ) и показано, что в некоторых случаях в системе закрепленных вихрей возможен стохастический фазовый переход. В третьем разделе обсуждаются основные результаты и предлагается схема эксперимента для наблюдения фазового перехода. В заключении даются основные выводы работы.

## 1. Постановка задачи. Модель

Рассмотрим сверхпроводник второго рода с ярко выраженной слоистостью, находящийся в смешанном состоянии. Известно, что при высоких температурах в сильных магнитных полях система вихрей в слоистых сверхпроводниках распадается на систему  $2D$ -вихрей (см., например, [2,3]). Предположим, что в сверхпроводниках существуют эффективные центры пиннинга, которые удерживают около себя лишь отдельные  $2D$ -вихри или их связки, а остальные вихри остаются свободными. Такая ситуация реализуется, по-видимому, в слоистых ВТСП в области фазовой диаграммы по температуре и магнитному полю, когда критический ток либо равен нулю, либо очень мал. Покажем, что при некоторых условиях взаимодействие запиннингованного  $2D$ -вихря со свободно флуктуирующими  $2D$ -вихрями можно описать мультипликативным шумом.

Рассмотрим такой  $2D$ -вихрь, закрепленный на точечном центре пиннинга. Пусть этот центр описывается простым параболическим потенциалом  $U_p(u)$  [21] (см. рис. 1,а)

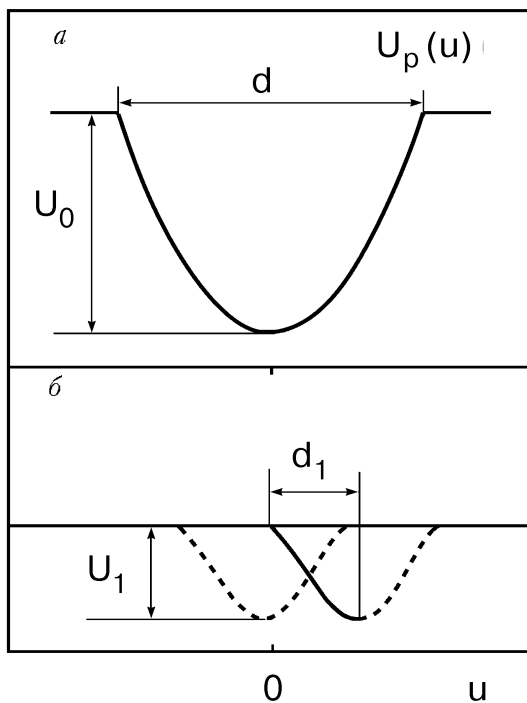


Рис. 1. Потенциалы, в которых колеблется запиннингованный  $2D$ -вихрь:  $U_p(u)$  – потенциал пиннинга (а); потенциал, описывающий взаимодействие закрепленного и незакрепленного  $2D$ -вихрей (б). (Его положение меняется случайным образом относительно  $U_p(u)$ . Показаны два из множества возможных положений вихря.)

$$U_p(u) = \begin{cases} \frac{4U_0}{d^2} u^2, & |u| \leq \frac{d}{2}, \\ U_0, & |u| > \frac{d}{2}. \end{cases} \quad (1)$$

где  $U_0$  — глубина потенциальной ямы, а  $d$  — ее пространственный размер. Известно [22], что  $U_0$  зависит от величины внешнего постоянного магнитного поля  $H$ . С понижением магнитного поля глубина потенциальной ямы возрастает. Например, в  $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_{8+x}$ , где пиннингующими центрами являются вакансии кислорода,  $U_0$  изменяется от 0,01 до 0,2 эВ [22]. Ширина ямы  $d$  имеет порядок нескольких длин когерентности и не зависит от величины внешнего поля.

Если по сверхпроводнику пропускать транспортный ток  $J$ , то уравнение движения  $2D$ -вихря в потенциале  $U_p$  под действием силы Лоренца  $\mathbf{F}_L = [\Phi_0 \times \mathbf{J}]$  будет иметь вид

$$\eta \dot{\mathbf{u}} = - \frac{\partial U_p(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} + \mathbf{F}_L, \quad (2)$$

где  $\mathbf{u}$  — смещение вихря от положения равновесия;  $\eta$  — вязкость  $2D$ -вихря [23,24];  $\Phi_0$  — квант магнитного потока.

Как следует из вида структуры сильно слоистых сверхпроводников, сверхпроводящие слои чередуются в них с несверхпроводящими прослойками [1], поэтому вихревая линия даже в области малых полей и низких температур состоит из  $2D$ -вихрей, связанных между собой джозефсоновскими контактами. С увеличением магнитного поля возрастает взаимодействие вихрей, расположенных в одной сверхпроводящей плоскости, и под действием различных флуктуаций линейный вихрь распадается на отдельные  $2D$ -вихри. Пусть запиннигованный  $2D$ -вихрь находится в  $n$ -й проводящей плоскости. Если в какой-то момент времени свободный вихрь из  $(n-1)$ -й или  $(n+1)$ -й плоскостей случайно окажется вблизи запиннигованного, то между свободным и зацепленным вихрями возникнет сила притяжения. Появление силы притяжения объясняется тем, что потенциальная энергия двух расположенных друг над другом  $2D$ -вихрей меньше, чем сумма потенциальных энергий изолированных вихрей. Потенциал парного взаимодействия  $U_{\text{int}}(u)$ , связанный с подвижным вихрем, можно представить участком кубической параболы, параметры которой подобраны таким образом, чтобы сила взаимодействия между вихрями была бы равна нулю при  $u = 0$ ,  $u = d_1$  (в центре ямы и на ее границе), а глубина ямы равнялась  $U_1 = kT_D$ , где  $T_D$  — температура, при которой линейный вихрь распадается на отдельные  $2D$ -вихри [3]. Тогда, если подвижный вихрь центрирован на расстоянии  $d_1$  от закрепленного вихря, то левую половину по-

