

Амплитудный гистерезис поверхностного реактанса слоистого сверхпроводника

С.С. Апостолов^{1,2}, А.А. Божко³, З.А. Майзелис^{1,2}, М.А. Сорокина⁴, В.А. Ямпольский^{1,2}

¹*Институт радиофизики и электроники им. А.Я. Усикова НАН Украины
ул. Академика Проскуры, 12, г. Харьков, 61085, Украина
E-mail: yam@ire.kharkov.ua*

²*Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, пл. Свободы, 4, г. Харьков, 61022, Украина*

³*University of North Texas, 1155 Union Cir, Denton, TX 76203, USA*

⁴*Aston University, Birmingham B4 7ET, UK*

Статья поступила в редакцию 16 декабря 2015 г., опубликована онлайн 24 февраля 2016 г.

Предсказано и теоретически исследовано новое нелинейное электродинамическое явление, возникающее в пластине слоистого сверхпроводника при его одностороннем облучении плоской электромагнитной волной терагерцевого диапазона. Показано, что поверхностный реактанс образца и коэффициент отражения волны ведут себя гистерезисным образом при изменении амплитуды падающей волны. В работе также обсуждается аналогия между электродинамической задачей о распределении электромагнитного поля в сверхпроводнике и задачей о механическом движении частицы в центральном поле.

Передбачено та теоретично досліджено нове нелінійне електродинамічне явище, що виникає у пластині шаруватого надпровідника при його односторонньому опроміненні плоскою електромагнітною хвилею терагерцевого діапазону. Показано, що поверхневий реактанс зразка та коефіцієнт відбиття хвилі поводяться гістерезисним чином при зміні амплітуди падаючої хвилі. У роботі також обговорюється аналогія між електродинамічною задачею про розподіл електромагнітного поля в надпровіднику та задачею про механічний рух частинки у центральному полі.

PACS: 74.72.-h Купратные сверхпроводники;
74.50.+g Туннельные эффекты; эффекты Джозефсона;
74.78.Fk Мультислои, сверхрешетки, гетероструктуры;
74.25.Gz Оптические свойства.

Ключевые слова: слоистый сверхпроводник, джозефсоновская плазма, поверхностный реактанс.

1. Введение

Электродинамические свойства слоистых сверхпроводников продолжают привлекать внимание ученых во всем мире в связи с потенциальными возможностями их применения, в том числе, в астрономии, спектроскопии, химической и биологической идентификации (см., например, обзор [1] и ссылки в нем). Эксперименты [1–5] по исследованию проводимости монокристаллов высокотемпературных сверхпроводников $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_{8+\delta}$ оправдали использование модели, в которой считается, что очень тонкие сверхпроводящие слои CuO_2 электродинамически связаны между собой через более толстые слои диэлектрика внутренним эффектом Джозефсона.

Эта модель предсказывает формирование в слоистых сверхпроводниках специфического типа плазмы, так называемой джозефсоновской плазмы. Эта плазма оказывается сильно анизотропной не только по абсолютным значениям плотности тока вдоль и поперек слоев, но и по физической природе. Ток вдоль слоев имеет ту же природу, что и в обычных объемных сверхпроводниках, в то время как ток поперек слоев возникает вследствие эффекта Джозефсона. Этот джозефсоновский ток, направленный вдоль кристаллографической оси c сверхпроводника, связан с электромагнитным полем внутри слоя диэлектрика и приводит к формированию особого вида элементарных возбуждений — джозефсоновских плазменных волн [1]. Таким

образом, слоистая структура сверхпроводников поддерживает распространение электромагнитных волн.

Электродинамика слоистых сверхпроводников описывается нелинейными связанными уравнениями sin-Гордона [1,6–10]. Причина этой нелинейности обусловлена нелинейной связью $J \propto \sin \varphi$ между джозефсоновским током поперек слоев J и межслойной калибровочно-инвариантной разностью фаз φ параметра порядка. Как следствие, для слоистых сверхпроводников был предсказан ряд нетривиальных нелинейных явлений [11–19], таких как остановка света, эффекты самофокусировки и самоиндуцированной прозрачности, накачка более слабых волн более сильными и т.д. Более того, нелинейность может играть принципиальную роль в распространении джозефсоновских плазменных волн при частотах, близких к джозефсоновской плазменной частоте ω_J , даже в случае малых амплитуд, $|\varphi| \ll 1$, когда $\sin \varphi$ можно разложить в ряд до первого нелинейного слагаемого, $(\varphi - \varphi^3/6)$.

В работах [15,18] было изучено прохождение электромагнитных волн сквозь пластину слоистого сверхпроводника [15] конечных размеров, размещенную в волноводе [18]. Показано, что упомянутая выше нелинейность приводит к чувствительности коэффициентов прохождения к амплитуде волны так, что при определенных амплитудах падающей волны может наблюдаться полное прохождение волны сквозь образец. При этом образец слоистого сверхпроводника может стать прозрачным даже при частотах ниже джозефсоновской плазменной частоты, когда линейные волны не могут распространяться. Такая большая чувствительность коэффициента прохождения к амплитуде волны имеет простое физическое объяснение. Рассмотрим частоту волны ω , которая немного меньше, чем джозефсоновская плазменная частота ω_J . В этом случае линейные джозефсоновские плазменные волны не могут распространяться внутри слоистого сверхпроводника (см., например, [1]). Нелинейность приводит к эффективно снижению джозефсоновской плазменной частоты, как будет показано далее, см. уравнение (12), и, таким образом, нелинейные джозефсоновские плазменные волны достаточно высокой амплитуды могут распространяться в сверхпроводнике. Следовательно, характеристики слоистого сверхпроводника оказываются чувствительными к амплитуде падающей волны. Этот эффект может проявляться при трансформации поляризации падающей волны [19].

Наряду с уменьшением амплитуды отраженная волна испытывает сдвиг фазы α , который определяет поверхностный реактанс пластины X ,

$$X = X_0 \operatorname{tg} \left(\frac{\alpha}{2} \right), \quad X_0 = \frac{4\pi}{c} \cos \theta, \quad (1)$$

где θ — угол падения и c — скорость света. В настоящей работе мы предсказываем и теоретически изучаем

гистерезисное поведение поверхностного реактанса пластины слоистого сверхпроводника при изменении амплитуды монохроматической плоской волны, падающей на нее с одной стороны. Показано, что поверхностный реактанс зависит не только от частоты волны и угла падения, но и от амплитуды волны. Если частота ω падающей волны близка к джозефсоновской плазменной частоте ω_J , поверхностный реактанс может варьироваться в широком диапазоне. Это изменение сопровождается изменением коэффициента отражения от почти единицы до нуля. Отметим, что ранее в работах [16,17] изучалась амплитудная гистерезисная зависимость поверхностного реактанса слоистого сверхпроводника при двустороннем симметричном облучении образца электромагнитными волнами.

Статья построена следующим образом. Во втором разделе сформулирована задача и представлены основные уравнения для электромагнитных полей в системе. В третьем разделе коэффициент отражения R и поверхностный реактанс X образца выражены через амплитуду падающей волны и проанализирована эта зависимость в двух случаях: когда частота ω падающей волны больше или меньше джозефсоновской плазменной частоты ω_J . В обоих случаях изучались гистерезисные особенности этих зависимостей. В четвертом разделе обсуждены интересные аналогии между задачами о распространении электромагнитных волн в слоистом сверхпроводнике и о механическом движении фиктивной частицы в центральном поле.

2. Пространственное распределение электромагнитного поля

2.1. Геометрия задачи

Рассмотрим пластину слоистого сверхпроводника толщиной D , в которой сверхпроводящие слои толщиной s чередуются с диэлектрическими слоями значительно большей толщиной $d \gg s$ (см. рис. 1). Мы пред-

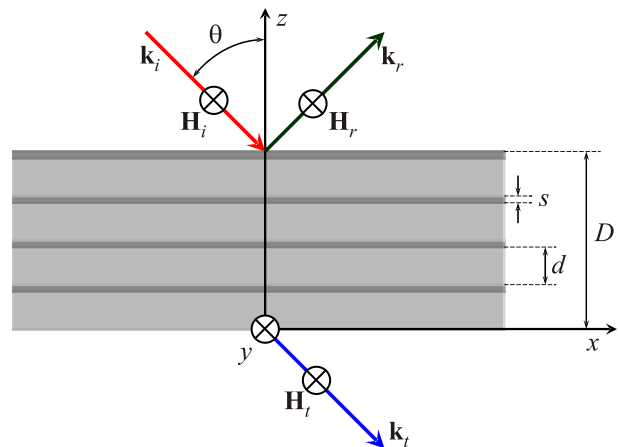


Рис. 1. Геометрия задачи. Пластины слоистого сверхпроводника облучают с одной стороны волной ТМ поляризации.

полагаем, что количество слоев достаточно велико, и при этом пространственный период структуры много меньше характерных длин волн в сверхпроводнике. Это позволяет перейти к континуальному пределу при описании полей в сверхпроводнике. Система координат выбрана таким образом, что кристаллографическая **ab**-плоскость совпадает с плоскостью xy , а ось **c** совпадает с осью z . Плоскости $z = 0$ соответствует нижняя поверхность пластины.

Пусть на верхнюю поверхность пластины падает плоская монохроматическая электромагнитная волна ТМ поляризации, т.е. магнитное поле волны считается параллельным поверхности пластины,

$$\mathbf{E} = \{E_x, 0, E_z\}, \quad \mathbf{H} = \{0, H, 0\}. \quad (2)$$

Эта волна частично отражается и частично проходит сквозь пластину. Угол падения θ считается не близким к нулю и $\pi/2$, так что обе ненулевые компоненты волнового вектора $\mathbf{k}_i = \{k_x, 0, -k_z\}$ порядка ω/c , где ω — частота волны.

2.2. Электромагнитное поле в вакууме

Магнитное поле H^+ в верхнем вакуумном полупространстве ($z > D$) может быть представлено в виде суммы падающей и отраженной волн с амплитудами H_i и H_r соответственно. Поле H^- в вакуумном полупространстве под образцом ($z < 0$) соответствует прошедшей волне с амплитудой H_t . Эти поля могут быть записаны в следующем виде:

$$H^+ = H_i \cos[k_x x - \omega t - k_z(z - D)] + H_r \cos[k_x x - \omega t + k_z(z - D) + \alpha], \quad (3)$$

$$H^- = H_t \cos(k_x x - \omega t - k_z z + \beta), \quad (4)$$

$$k_x = \frac{\omega}{c} \sin \theta, \quad k_z = \frac{\omega}{c} \cos \theta, \quad (5)$$

α и β — сдвиги фаз отраженной и прошедшей волн. С помощью уравнений Максвелла можно получить x -компоненты электрического поля в вакууме:

$$E_x^+ = -H_i \cos \theta \cos[k_x x - \omega t - k_z(z - D)] + H_r \cos \theta \cos[k_x x - \omega t + k_z(z - D) + \alpha], \quad (6)$$

$$E_x^- = -H_t \cos \theta \cos(k_x x - \omega t - k_z z + \beta). \quad (7)$$

2.3. Электромагнитное поле в слоистом сверхпроводнике

Электромагнитные поля внутри пластины слоистого сверхпроводника определяются распределением калибровочно-инвариантной разности фаз $\varphi(x, z, t)$ параметра порядка (см., например, [1]),

$$\frac{\partial H^s}{\partial x} = \frac{\mathcal{H}_0}{\lambda_c} \left(\frac{1}{\omega_J^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \sin \varphi \right), \quad E_x^s = -\frac{\lambda_{ab}^2}{c} \frac{\partial^2 H^s}{\partial z \partial t}. \quad (8)$$

Здесь $\mathcal{H}_0 = \Phi_0/2\pi d\lambda_c$, $\Phi_0 = \pi\hbar/e$ — квант магнитного потока, λ_{ab} и $\lambda_c = c/\omega_J\epsilon^{1/2}$ — лондоновские глубины проникновения поперек и вдоль слоев соответственно. Джозефсоновская плазменная частота определяется как

$$\omega_J = \sqrt{\frac{8\pi e d J_c}{\hbar \epsilon}}, \quad (9)$$

где J_c — критическая плотность джозефсоновского тока, ϵ — диэлектрическая проницаемость диэлектрических слоев в слоистом сверхпроводнике. Мы опускаем релаксационные слагаемые, потому что при достаточно низких температурах они не играют существенной роли в рассматриваемых здесь явлениях.

Разность фаз φ подчиняется системе связанных уравнений \sin -Гордона, которые в континуальном пределе (см., например, [1]) сводятся к уравнению

$$\left(1 - \lambda_{ab}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left[\frac{1}{\omega_J^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \sin \varphi \right] - \lambda_c^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0. \quad (10)$$

В настоящей работе исследуется случай слабой нелинейности, когда плотность джозефсоновского тока $J_c \sin \varphi$ можно разложить в ряд по малой φ до третьего порядка, $J_c \sin \varphi \approx J_c(\varphi - \varphi^3/6)$. Мы считаем, что частота ω близка к ω_J , и вводим безразмерную частоту,

$$\Omega = \omega / \omega_J, \quad (11)$$

близкую к единице. В этом случае, несмотря на слабость нелинейности в уравнении (10), линейные члены почти компенсируют друг друга, и член φ^3 играет решающую роль в этой задаче. Более того, когда частота ω близка к джозефсоновской плазменной частоте ω_J , можно пренебречь генерацией высших гармоник [11,13].

Следует также отметить, что нелинейность обеспечивает эффективное снижение ω_J . Действительно, выражение в квадратных скобках в уравнении (10) может быть представлено в виде $[(\omega_J^{\text{eff}})^{-2} \partial^2 \varphi / \partial t^2 + \varphi]$, где

$$\omega_J^{\text{eff}} \approx \omega_J \left(1 - \frac{\varphi^2}{12} \right). \quad (12)$$

Для не очень малых φ частота падающей волны может оказаться больше эффективной джозефсоновской плазменной частоты ω_J^{eff} и, следовательно, нелинейные джозефсоновские плазменные волны могут распространяться.