тенсиальной ямы можно представить в виде (сплошная линия на рис. 1,б):

$$U_{\text{int}}(u) = \frac{U_1}{d_1^3} u^2(2u - 3d_1) \quad \text{при } 0 \leq u \leq d_1. \quad (3)$$

Правая половина потенциальной ямы симметрична относительно центра подвижного  $2D$ -вихря (см. рис. 1,б). Полуширина подвижной потенциальной ямы  $d_1$  имеет порядок размера вихря в плоскости  $ab$  ( $d_1 \sim \xi_{ab}$ , где  $\xi_{ab}$  — длина когерентности) [25], а нижнюю границу температуры  $T_D$  можно оценить как 30 К [3].

Поскольку положение свободного  $2D$ -вихря флуктуирует, положение потенциальной ямы  $U_{\text{int}}$  относительно центра пиннинга изменяется случайным образом. В дальнейшем будет рассмотрена упрощенная модель, в которой предполагается, что «свободный»  $2D$ -вихрь может занимать только два положения относительно закрепленного: над центром вихря (точка 0) и на расстоянии  $d_1$  от него, причем моменты времени, в которые происходит появление свободного вихря в точках 0 и  $d_1$ , определяются случайным образом. Тогда сила, действующая на закрепленный вихрь со стороны подвижного, будет иметь вид случайной силы:  $(-\partial U_{\text{int}}/\partial u)\zeta(t)$ , где  $\zeta(t)$  — шум. Предположим, что шум  $\zeta(t)$  является гауссовым белым шумом  $\xi_t$  со свойствами  $\langle \xi_t \rangle = 0$  и  $\langle \xi_t \xi_{t+\tau} \rangle = \delta(\tau)$ .

Тогда уравнение движения (2) примет вид

$$\eta |\dot{\mathbf{u}}| = |[\Phi_0 \times \mathbf{J}]| - \frac{8U_0}{d^2} u - \frac{6U_1}{d_1^3} u(u - d_1) \xi_t. \quad (4)$$

Следует отметить, что в рассматриваемой модели взаимодействия закрепленного и флуктуирующих  $2D$ -вихрей важно относительное движение потенциальных ям  $U_p(u)$  и  $U_{\text{int}}(u)$ , так что аддитивный шум, проявляющийся в случайном блуждании точки равновесия в яме  $U_p(u)$ , уже учитывается в данной модели, по крайней мере для блужданий на расстояниях порядка размера «подвижной» потенциальной ямы  $d_1$ . Вероятность же блужданий запиннигованного  $2D$ -вихря на расстояния большие  $d_1$  экспоненциально мала и ее можно не учитывать.

Оценим характерные масштабы времени изменения  $u(t)$  и  $\xi(t)$ . Время макроскопической эволюции системы к стационарному состоянию  $t_{\text{macro}}$  можно оценить как

$$t_{\text{macro}} = \frac{d^2 \eta}{8U_0}. \quad (5)$$

## 2. Решение уравнения

Для оценки возьмем, например, параметры, обычные для ВТСП материалов:  $U_0 \approx 0,1$  эВ,  $\eta(T=0) = 10^{-6}$  Н·с/м<sup>2</sup> и  $d \approx 200$  Å, т.е.  $t_{\text{macro}} \approx 10^{-10}$  с [26,27]. Мерой быстроты случайных флуктуаций свободных вихрей служит время корреляции  $t_{\text{corr}}$ , т.е. время, обратное частоте собственных колебаний свободного 2D-вихря [12]:

$$t_{\text{corr}} = \frac{a^2 \eta}{8U_a} \left( \frac{\xi_{ab}}{a} \right)^2, \quad (6)$$

где  $a$  — среднее расстояние между вихрями в одной  $\text{CuO}_2$ -плоскости ( $a \propto 1/\sqrt{B}$ ,  $B$  — индукция магнитного поля);  $U_a$  — средний потенциал, определяющий равновесное положение свободного вихря в окружении других вихрей ( $U_a \approx U_0(H_{\text{irr}})$ , где  $H_{\text{irr}}$  — поле необратимости);  $(\xi_{ab}/a)^2$  показывает относительную долю общего времени, в течение которого подвижный вихрь находится вблизи закрепленного и может взаимодействовать с ним (учитывая двумерный характер движения подвижного 2D-вихря). Для нашего случая  $t_{\text{corr}} < t_{\text{macro}}$  при  $U_0(H)/U_a < (d/\xi_{ab})^2$ , т.е. при  $a < 500$  Å или  $H > 1$  кЭ. В этих условиях среду можно считать быстро флуктуирующей.