Обратим внимание на то, что z -компонента электрического поля вызывает нарушение электронейтральности сверхпроводящих слоев, что приводит к возникновению дополнительной связи электромагнит-

ных полей между соседними слоями (к так называемой емкостной связи). Такая связь существенно влияет на свойства продольных джозефсоновских плазменных волн с волновыми векторами, перпендикулярными слоям. Дисперсионное уравнение для линейных волн с произвольным направлением волнового вектора и учетом емкостной связи было получено в работе [20]. В нашей задаче эта связь не влияет существенно на свойства джозефсоновских плазменных волн из-за малости параметра емкостной связи, $R_D^2 \epsilon / sd \ll 1$, где R_D — дебаевский радиус для зарядов в сверхпроводнике.

Мы будем искать решение уравнения (10) в виде волны, бегущей вдоль оси x ,

$$\varphi(x, z, t) = a(z) |1 - \Omega^2|^{1/2} \sin[k_x x - \omega t + \eta(z)], \quad (13)$$

с зависящими от z амплитудой a и фазой η . Введем безразмерную координату поперек слоев ζ и нормированную толщину образца δ ,

$$\zeta = \frac{\kappa z}{\lambda_{ab}}, \quad \delta = \frac{\kappa D}{\lambda_{ab}}, \quad \kappa = \frac{\Omega \sin \theta}{\epsilon^{1/2} |1 - \Omega^2|^{1/2}}. \quad (14)$$

Подставляя разность фаз φ , определяемую выражением (13), в уравнение (10), получаем два дифференциальных уравнения для функций $\eta(\zeta)$ и $a(\zeta)$,

$$\eta'(\zeta) = \frac{L}{h^2(\zeta)}, \quad (15)$$

$$h''(\zeta) = a(\zeta) + \frac{L^2}{h^3(\zeta)} + \frac{h(\zeta)}{\kappa^2}. \quad (16)$$

где L — постоянная интегрирования, штрих обозначает производную по ζ , и

$$h(\zeta) = -\sigma a(\zeta) - \frac{a^3(\zeta)}{8}, \quad \sigma = \text{sign}(\Omega - 1). \quad (17)$$

Уравнения (13)–(17) позволяют вычислить распределение разности фаз $\varphi(x, z, t)$, а затем, используя уравнения (8), электромагнитного поля внутри пластины слоистого сверхпроводника.

3. Нелинейный отклик пластины слоистого сверхпроводника

3.1. Основные уравнения

В этом разделе изучается зависимость коэффициента отражения R и поверхностного реактанса X пластины слоистого сверхпроводника от амплитуды падающей волны. Запишем выражения для магнитного поля H^s и x -компоненты электрического поля E_x^s внутри пластины с помощью уравнений (8) и (13):

$$H^s = -\mathcal{H}_0 \frac{|1 - \Omega^2|}{\kappa} h(\zeta) \cos[k_x x - \omega t + \eta(\zeta)], \quad (18)$$

$$E_x^s = \mathcal{H}_0 \Gamma \frac{|1 - \Omega^2| \cos \theta}{\kappa} [h(\zeta) \sin(k_x x - \omega t + \eta(\zeta))]'.$$

Здесь мы ввели параметр

$$\Gamma = \frac{\lambda_{ab} \kappa}{\lambda_c \sqrt{\epsilon} \cos \theta}.$$

Обратим внимание на то, что $\Gamma \ll \kappa$ вследствие сильной анизотропии слоистого сверхпроводника, $\lambda_{ab} \ll \lambda_c$.

Теперь, приравнявая магнитные поля и x -компоненты электрического поля на обеих границах, $z = 0$ и $z = D$, в вакууме и в слоистом сверхпроводнике, мы можем найти неизвестные амплитуды отраженной и прошедшей волн. Используя выражения (18) для полей в слоистом сверхпроводнике и уравнения (3), (4), (6) и (7) для полей в вакууме, получим следующие три уравнения для амплитуд $a(0)$, $a(\delta)$ и их производных на обеих поверхностях слоистого сверхпроводника:

$$[h(\delta) + \frac{\Gamma L}{h(\delta)}]^2 + \Gamma^2 [h'(\delta)]^2 = 4h_i^2, \quad (19)$$

$$h^2(0) = \Gamma L, \quad (20)$$

$$a'(0) = 0. \quad (21)$$

Здесь h_i — нормированная амплитуда падающей волны,

$$h_i = \frac{H_i}{\mathcal{H}_0} \frac{\kappa}{|1 - \Omega^2|}. \quad (22)$$

Три граничных условия (19), (20) и (21) совместно с уравнением (16) определяют постоянную интегрирования L и пространственное распределение магнитного поля $h(\zeta)$ внутри слоистого сверхпроводника для любой амплитуды h_i падающей волны. Важно отметить, что константа L определяет непосредственно коэффициент отражения R пластины слоистого сверхпроводника. Действительно, в соответствии с уравнением (20) имеем

$$R = 1 - \frac{h_t^2}{h_i^2} = 1 - \frac{h^2(0)}{h_i^2} = 1 - \frac{\Gamma L}{h_i^2}, \quad (23)$$

где h_t — нормированная амплитуда прошедшей волны, определяемая аналогично уравнению (22). Поверхностный реактанс X может быть вычислен следующим образом:

$$X = X_0 \frac{1 - \sqrt{1 - S^2}}{S}, \quad S = \frac{\Gamma h(\delta) h'(\delta)}{2h_i^2 \sqrt{R}}. \quad (24)$$

Нелинейность уравнений (16) и (17) приводит к многозначным зависимостям поверхностного реактанса X и коэффициента отражения R от амплитуды h_i падающей волны. В следующих разделах мы проанализируем эти зависимости для двух случаев: отрицательной, $\sigma = -1$, и положительной, $\sigma = 1$, отстройки частоты.

3.2. Отклик пластины сверхпроводника при $\omega < \omega_J$

Начнем со случая, когда частота падающей волны меньше, чем джозефсоновская плазменная частота. Для этого диапазона частот линейные джозефсоновские плазменные волны не могут распространяться в слоистом сверхпроводнике. В результате скин-эффекта коэффициент прозрачности пластины экспоненциально мал. Тем не менее нелинейность способствует распространению волн из-за эффективного уменьшения джозефсоновской плазменной частоты.

Решая уравнение (16) с граничными условиями (19), (20) и (21), можно найти постоянную L и значения h и h' на верхней границе пластины, а затем вычислить коэффициент отражения R и реактанс X согласно выражениям (23) и (24) соответственно. На рис. 2 представлены результаты численного расчета зависимости $X(h_i)/X_0$ и $R(h_i)$.

Для анализа этих зависимостей рассмотрим также пространственное распределение калибровочно-инвариантной разности фаз φ параметра порядка и фазовые траектории $a'(a)$. Кривые $a'(a)$ представлены на рис. 3. Увеличение пространственной координаты ζ поперек слоев от нуля до δ соответствует движению вдоль траектории $a'(a)$. Точка $\zeta = 0$ (нижний край пластины) соответствует начальной точке на фазовой траектории.