Приведем уравнение (4) к безразмерному виду:

$$\frac{\partial x}{\partial \tau} = j - x + \sigma \left( \frac{1}{\alpha} - x \right) x \xi_\tau, \quad (7)$$

где

$$x = \frac{u}{d}; \quad \tau = \frac{t}{t_{\text{macro}}}; \quad j = \frac{t_{\text{macro}} F_L}{\eta d} = \frac{d F_L}{8U_0};$$

$$\alpha = \frac{d}{d_1}; \quad \beta = \frac{U_0}{U_1}; \quad \sigma = \frac{3\alpha^3}{4\beta} = \frac{3d^3 U_1}{4d_1^3 U_0};$$

$\sigma$  — амплитуда мультипликативного шума  $\xi_\tau$ , которая определяется отношением параметров потенциальной ямы пиннинга и подвижной ямы, описывающей взаимодействие запиннигованного 2D-вихря со свободными вихрями. С увеличением магнитного поля параметры подвижной ямы  $U_1$  и  $d_1$ , а также размер ямы пиннинга  $d$  не изменяются, но уменьшается глубина ямы пиннинга  $U_0$  [22], поэтому амплитуда шума растет. Уравнение (7) имеет вид стохастического дифференциального уравнения (СДУ) с мультипликативным белым шумом.

Прежде всего отметим, что уравнение (7) справедливо для  $0 \leq j < 1/\alpha$ , при этом случайный процесс развивается в области  $(0, 1/\alpha)$ . При  $-1/\alpha < j \leq 0$  случайный процесс развивается в области  $(-1/\alpha, 0)$  и для него можно построить СДУ, аналогичное (7), для чего достаточно в (7) заменить  $j$  на  $-j$  и  $1/\alpha$  на  $-1/\alpha$ . Это подтверждается характером границ случайного процесса  $b_1 = 0$  и  $b_2 = 1/\alpha$  (см. Приложение).

Стандартный метод решения СДУ — использование уравнения Фоккера—Планка [12]. Уравнение Фоккера—Планка для СДУ (7), понимаемого в смысле Стратоновича, для плотности вероятности  $\rho(x, \tau | x_0, 0)$  перехода случайного процесса  $x$  из состояния  $(x_0, \tau = 0)$  в состояние  $(x, \tau)$  имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \rho(x, \tau | x_0, 0) = \\ = - \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( f(x) + \frac{\sigma^2}{2} g'(x)g(x) \right) \rho(x, \tau | x_0, 0) \right] + \\ + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (g^2(x) \rho(x, \tau | x_0, 0)), \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$f(x) = j - x \text{ и } g(x) = \left( \frac{1}{\alpha} - x \right) x.$$

При нахождении стационарного решения уравнения (8) важно исследовать поведение зависимости  $\rho(x, \tau | x_0, 0)$  на границах случайного процесса. Как показано в Приложении, точка  $x = b_2 = 1/\alpha$  является естественной границей при  $j < 1/\alpha$  и поглощающей при  $j > 1/\alpha$ . Что же касается левой границы интервала  $x = b_1 = 0$ , то характер ее существенно меняется в зависимости от параметра  $j$ . При  $j = 0$  стационарная плотность вероятности не нормируется и имеет особенность в точке  $x = 0$  (см., например, [12]). При  $j \neq 0$  ( $j \geq 0$ ) граница  $x = 0$  становится естественной. Это означает, что при переходе от  $j > 0$  к  $j < 0$  плотность вероятности около точки  $x = 0$  за время  $t_{\text{macro}} = 10^{-10}$  с смещается из области  $x > 0$  в область  $x < 0$ . Итак, необходимо найти решение для стационарной плотности вероятности  $\rho_s(x)$  в границах  $0 < x \leq 1/\alpha$  и  $0 < j \leq 1/\alpha$  с нулевыми граничными условиями. Это решение имеет вид [12]

$$\rho_s(x) = \frac{N}{g(x)} \exp \left( \frac{2}{\sigma^2} \int \frac{f(u)}{g(u)^2} du \right) = \frac{N}{\left(\frac{1}{\alpha} - x\right)^{1 - \frac{2}{\sigma^2} \alpha^3 \left(\frac{1}{\alpha} - 2j\right)} x^{1 + \frac{2}{\sigma^2} \alpha^3 \left(\frac{1}{\alpha} - 2j\right)}} \exp \left\{ \frac{2}{\sigma^2} \left[ \frac{\alpha^2 \left(2x - \frac{1}{\alpha}\right)}{x \left(\frac{1}{\alpha} - x\right)} j - \frac{\alpha}{\left(\frac{1}{\alpha} - x\right)} \right] \right\}, \quad (9)$$

где  $N$  — нормировочный множитель.