Согласно уравнению (21), все фазовые траектории начинаются в точках, где $a'(\zeta = 0) = 0$. Различные тра-

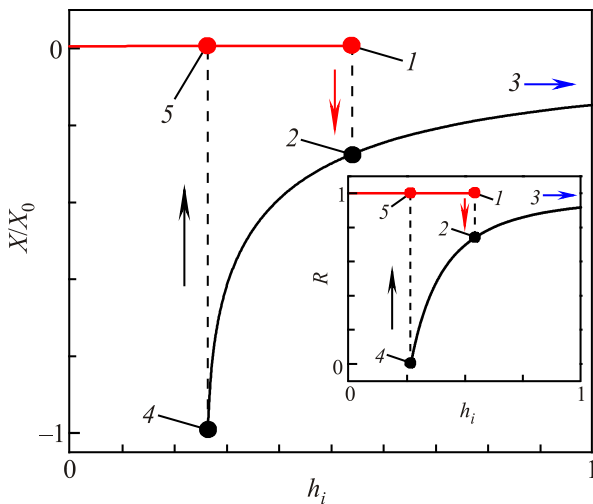


Рис. 2. Зависимость поверхностного реактанса X (главная панель), нормированного на значение X_0 , и коэффициент отражения R (вставка) от нормированной амплитуды h_i магнитного поля падающей волны, см. уравнения (1), (22), (23) и (24), для отрицательной отстройки частоты: $\Omega - 1 = -4 \cdot 10^{-3}$. Вертикальные стрелки показывают гистерезисные скачки при изменении h_i . Номера точек на кривых соответствуют номерам фазовых траекторий $a'(a)$, показанных на рис. 3. Значения параметров: толщина пластины $D = 4000 \text{ \AA}$, $\lambda_c = 4 \cdot 10^{-3} \text{ см}$, $\lambda_{ab} = 2000 \text{ \AA}$, $\omega_J/2\pi = 0,3 \text{ ТГц}$ и $\theta = 45^\circ$.

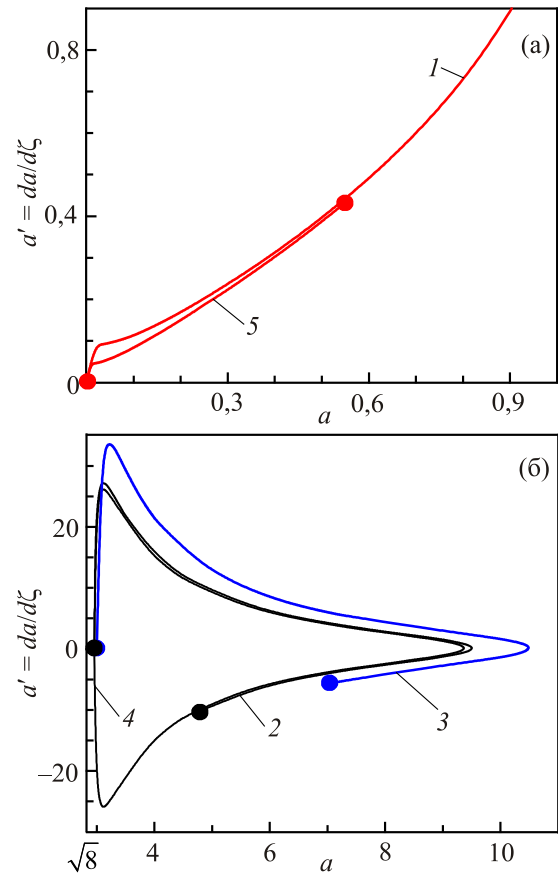


Рис. 3. Фазовые траектории $a'(a)$ для отрицательной отстройки частоты $\Omega - 1 = -4 \cdot 10^{-3}$. Номера фазовых траекторий соответствуют номерам точек на рис. 2. Движение вдоль траекторий от точек с $a' = 0$ соответствует росту пространственной координаты ζ поперек слоев от нуля до δ : область вблизи точки $(a = 0, a' = 0)$ (а), область $a > \sqrt{8}$ (б). Остальные параметры такие же, как для рис. 2.

ектории на (a, a') -плоскости определяются значениями $a(\zeta = 0) = a_0$ в начальной точке. Согласно уравнениям (17) и (20), значение a_0 определяет константу L , а затем вся траектория определяется уравнением (16). Наконец, уравнение (19) позволяет связать a_0 со значением амплитуды h_i . Таким образом, зависимости $X(h_i)$ и $R(h_i)$ определяются параметром a_0 .

Низкоамплитудная (квазилинейная) ветвь зависимости $R(h_i)$ расположена в конечном интервале амплитуд падающих волн, $h_i < (8/27)^{1/2}$. Для малых амплитуд, $h_i \ll 1$, мы имеем дело с линейной задачей, когда разность фаз φ и электромагнитное поле в сверхпроводнике можно найти в виде линейной комбинации экспоненциальных функций от z . В этом случае реактанс X и коэффициент отражения R можно найти асимптотически. Если пластина сверхпроводника не слишком тонкая, $\delta \gg \Gamma$, то

$$X(h_i \ll 1) = \frac{\tilde{\Gamma} X_0}{\text{th} \tilde{\delta}}, \quad R(h_i \ll 1) = 1 - \frac{4\tilde{\Gamma}^2}{\text{sh}^2 \tilde{\delta}}, \quad (25)$$

здесь $\tilde{\delta} = \delta\sqrt{1+\kappa^{-2}}$ и $\tilde{\Gamma} = \Gamma\sqrt{1+\kappa^{-2}}$. В данном предельном случае фаза отраженной волны близка к фазе падающей, реактанс практически равен нулю, а коэффициент отражения мало отличается от единицы. Это связано с тем, что при отрицательной отстройке частоты линейные волны в пластине не распространяются.

Фазовые траектории, соответствующие низкоамплитудным решениям, занимают область $a < \sqrt{8/3}$. Для малых h_i эти траектории близки к точке ($a = 0, a' = 0$) (в качестве примера такой траектории см. кривую 5 на рис. 3(а)). Увеличение амплитуды h_i приводит к росту длины фазовой траектории, и ее конец стремится к ($a = \sqrt{8/3}, a' = \infty$), когда $h_i \rightarrow \sqrt{8/27}$ (см. кривую 1 на рис. 3(а)).

На высокоамплитудной ветви зависимости $X(h_i)$ (нижняя кривая на рис. 2) фаза отраженной волны, а с ней и реактанс, и коэффициент отражения, существенно зависят от амплитуды падающей волны. Этой ветви соответствуют решения с $a(\zeta) > \sqrt{8}$. Такие решения описывают нелинейные джоузефсоновские плазменные волны, которые могут распространяться в слоистом сверхпроводнике даже при отрицательной отстройке частоты, $\Omega < 1$. Соответствующие фазовые траектории — замкнутые кривые (см. кривую 4 рис. 3(б)) или участки замкнутых кривых (например, кривые 2 и 3).