Точки  $x_m$ , в которых наблюдаются экстремумы стационарной плотности вероятности  $\rho_s(x)$ , являются решениями следующего уравнения [12]:

$$f(x) = \frac{\sigma^2}{2} g(x) g'(x)$$

или

$$j - x = \frac{\sigma^2}{2} \left(\frac{1}{\alpha} - x\right) \left(\frac{1}{\alpha} - 2x\right) x. \quad (10)$$

Напомним, что в уравнении (10) левая сторона определяется динамической частью уравнения (7), а правая, пропорциональная  $\sigma^2$ , — стохастической. Появление корней в (10) удобно продемонстрировать путем графического решения этого уравнения. На рис. 2 показаны решения уравнения (10), определяемые по точкам пересечения линий, описываемых выражениями из правой и левой сторон равенства (10), при  $j = 0,025$  и трех

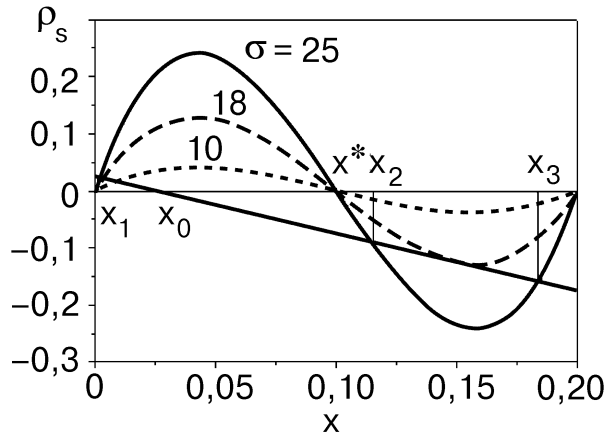


Рис. 2. Экстремумы стационарной плотности вероятности  $\rho_s(x)$  при трех значениях интенсивности шума  $\sigma$  — точки пересечения кривых и прямой  $(j-x)$  при  $j = 0,025$  и  $\alpha = 5$ :  $x_0 = j$  — единственное равновесное положение вихря (максимум  $\rho_s(x)$ ) в отсутствие шума;  $x_1$ ,  $x_2$  и  $x_3$  — экстремумы  $\rho_s(x)$  в случае, когда интенсивность шума  $\sigma = 25$  больше критического значения ( $\sigma > \sigma_{cr} = 18$ );  $x^*$  — точка, в которой  $g'(x) = 0$ .

различных значениях  $\sigma = 10, 18$  и  $25$ . На рисунке видно, что при  $\sigma > \sigma_{cr}(j) = 18$  имеется три экстремума  $\rho_s(x)$ , таким образом, рост мультипликативного шума приводит к стохастическому фазовому переходу. На рис. 3 показано изменение стационарной плотности вероятности  $\rho_s(x)$ , которое наблюдается при изменении интенсивности мультипликативного шума от  $\sigma = 1$  до  $\sigma = 85$  при  $\alpha = 5$  и  $j = 0,025$ . Видно, что с ростом шума  $\sigma > \sigma_{cr}$  максимумы функции  $\rho_s(x)$  смещаются к краям интервала  $[0, 1/\alpha]$  и происходит перераспределение плотности вероятности между этими максимумами (с ростом шума новое положение равновесия  $x_3$  становится более вероятным).

На рис. 4 показаны области значения параметров, входящих в уравнение (7), для которых стационарная плотность вероятности имеет три экстремума. Эти параметры:  $\alpha = d/d_1$  — отношение пространственных размеров двух ям;  $\beta = U_0/U_1$  — отношение энергий большой неподвижной  $U_0$  и малой подвижной  $U_1$  ям и  $j$  —

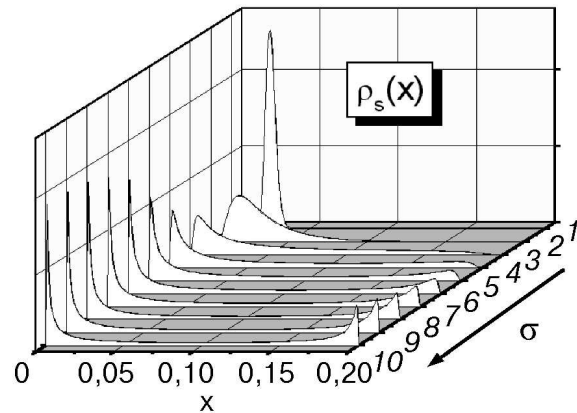


Рис. 3. Стационарная плотность вероятности  $\rho_s(x)$  для  $j = 0,025$ ,  $\alpha = 5$  и различных значений интенсивности мультипликативного шума  $\sigma$ : 1 (1), 5 (2), 15 (3), 25 (4), 35 (5), 45 (6), 55 (7), 65 (8), 75 (9) и 85 (10).

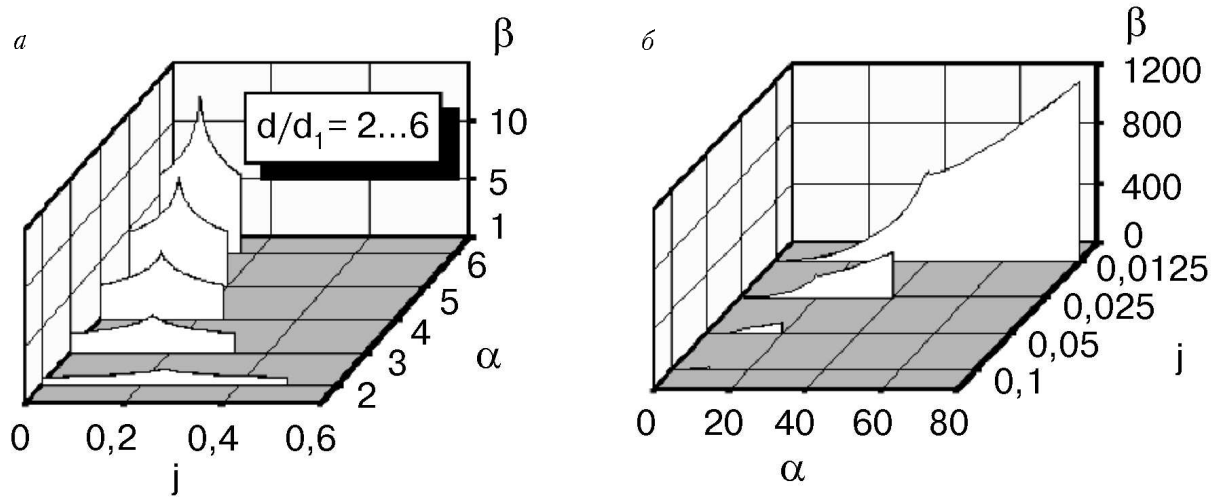


Рис. 4. Области значений (светлые) параметров  $j = (d/8)(F_L/U_0)$ ,  $\alpha = d/d_1$  и  $\beta = U_0/U_1$ , для которых стационарная плотность вероятности  $\rho_s(x)$  имеет три экстремума, т.е. существует два равновесных положения вихря: в плоскости  $j$ - $\beta$  при  $\alpha = 2, 3, 4, 5, 6$  (а); в плоскости  $\alpha$ - $\beta$  при  $j = 0,0125, 0,025, 0,05, 0,1$  (б).

плотность внешнего тока (безразмерная величина, определена в единицах  $j_0$ ).

### 3. Обсуждение результатов

В разд. 2 показано, что под действием мультипликативного шума в системе вихрей наблюдается стохастический фазовый переход, т.е. кроме одного равновесного состояния, которое существует в отсутствие шума, вблизи границы интервала  $b2$  появляется еще одно равновесное состояние. Причем с ростом мультипликативного шума это новое равновесное состояние становится более вероятным. Таким образом, мультипликативный шум вызывает значительное изменение плотности вероятности распределения вихря  $\rho_s(x)$  в потенциальной яме.

Как уже отмечалось в разд. 2, для исследуемой системы характерное время изменения  $t_{\text{macro}} \approx 10^{-10}$  с, а среднее время корреляций тепловых колебаний  $2D$ -вихрей  $t_{\text{corr}}$  на 1–2 порядка меньше. Поэтому любые внешние токи, наведенные внешним магнитным полем с частотой  $\omega$ , меньшей, чем  $1/t_{\text{macro}}$ , можно считать в данном случае постоянными. Это означает, что для каждого значения переменного магнитного поля  $h(t) = h_0 \exp(i\omega t)$  с  $\omega \ll 1/t_{\text{macro}}$  система успевает отрелаксировать к равновесному состоянию, определяемому функцией распределения стационарной плотности вероятности  $\rho_s(x)$ .

Рассмотрим динамику вихрей в слоистом сверхпроводнике, помещенном в переменное магнитное поле частотой порядка 10 МГц. Это поле индуцирует на поверхности сверхпроводника переменный ток, который вызывает колебания

вихрей. В области нормальной сердцевинки колеблющегося вихря происходит рассеяние куперовских пар, поэтому вихрь поглощает энергию переменного магнитного поля, причем поглощаемая мощность пропорциональна среднему квадрату смещению вихря  $\langle \Delta u^2 \rangle$  от положения локального равновесия (для свободных вихрей) или от центра пиннинга (для зацепленных) [22]. На вставке к рис. 5 показана зависимость величины  $I = \langle \Delta u^2 \rangle_\sigma / \langle \Delta u^2 \rangle_0$  от интенсивности мультипликативного шума  $\sigma$  для  $j = 0,025$ , где  $\langle \Delta u^2 \rangle_\sigma$  — среднее квадратичное смещение запиннированного вихря в присутствии мультипликативного шума, а  $\langle \Delta u^2 \rangle_0$  — смещение в случае  $\sigma = 0$ . Стрелкой отмечено значение интенсивности шума  $\sigma_{\text{cr}}$ , при котором наблюдается стохастический фазовый переход. Согласно общей теории стохастических фазовых переходов [12],  $\langle \Delta u^2 \rangle_\sigma$  не имеет особенностей в точке фазового перехода. На вставке к рис. 5 видно, что функция  $I(\sigma)$  действительно не имеет особенностей в этой точке, но при изменении интенсивности шума от значения  $\sigma \rightarrow 0$  до  $\sigma \gg \sigma_{\text{cr}}$  средний квадрат смещения вихря, а значит, и поглощаемая вихрем мощность, возрастает приблизительно в 20 раз.