По сравнению с квазилинейными решениями осциллирующий характер высокоамплитудных решений приводит к существенному изменению значений поверхностного реактанса. Как видно на рис. 2, реактанс изменяется в широком диапазоне, от нуля до $-X_0$, в зависимости от амплитуды h_i падающей волны. Важно отметить, что длины нелинейных волн в сверхпроводнике сильно зависят от h_i . Таким образом, изменением h_i можно контролировать соотношение между длиной волны и толщиной пластины. Более того, коэффициент отражения также чувствителен к этому отношению, и можно достичь полного отсутствия отраженного поля, выбрав оптимальное значение $h_{i,\min}$ амплитуды h_i . Для не очень толстых пластин, $\delta \lesssim 1$, полное прохождение наблюдается при $h_{i,\min} = \sqrt{2}\Gamma\delta$. Фаза отраженной волны вблизи $h_{i,\min}$ отстает на $\pi/2$ от падающей, а нормированный поверхностный реактанс стремится к минус единице.

Для того чтобы получить аналитическое описание высокоамплитудной ветви, мы изучим два случая: $h_i \approx h_{i,\min}$ и $h_i \gg 1$. В первом случае соответствующие фазовые траектории представляют собой почти полные циклы. Амплитудные зависимости поверхностного реактанса и коэффициента отражения могут быть найдены асимптотически для не очень толстых пластин, $\delta \lesssim 1$, и представлены в следующем виде:

$$X(h_i) = -X_0 \sqrt{\frac{1 - \sqrt{R(h_i)}}{1 + \sqrt{R(h_i)}}}, \quad (26)$$

$$R(h_i) = 1 - \left(\frac{h_{i,\min}}{h_i} + \frac{2\Gamma}{\delta} \sqrt{1 - \frac{h_{i,\min}^2}{h_i^2}} \right)^2. \quad (27)$$

Во втором случае, когда $h_i \gg 1$ или $a_0 \ll 1$, асимптотическое выражение для коэффициента отражения имеет вид

$$R(h_i) = 1 - \frac{4\Gamma^2}{\delta^2}. \quad (28)$$

Видно, что последняя асимптотика может быть получена из уравнения (27) формальной подстановкой $h_i \rightarrow \infty$ в нем. Таким образом, уравнение (27) можно рассматривать как интерполяционную формулу для всей высокоамплитудной ветви зависимости $R(h_i)$.

В предельном случае $h_i \gg 1$ реактанс $X(h_i)$ может быть описан уравнением (26), в котором знак « \leftarrow » перед X_0 заменен на « \rightarrow ». В промежуточной области h_i реактанс изменяет знак, когда амплитуда падающей волны достигает $h_{i,0} \approx \delta^2/\sqrt{2}$. При достаточно больших толщинах, $\delta \gg 1$, значение $h_{i,0}$ соответствует большим амплитудам и мы можем использовать уравнение (26) со знаком « \leftarrow » почти для всей высокоамплитудной ветви зависимости $X(h_i)$. Заметим, что на рис. 2 изображена именно такая ситуация, поскольку $\delta \approx 3,9$.

Нетривиальная особенность зависимости $X(h_i)$ — ее гистерезисное поведение со скачками. Пусть амплитуда h_i падающей волны увеличивается от нуля. В этом случае реактанс близок к нулю и медленно увеличивается, следуя низкоамплитудной ветви (см. рис. 2). Когда амплитуда достигает критического значения $\sqrt{8/27}$ (точка 1), дальнейшее движение по квазилинейной ветви становится невозможным и происходит скачок в точку 2 на высокоамплитудную ветвь. Дальнейшее увеличение амплитуды h_i приводит к монотонному увеличению поверхностного реактанса X . Для достаточно больших амплитуд h_i (см. точки 2 и 3), толщина образца D меньше, чем половина длины волны. В этом случае изменение координаты ζ в интервале $0 < \zeta < \delta$ соответствует движению вдоль участка замкнутой фазовой траектории (см. траектории 2 и 3 на рис. 3(б)).

Пусть теперь амплитуда h_i падающей волны уменьшается. При этом длина нелинейной волны в сверхпроводнике растет, а движение по фазовой траектории приближается к полностью замкнутой траектории. Реактанс $X(h_i)$ проходит точку 2 и продолжает движение вдоль высокоамплитудной ветви. Наконец, для определенного значения $h_i = h_{i,\min}$ длина волны становится равной толщине образца, траектория составляет полный цикл, а реактанс принимает минимальное значение $-X_0$, и коэффициент отражения становится равным нулю (см. траекторию 4 на рис. 3(а) и точку 4 на рис. 2). Дальнейшее движение по высокоамплитудной ветви невозможно, и происходит скачок на низкоамплитудную ветвь.

Следует отметить, что скачок с низкоамплитудной (где наблюдается почти полное отражение, $R \sim 1$) на высокоамплитудную ветвь (с меньшим коэффициентом отражения) можно наблюдать также и при изменении частоты волны ω при постоянной амплитуде H_i падающей волны. Этот скачок происходит, когда отстройка частоты $(1 - \Omega)$ становится равной пороговому значению

$$1 - \Omega_{cr} = \frac{3}{4} \left(\lambda_c k_x \frac{H_i}{\mathcal{H}_0} \right)^{2/3}.$$

3.3. Отклик пластины сверхпроводника при $\omega > \omega_J$

Сейчас мы переходим к изучению амплитудной зависимости поверхностного реактанса и коэффициента отражения пластины слоистого сверхпроводника для частот выше джозефсоновской плазменной частоты. В отличие от случая $\Omega < 1$, даже линейные джозефсоновские плазменные волны могут распространяться в слоистом сверхпроводнике при $\Omega > 1$. Таким образом, пластина не является почти непрозрачной, и коэффициент отражения может изменяться в широком диапазоне в зависимости от соотношения между длиной волны и толщиной пластины даже при $h_i \ll 1$. Асимптотически получаем

$$X(h_i \ll 1) = X_0 \frac{\sqrt{1 + 4\tilde{\Gamma}^2 \text{tg}^{-2} \tilde{\delta} - 1}}{2\tilde{\Gamma} \text{tg}^{-1} \tilde{\delta}}, \quad (29)$$

$$R(h_i \ll 1) = (1 + 4\tilde{\Gamma}^2 \sin^{-2} \tilde{\delta})^{-1}.$$

В нелинейном случае изменением амплитуды h_i можно контролировать соотношение между длиной нелинейной волны и толщиной пластины и, таким образом, изменять значения реактанса и коэффициента отражения. На рис. 4 показаны зависимости $R(h_i)$ и $X(h_i)$ для различных положительных отстроек частоты, а на рис. 5 представлены соответствующие фазовые траектории.