Для обнаружения этого эффекта предлагается следующая схема эксперимента. Монокристаллический образец сильно слоистого высокотемпературного сверхпроводника охлаждается до температуры  $T < T_c$ , при которой эффективен объемный пиннинг (например,  $T < 35$  К для  $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_8$ ), и помещается в скрещенные магнитные поля: постоянное магнитное поле  $H > H_{2D} \gg H_{c1}$  ( $H_{2D}$  — поле, в котором линейный вихрь распадается на  $2D$ -вихри), параллель-

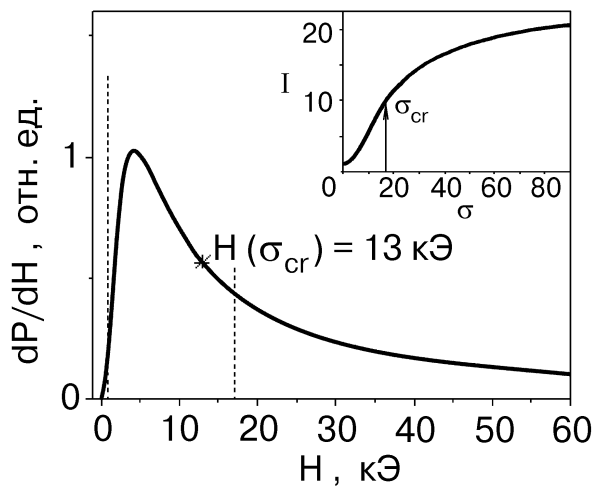


Рис. 5. Предсказываемая полевая зависимость  $\partial P/\partial H$ , где  $P$  — мощность переменного магнитного поля, поглощаемая системой  $2D$ -вихрей, на которые действует мультипликативный шум;  $H$  — постоянное магнитное поле. На вставке — зависимость величины  $I = \langle \Delta u^2 \rangle_\sigma / \langle \Delta u^2 \rangle_0$  от интенсивности мультипликативного шума  $\sigma$  при  $j = 0,025$  и  $\alpha = 5$ .

ное оси  $s$ , и переменное магнитное поле, перпендикулярное оси  $s$  и имеющее малую амплитуду  $h \ll H_{c1}$  и частоту  $\nu = 10$  МГц. Затем, при медленном увеличении постоянного поля до  $H > H_{\text{irr}}$ , проводится измерение мощности переменного поля  $P(H)$ , поглощаемой вихрями. На рис. 5 показана производная поглощаемой вихрями мощности по полю  $\partial P/\partial H$  как функция этого поля  $H$ , рассчитанная для сверхпроводника  $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_8$  с использованием следующих значений параметров:  $d = 200$  Å,  $d_1 = 40$  Å и  $U_1 = 30$  К =  $2,6 \cdot 10^{-3}$  эВ [3]. Параметры  $d$ ,  $d_1$  и  $U_1$  не зависят от поля  $H$ . Глубина ямы пиннинга имеет слабую полевою зависимость  $U_0 \approx 1/\sqrt{H}$  [28]. Тогда  $U_0/U_1 = A/\sqrt{H}$ , где  $A = 630$  и  $H$  измеряется в эрстедах. На рис. 5 видно, что зависимость  $\partial P/\partial H(H)$  является немонотонной. Поле, в котором  $\partial P/\partial H$  имеет максимум, меньше, чем поле, в котором происходит стохастический фазовый переход  $H(\sigma_{\text{cr}})$ . Пунктирными линиями на рисунке выделен интервал магнитных полей ( $1 \text{ кЭ} < H < 17 \text{ кЭ}$ ), в котором применима данная теория. В полях ниже  $1 \text{ кЭ}$  (левая штриховая линия) время корреляции случайных флуктуаций вихрей  $t_{\text{corr}}$  становится сравнимо с характерным временем эволюции вихря к стационарному состоянию в потенциале пиннинга  $t_{\text{macro}}$  и среду нельзя считать быстро флуктуирующей. В полях выше  $17 \text{ кЭ}$  (правая штриховая линия), по-видимому, будет происходить термоактивированный депин-

нинг вихрей, т.е. частота, с которой  $2D$ -вихри «выпрыгивают» из ямы пиннинга, будет сравнима с  $10$  МГц. Размер области, в которой применима данная теория, зависит от частоты переменного поля: чем ниже частота, тем уже область магнитных полей, в которых можно обнаружить существование стохастического фазового перехода по его влиянию на поглощение мощности переменного поля. Таким образом, можно предположить, что в области описанного нами стохастического фазового перехода будет наблюдаться немонотонная зависимость  $\partial P/\partial H$  (рис. 5).