Анализ, основанный на уравнениях (16)–(24), показывает, что зависимости $R(h_i)$ и $X(h_i)$ обратимы, когда отстройка частоты больше некоторого порогового значения. Примеры таких обратимых зависимостей представлены на рис. 4(б). Гистерезис зависимостей $R(h_i)$ и $X(h_i)$ появляется при частоте меньшей, чем пороговое значение:

$$\omega < \omega_{thr} \approx \omega_J + \left(\frac{D\sqrt{\varepsilon} \sin \theta}{\sqrt{2\pi\lambda_{ab}}} \right)^2 \omega_J. \quad (30)$$

В этом случае коэффициент отражения, так же, как и для отрицательных отстроек частоты, может достигать нулевого значения, когда амплитуда падающей волны h_i сначала увеличилась, а затем произошел перескок на высокоамплитудную ветвь (см. сплошную кривую и вставку

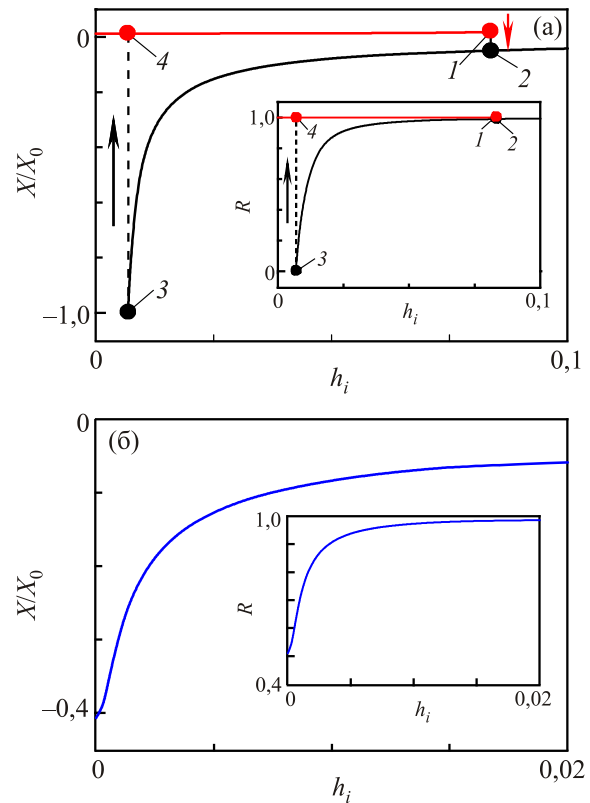


Рис. 4. Зависимость нормированного реактанса X/X_0 (основные панели) и коэффициента отражения R (вставки) от амплитуды h_i падающей волны для различных положительных значений отстройки частоты: $\Omega - 1 = 10^{-2}$, или $\tilde{\delta}/\pi = 1,03$ (а); $\Omega - 1 = 1,2 \cdot 10^{-2}$, или $\tilde{\delta}/\pi = 0,94$ (б). Стрелки показывают изменение реактанса и коэффициента отражения при изменении h_i . Толщина образца составляет $D = 4 \cdot 10^{-5}$ см, а другие параметры такие же, как на рис. 2.

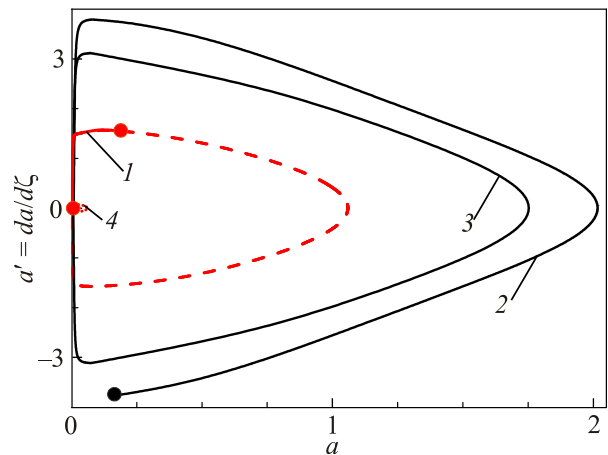


Рис. 5. Фазовые траектории $a'(a)$ для положительной отстройки частоты $\Omega - 1 = 10^{-2}$. Номера кривых соответствуют номерам точек на рис. 4(а). Сплошными линиями показаны участки фазовых траекторий, соответствующие $0 < \zeta < \delta$. Нижние и верхние границы пластины соответствуют кружкам на концах траекторий. Остальные параметры такие же, как для рис. 2.

на рис. 4). Асимптотическое значение $h_{i,\min}$ амплитуды h_i падающей волны, когда пластина сверхпроводника становится абсолютно прозрачной ($R = 0$), имеет вид

$$h_{i,\min} \approx \frac{\Gamma\delta^2}{\sqrt{3}I^2}, \quad I = \frac{2}{3} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^{4/3}}} \approx 1,1981. \quad (31)$$

Следует отметить, что причины гистерезиса для положительной ($\Omega > 1$) и отрицательной ($\Omega < 1$) отстройки частоты различны. Этот вопрос более подробно изучается в следующем разделе.

4. Механическая аналогия

Задача, обсуждаемая в этой статье, имеет глубокую и очень интересную механическую аналогию. Действительно, уравнения (15) и (16) описывают движение фиктивной частицы с единичной массой в центральном поле. В этой аналогии пространственная координата ζ поперек слоев сверхпроводника, амплитуда $h(\zeta)$ и фаза $\eta(\zeta)$ магнитного поля (взяты при $x = 0$ и $t = 0$) играют роль времени, радиальной координаты и полярного угла частицы соответственно. В этом разделе мы будем подразумевать, что $h(\zeta)$ положительная величина. В случае отрицательных значений $h(\zeta)$ мы будем добавлять π к фазе $\eta(\zeta)$ и менять знак $h(\zeta)$ на положительный. Кроме того, постоянную L в уравнениях (15) и (16) можно трактовать как сохраняющийся момент импульса частицы.

Интегрируя уравнение (16) для радиального движения частицы, получим закон сохранения энергии,

$$\frac{(h')^2}{2} + U_{\text{eff}}(h) = \mathcal{E}, \quad (32)$$

с эффективной потенциальной энергией

$$U_{\text{eff}}(h) = \frac{L^2}{2h^2} + \frac{h^2}{2\kappa} - \int a(\tilde{h})d\tilde{h}. \quad (33)$$

Первое слагаемое в уравнении (32) описывает кинетическую энергию радиального движения частицы, \mathcal{E} — полная энергия частицы. Первое слагаемое в правой части уравнения (33) представляет собой центробежную энергию и два последних члена представляют потенциал центрального поля.

График зависимости $U_{\text{eff}}(h)$ показан на рис. 6 для случая отрицательной отстройки частоты ($\Omega < 1$). Эта зависимость является трехзначной и соответствует трем ветвям функции $a(h)$, см. уравнение (17). Таким образом, неоднозначность зависимости $a(h)$ приводит к многозначности эффективного потенциала $U_{\text{eff}}(h)$ и, следовательно, существует несколько возможностей для движения частицы. С точки зрения рассматриваемой нами электродинамической задачи это означает, что в сверхпроводнике может возникнуть несколько различных распределений поля при одной и той же амплитуде h_i падающей волны.

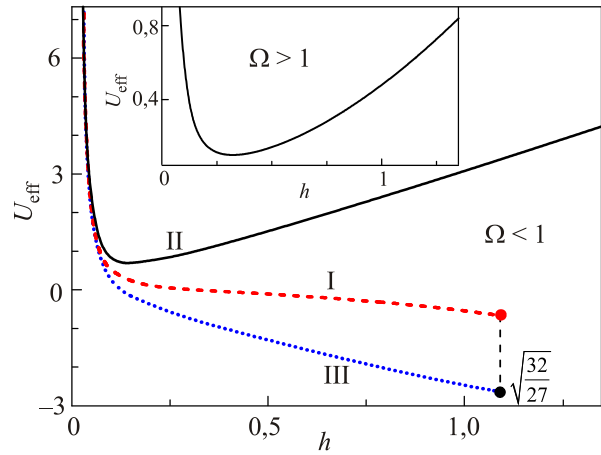


Рис. 6. Зависимость эффективного потенциала U_{eff} , определяемого уравнением (33), от радиальной координаты h . Движение частицы в этом потенциале представляет собой механическую аналогию для пространственного распределения магнитного поля в сверхпроводнике. На основной панели изображены кривые I, II и III, которые соответствуют трем ветвям зависимости $a(h)$ для случая отрицательной отстройки частоты, $\Omega < 1$. На вставке показана кривая $U_{\text{eff}}(h)$ для противоположного случая, $\Omega > 1$, когда зависимость $a(h)$ имеет только одну ветвь. Параметр $L = 0,1$.

Потенциал, описываемый кривой I на рис. 6, соответствует низкоамплитудным решениям электродинамической задачи. Радиальная координата частицы в этом потенциале изменяется монотонно, что соответствует монотонному уменьшению поля при движении в глубь сверхпроводника. Согласно уравнению (21), точка останова частицы ($h' = 0$) соответствует нижней границе сверхпроводника.

Поскольку кривая I заканчивается в точке $h = \sqrt{32/27}$, она не может определять движение частицы при более высоких h . В этом случае частица движется в потенциале, описываемом кривой II на рис. 6. Это движение финитное и периодическое и соответствует высокоамплитудным решениям электродинамической задачи. Кривая III на рис. 6 представляет собой ветвь зависимости $U_{\text{eff}}(h)$, которая не может быть реализована при изменении амплитуды h_i падающей волны и не показана на рис. 2 (этот участок соединяет точки 1 и 4).

На рис. 7 представлена траектория частицы. Эта траектория состоит из трех частей: пунктирная окружность радиуса $h_i = h_i\sqrt{1-R}$ при $\zeta < 0$ (нижнее вакуумное полупространство в электродинамической задаче); специфическая сплошная кривая при $0 < \zeta < \delta$ (пластина слоистого сверхпроводника); штриховой эллипс с большой полуосью $h_i\sqrt{1+R}$ и коэффициентом сжатия $(1-\sqrt{R})/(1+\sqrt{R})$ при $\zeta > \delta$ (верхнее вакуумное полупространство).

Важно отметить, что траектория непрерывна, но на ней имеются точки разворота, соответствующие гра-

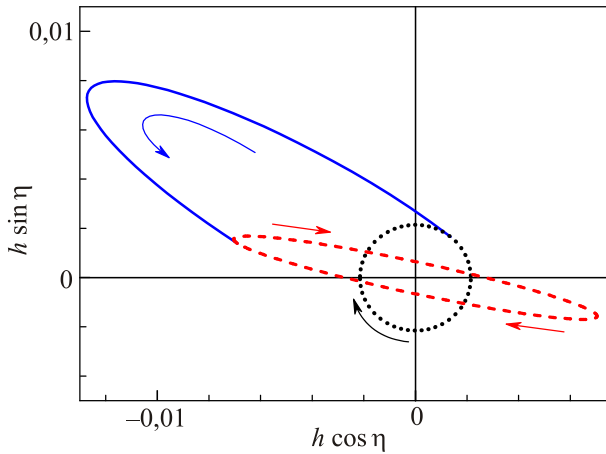


Рис. 7. Траектория фиктивной частицы, состоящая из трех частей, которые соответствуют трем интервалам «времени» ζ : нижнее вакуумное полупространство, $\zeta < 0$ (пунктирная линия); пластина слоистого сверхпроводника, $0 < \zeta < \delta$ (сплошная линия), верхнее вакуумное полупространство, $\zeta > \delta$ (штриховая линия). Стрелки указывают направление движения фиктивной частицы при увеличении «времени» ζ . Параметры: отрицательная отстройка частоты $\Omega - 1 = -2 \cdot 10^{-5}$, нормированная толщина $\delta = 0,18$, амплитуда поля падающей волны $h_i = 0,004$, другие параметры такие же, как на рис. 2.

ницам образца. Уравнения (19), (20) и (21) означают непрерывность магнитного поля H , и, таким образом, координата частицы меняется непрерывно. Тем не менее эти уравнения не требуют непрерывности скорости частицы. Действительно, в моменты «времени» $\zeta = 0$ и $\zeta = \delta$ (что соответствует поверхностям слоистого сверхпроводника) скорость изменяет свое направление, а ее величина испытывает скачок:

$$\frac{v(\zeta \rightarrow -0)}{v(\zeta \rightarrow +0)} = \frac{v(\zeta \rightarrow \delta+0)}{v(\zeta \rightarrow \delta-0)} = k_J k \lambda_{ab}^2, \quad (34)$$

где $k = \omega/c$ и $k_J = \omega_J/c$. Как уже упоминалось, момент импульса сохраняется при $0 < \zeta < \delta$ и равен L . При $\zeta \rightarrow -0$ и $\zeta \rightarrow \delta+0$ (в вакуумных полупространствах вблизи поверхности сверхпроводника) он равен $-Lk_J k \lambda_{ab}^2$, так что момент импульса испытывает скачки.

Теперь мы рассмотрим случай положительной отстройки частоты. Как видно на вставке к рис. 6, зависимость потенциала U_{eff} от радиальной координаты частицы h однозначна. Это связано с однозначностью зависимости $a(h)$ в уравнении (17). Тем не менее зависимость $X(h_i)$ может быть многозначной даже в этом случае (см. рис. 4). Чтобы пояснить это, рассмотрим следующую обратную задачу. Мы хотим определить амплитуду h_i падающей волны, которая необходима, чтобы в нижнем вакуумном полупространстве прошедшая волна имела заданную величину амплитуды h . Можно убедиться, что в рассматриваемом случае

зависимость $h_i(h)$ оказывается немонотонной, что соответствует неоднозначной зависимости $h_i(h_i)$. Поэтому зависимость $X(h_i)$ также оказывается многозначной. Однако эти зависимости немонотонны, если выполнено условие (30). В результате зависимость $X(h_i)$ оказывается многозначной. На рис. 8 представлено решение такой обратной задачи, соответствующей рис. 4.