Здесь важно отметить, что поглощение мощности переменного магнитного поля происходит как на закрепленных, так и на свободных  $2D$ -вихрях, причем поглощение на свободных вихрях пропорционально их числу, т.е. пропорционально  $H$ , так что немонотонная зависимость  $\partial P/\partial H$  будет наблюдаться на достаточно большом фоне  $\partial P/\partial H = \text{const}$  от свободных  $2D$ -вихрей. Однако с повышением частоты переменного поля  $\nu$  и уменьшением его мощности относительные вклады в сигнал  $\partial P/\partial H$  от свободных и связанных вихрей резко меняются: как видно на рис. 2, в условиях развитого стохастического фазового перехода, когда вероятность нахождения  $2D$ -вихря в окрестности точки  $x_3$  существенно увеличивается, положение этой точки слабо зависит от амплитуды переменного тока  $j$  и не зависит от частоты. Расчеты показывают, что при  $\nu = 500$  МГц и  $h \approx 0,01$  Э ( $h$  — амплитуда переменного поля) при условии, что число зацепленных  $2D$ -вихрей составляет приблизительно  $10\%$ , мощность, поглощаемая закрепленными  $2D$ -вихрями, может оказаться даже больше, чем мощность, поглощаемая подвижными вихрями.

Наконец, отметим, что форма потенциала  $U_p(u)$  в данной модели не важна, так как при  $d_1 \ll d$  ангармонические добавки к потенциалу (1) несущественны. Что касается формы потенциала  $U_{\text{int}}$ , то она также не очень важна. Как видно на рис. 2, положение корней  $x_1$ ,  $x_2$  и  $x_3$  несколько изменяется при изменении формы потенциала, однако ясно, что экстремумы  $x_2$  и  $x_3$  будут всегда справа от точки  $x = x^*$  (где  $g'(x^*) = 0$ ), так что главными характеристиками подвижной ямы являются ее глубина и пространственный размер.

## Заключение

Теоретически показано, что в сверхпроводниках II рода с ярко выраженной слоистостью может существовать мультипликативный шум, связанный с взаимодействием  $2D$ -вихрей, причем

рост интенсивности этого шума приводит к стохастическому фазовому переходу. Определены параметры, при которых возможен индуцированный шумом фазовый переход. Показано также, что появление мультипликативного шума приводит к немонотонной зависимости  $\partial P/\partial H$  от магнитного поля  $H$ .

Автор выражает благодарность Г. Б. Тейтельбауму за предложение темы исследования, обсуждение результатов и внимание. Автор благодарен Ю. И. Таланову за полезные обсуждения работы.

Работа выполнена при финансовой поддержке фонда НИОКР АН РТ (проект №14-64) и Минпромнауки России по госконтракту № 107-1(00)-П.

## Приложение

### Характер границ

Как показано в [12], характер границ стохастического процесса определяется поведением вблизи них переноса  $f(x)$  и диффузии  $g(x)$ . Классификация границ основана на интегрируемости некоторых функций  $L1(x)$  и  $L2(x)$ , составленных из  $g(x)$  и  $f(x)$ . Граница  $b$  является естественной, если

$$L1(b) = \int_{\beta}^b \varphi(x) dx = \infty, \quad (\text{П.1})$$

где

$$\varphi(x) = \exp \left( - \int_{\beta}^x \frac{2[f(z) + (\sigma^2/2) g'(z) g(z)]}{\sigma^2 g(z)^2} dz \right).$$

Для левой границы  $b1 = 0$  имеем

$$\varphi(x) \approx C \exp \left( \frac{2j\alpha^2}{\sigma^2 x} \right) |x|^{\frac{2\alpha^3}{\sigma^2} \left( \frac{1}{\alpha} - 2j \right) - 1}, \quad \text{где}$$

$$C = \text{const}. \quad (\text{П.2})$$

Из формулы (П.2) видно, что функциональная зависимость  $\varphi(x)$  имеет разный вид для  $j = 0$  и  $j > 0$ , поэтому характер данной границы зависит от  $j$ :

1.  $j = 0$ ,  $\varphi(x) \approx C |x|^{\frac{2\alpha^3}{\sigma^2} - 1}$ ,  $L1(b1) < \infty$  и  $L2(b1) = \infty$  [12], т.е. граница является притягивающей; а так как на этой границе и перенос и диффузия обращаются в нуль, то вся масса плот-

ности вероятности сосредоточена в этой точке. Поэтому независимо от величины интенсивности шума  $\sigma$  стационарная плотность вероятности  $\rho_s(x) = \delta(x)$ , где  $\delta(x)$  — дельта-функция Дирака.

2.  $j > 0$ ,  $L1(b1) \rightarrow \infty$ , поэтому граница  $b1$  является естественной, т.е. недостижимой.

Для того чтобы оценить характер правой границы  $b2 = 1/\alpha$ , разложим функции  $f(x)$  и  $g(x)$  в ряд по малому параметру  $y$ , где  $y = 1/\alpha - x$  и  $y \rightarrow 0$ . Тогда

$$\varphi(x) \approx \frac{C}{\left( \frac{1}{\alpha} - x \right)^{\frac{2\alpha^2}{\sigma^2} (1 - 2j\alpha) + 1}} \exp \left( \frac{2\alpha^2}{\sigma^2} \frac{1 - j\alpha}{1 - x\alpha} \right).$$

$x \rightarrow 1/\alpha$  (П.3)

Из выражения (П.3) видно, что для  $j < j_{\text{cr}} = 1/\alpha$   $L1(b2) = \infty$ , т.е. граница является естественной. Для  $j > j_{\text{cr}}$   $L1(b2) < \infty$  и  $L2(b2) = \infty$ , т.е. граница становится притягивающей. Это означает, что  $2D$ -вихрь покидает интервал  $(b1, b2)$  за конечное время, причем всегда через правую границу [12].

1. J. R. Clem, *Phys. Rev.* **B43**, 7837 (1991); Mark W. Coffey, *Phys. Rev.* **B51**, 15600 (1995).
2. G. Blatter, M. V. Feigel'man, V. B. Geshkenbein, A. I. Larkin, and V. M. Vinokur, *Rev. Mod. Phys.* **66**, 1147 (1994).
3. B. Horovitz and T. Ruth Goldin, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 1734 (1998).
4. B. Khaykovich, M. Konczykowski, E. Zeldov, R. A. Doyle, D. Mayer, P. H. Kes, and T. W. Zi, *Phys. Rev.* **B56**, R517 (1997).
5. E. H. Brandt, *Phys. Rev. Lett.* **63**, 1106 (1989).
6. L. I. Glazman and A. E. Koshelev, *Phys. Rev.* **B43**, 2835 (1991).
7. L. L. Daeman, L. N. Bulaevskii, M. P. Maley, and J. Y. Coulter, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 1167 (1993).
8. K. Yamafuji, T. Fujiyoshi, K. Toko, T. Matsuno, K. Kashio, and T. Matsushita, *Physica* **C212**, 424 (1993).
9. Y. Ando, S. Koniya, Y. Kotaka, and K. Kishio, *Phys. Rev.* **B52**, 3765 (1995).
10. T. Shaposhnikova, Yu. Vashakidze, R. Khasanov, and Yu. Talanov, *Physica* **C300**, 239 (1998).
11. B. Chen and J. Dong, *Phys. Rev.* **B44**, 10206 (1991).
12. В. Хорстемке, Р. Лефевр, *Индукцированные шумом переходы*, Мир, Москва (1987).
13. J. R. Clem, *Phys. Rev.* **B1**, 2140 (1970).
14. G. Jung, S. Vitale, J. Konopka, and M. Bonaldi, *J. Appl. Phys.* **70**, 5440 (1991).
15. H. Safar, P. L. Gammel, D. A. Huse, G. B. Alers, D. J. Bishop, W. C. Lee, J. Giapintzakis, and D. M. Ginsberg, *Phys. Rev.* **B52**, 6211 (1995).
16. G. D'Anna, P. L. Gammel, H. Safar, G. B. Alers, D. J. Bishop, J. Giapintzakis, and D. M. Ginsberg, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 3521 (1995).
17. R. Prozorov and D. Giller, *Phys. Rev.* **B59**, 14687 (1999).



18. K. E. Gray, *Phys. Rev.* **B57**, 5524 (1998); D. H. Kim, K. E. Gray, N. Jukam, D. J. Miller, Y. H. Kim, J. M. Lee, J. H. Park, and T. S. Hahn, *Phys. Rev.* **B60**, 3551 (1999).
19. T. Tsuboi, T. Hanaguri, and A. Maeda, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 4550 (1998).
20. С. Л. Гинзбург, М. А. Пустовойт, *Письма в ЖЭТФ* **64**, 592 (1998).
21. N.-C. Yeh, *Phys. Rev.* **B43**, 523 (1991).
22. M. J. Ferrari, M. Johnson, F. C. Wellstood, J. Clarke, D. Mitzi, P. A. Rosenthal, C. B. Eom, T. H. Geballe, A. Kapitulnik, and M. R. Beasley, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 72 (1990).
23. M. Golosovsky, M. Tsindlekht, and D. Davidov, *Supercond. Sci. Technol.* **9**, 1 (1996).
24. A. S. Mel'nikov, *Phys. Rev.* **B53**, 449 (1996); *Phys. Rev. Lett.* **77**, 2786 (1996).
25. T. Pe, M. Benkraouda, and John R. Clem, *Phys. Rev.* **B55**, 6636 (1997).
26. M. J. Ferrari, M. Johnson, F. C. Wellstood, J. Crarke, D. Mitzi, P. A. Rosenthal, C. B. Eom, T. H. Geballe, A. Kapitulnik, and M. R. Beasley, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 72 (1990).
27. S. L. Lee, M. Warden, H. Keller, J. W. Schneider, D. Zech, P. Zimmermann, R. Cubitt, E. M. Forgan, M. T. Wylie, P. H. Kes, T. W. Li, A. A. Menovsky, and Z. Tarnawski, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 922 (1995).

28. J. T. Kucera, T. P. Orlando, G. Virshup, and J. N. Eckstein, *Phys. Rev.* **B46**, 11004 (1992).

## The influence of multiplicative noise on nonequilibrium vortex properties in layered superconductors

T. S. Shaposhnikova

The conditions for multiplicative noise to occur in a vortex system of strongly layered superconductors are considered. A stochastic differential equation of a pinned 2D-vortex motion is constructed and its stationary solution is found. The values of the equation parameters are determined for which a stochastic phase transition of the vortex system is a possibility. A method of experimental observation of the transition by using the absorption of ac magnetic field is suggested.