5. Заключение

В настоящей работе описано новое нелинейное электродинамическое явление в слоистых сверхпроводниках. Показано, что поверхностный реактанс X пластины слоистого сверхпроводника и коэффициент отражения R чувствительны к амплитуде падающей волны вследствие нелинейности джозефсоновского тока вдоль кристаллографической оси c . В результате нелинейности с изменением амплитуды волны поверхностный реактанс и коэффициент отражения можно варьировать в широком диапазоне значений: X от 0 до

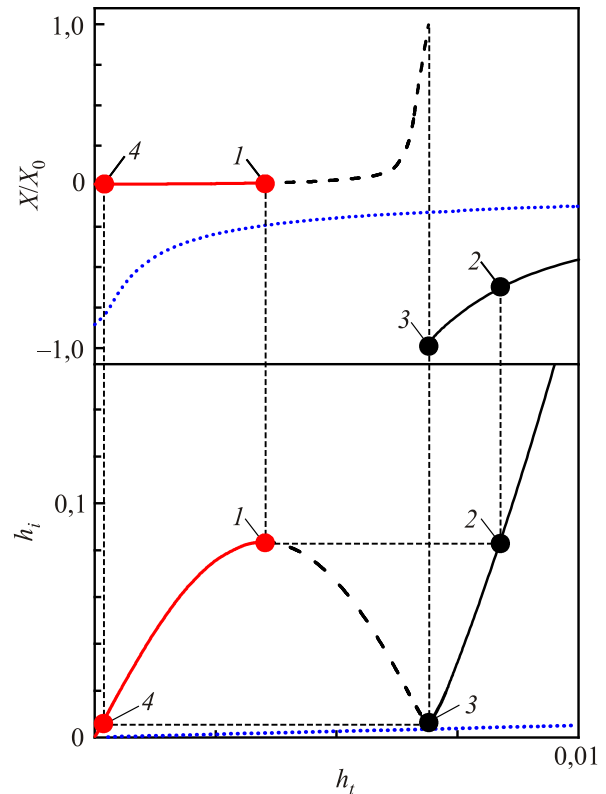


Рис. 8. Решение обратной задачи: зависимости амплитуды h_i падающей волны и нормированного реактанса X/X_0 от амплитуды h_t прошедшей волны. Значения параметров и номера вблизи указанных точек такие же, как на главной панели на рис. 4. Зависимости, нанесенные пунктирными линиями, монотонны, что приводит к однозначной зависимости $X(h_i)$ (рис. 4(б)). Сплошными и штриховыми кривыми показаны немонотонные зависимости $X(h_t)$ и $h_i(h_t)$, которые приводят к многозначной зависимости $X(h_i)$ (сплошная кривая на рис. 4(б)).

$-X_0 = -(4\pi/c)\cos\theta$, и R от почти 1 до 0. В работе рассмотрено два случая, когда частота падающей волны меньше и больше, чем джозефсоновская плазменная частота. Показано, что в обоих случаях наблюдается гистерезисное поведение амплитудных зависимостей поверхностного реактанса и коэффициента отражения, однако природа гистерезиса в этих двух случаях различна. Обнаружена аналогия между распределением электромагнитного поля в слоистом сверхпроводнике и механическим движением фиктивной частицы в центральном поле, где роль радиальной и угловой координат частицы играют амплитуда и фаза поля соответственно.

1. S. Savel'ev, V.A. Yampol'skii, A.L. Rakhmanov, and F. Nori, *Rep. Prog. Phys.* **73**, 026501 (2010).
2. R. Kleiner, F. Steinmeyer, G. Kunkel, and P. Müller, *Phys. Rev. Lett.* **68**, 2394 (1992).
3. R. Kleiner and P. Müller, *Phys. Rev. B* **49**, 1327 (1994).
4. E.H. Brandt, *Rep. Prog. Phys.* **58**, 1465 (1995).
5. V.L. Pokrovsky, *Phys. Rep.* **288**, 325 (1997).
6. S. Sakai, P. Bodin, and N.F. Pedersen, *J. Appl. Phys.* **73**, 2411 (1993).
7. S.N. Artemenko and S.V. Remizov, *JETP Lett.* **66**, 811 (1997).
8. S.N. Artemenko and S.V. Remizov, *Physica C* **362**, 200 (2001).
9. Ch. Helm, J. Keller, Ch. Peris, and A. Sergeev, *Physica C* **362**, 43 (2001).
10. Yu.H. Kim and J. Pokharel, *Physica C* **384**, 425 (2003).
11. S. Savel'ev, A.L. Rakhmanov, V.A. Yampol'skii, and F. Nori, *Nat. Phys.* **2**, 521 (2006).
12. S. Savel'ev, V.A. Yampol'skii, A.L. Rakhmanov, and F. Nori, *Phys. Rev. B* **75**, 184503 (2007).
13. V.A. Yampol'skii, S. Savel'ev, A.L. Rakhmanov, and F. Nori, *Phys. Rev. B* **78**, 024511 (2008).
14. V.A. Yampol'skii, S. Savel'ev, T.M. Slipchenko, A.L. Rakhmanov, and F. Nori, *Physica C* **468**, 499 (2008).
15. S.S. Apostolov, Z.A. Mayzelis, M.A. Sorokina, V.A. Yampol'skii, and F. Nori, *Phys. Rev. B* **82**, 144521 (2010).
16. V.A. Yampol'skii, T.M. Slipchenko, Z.A. Mayzelis, D.V. Kadygrob, S.S. Apostolov, S.E. Savel'ev, and F. Nori, *Phys. Rev. B* **78**, 184504 (2008).
17. С.С. Апостолов, Д.В. Кадыгроб, З.А. Майзелис, С.Е. Савельев, Т.М. Слипченко, В.А. Ямпольский, *ФНТ* **36**, 115 (2010) [*Low Temp. Phys.* **36**, 92 (2010)].
18. T.N. Rokhmanova, S.S. Apostolov, Z.A. Maizelis, V.A. Yampol'skii, and F. Nori, *Phys. Rev. B* **88**, 014506 (2013).
19. T.N. Rokhmanova, S.S. Apostolov, Z.A. Maizelis, V.A. Yampol'skii, and F. Nori, *Phys. Rev. B* **90**, 184503 (2014).
20. Ch. Helm and L.N. Bulaevskii, *Phys. Rev. B* **66**, 094514 (2002).

Amplitude hysteresis of the surface reactance of a layered superconductor

S.S. Apostolov, A.A. Bozhko, Z.A. Maizelis, M.A. Sorokina, and V.A. Yampol'skii

We predict and theoretically study a novel nonlinear electromagnetic phenomenon in a slab of layered superconductor being unilaterally irradiated by a plane electromagnetic wave of the terahertz range. It is shown that the surface reactance of the sample and the reflection coefficient have hysteresis behavior when changing the amplitude of the incident wave. Also, we discuss an analogy between the electrodynamic problem of the electromagnetic field distribution in the superconductor and the problem of the mechanical motion of a particle in a central-potential field.

PACS: **74.72.-h** Cuprate superconductors;
74.50.+r Tunneling phenomena; Josephson effects;
 74.78.Fk Multilayers, superlattices, heterostructures;
 74.25.Gz Optical properties.

Keywords: layered superconductor, Josephson plasma, surface reactance.