



УДК 681.3:519.711.3:517.958:621.313:669

**В. Ф. Евдокимов\***, чл.-кор. НАН Украины, **А. А. Кучаев\*\***, д-р техн. наук,  
**Е. И. Петрушенко\***, канд. техн. наук, **В. А. Кучаев\*\*\***

\* Ин-т проблем моделирования в энергетике им. Г. Е. Пухова НАН Украины,  
(Украина, 03115, Киев, ул. Генерала Наумова, 15,  
тел. 424-91-60, E-mail: ypetrushenko@mail.ru),

\*\*Физико-технологический ин-т металлов и сплавов НАН Украины,  
(Украина, 03680, Киев-142, ГСП, бульв. Вернадского, 34/1,  
тел. (044) 424-20-50, E-mail: alexander-kuchaev@svitonline.com),

\*\*\* Общество с ограниченной ответственностью «ЛАМИ»  
(Украина, Киев, E-mail: vitalku07@yandex.ru)

### Трёхмерная интегральная модель магнитного поля электромагнитного перемешивателя

Предложена трёхмерная интегральная модель вращающегося магнитного поля (ВМП) электромагнитного перемешивателя, построенная на основе разложения ВМП на три симметричные составляющие (СС). При моделировании первой СС применено векторное интегральное уравнение для плотности токов намагниченности, которое сводится к системе скалярных уравнений, преобразуемых с учетом симметрии первой СС относительно координатных плоскостей. Областью определения полученных интегральных уравнений является восьмая часть поверхности магнитопровода, лежащая в первом октанте.

Запропоновано тривимірну інтегральну модель обертового магнітного поля електромагнітного перемішувача, побудовану на основі розкладання обертового магнітного поля на три симетричні складові (СС). При моделюванні першої СС використано векторне інтегральне рівняння для щільності струмів намагніченості, яке зводиться до системи трьох скалярних рівнянь, перетворених з урахуванням симетрії першої СС щодо координатних площин. Областю визначення одержаних інтегральних рівнянь є восьма частина поверхні магнітопровода, яка лежить у першому октанті.

*К л ю ч е в ы е с л о в а:* электромагнитный перемешиватель, магнитное поле, интегральная модель.

В связи с внедрением энергосберегающих технологий, повышением производительности машин непрерывного литья заготовок (МНЛЗ) и качества заготовок возникает необходимость создания нового и улучшения конструкций существующего электротехнического оборудования, одним из видов которого являются электромагнитные перемешиватели (ЭМП) [1, 2]. К числу мер, позволяющих ускорить разработку ЭМП, относится применение математического моделирования в процессе их проектирования. Моделирование

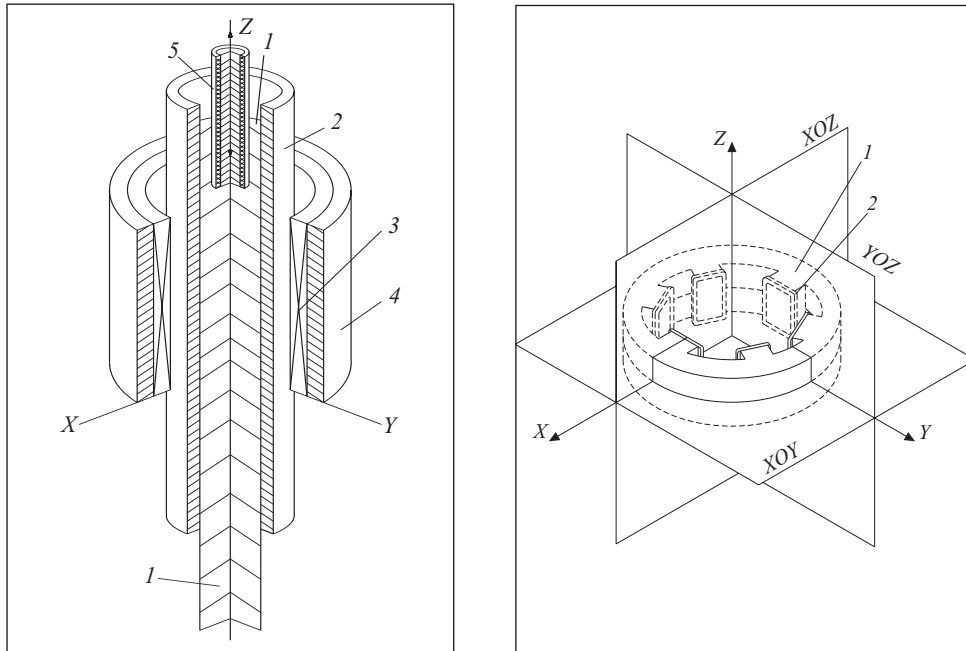


Рис. 1. Схема конструкции системы кристаллизатор МНЛЗ—ЭМП: 1 — заготовка круглого сечения; 2 — кристаллизатор; 3 — трехфазная обмотка ЭМП; 4 — магнитопровод; 5 — погружной сталеразливочный стакан

Рис. 2. Явнополюсный трехфазный ЭМП: 1 — магнитопровод, 2 — трехфазная обмотка электромагнита

позволяет разработчикам избежать не только громоздких расчетов, но и значительной части дорогостоящего физического эксперимента, заменив его математическим.

Конструктивные особенности ЭМП таковы, что электромагнитные, гидродинамические и тепловые поля в них являются существенно трехмерными [3]. Поэтому в основу пакета программ для расчетов ЭМП должны быть положены трехмерные системы уравнений Максвелла, Навье—Стокса и Фурье. В общем случае для этих систем необходимо решать краевые задачи в неограниченной неоднородной области, содержащей геометрически сложные ферромагнитные (магнитопровод) и проводящие (корпус, обечайка, гильза, жидкая сталь) тела.

Сложность указанных задач, с одной стороны, и необходимость разработки практически реализуемых на доступных ЭВМ программ, с другой стороны, побуждает искать такие эквивалентные преобразования этих систем, при которых во вновь полученных системах достаточно просто и с приемлемой точностью учитывалась бы специфика распределения полей в

ЭМП. Одним из таких преобразований является сведение краевых задач к эквивалентным интегральным уравнениям (ИУ). Достаточно полно этот подход реализован для двумерных задач [4—7].

В предлагаемой трехмерной интегральной модели вращающегося магнитного поля ЭМП переход от уравнений Максвелла к эквивалентной системе интегральных уравнений (СИУ) вызван тем, что в ЭМП существуют сильные поля рассеивания. С помощью СИУ эти поля можно учитывать соответствующим выбором потенциалов, например комбинацией ньютонова потенциала и потенциала простого слоя.

Рассматриваемая модель основана на разложении результирующего вращающегося магнитного поля (ВМП) на три симметричные составляющие (СС) [5]. Одна из них моделируется, две другие получаются поворотом моделируемой СС вокруг оси системы на  $120^\circ$  по часовой стрелке или против и умножением полученной картины поля на соответствующий масштабный коэффициент.

При моделировании СС используется концепция связанных токов намагниченности (ТН). Векторное интегральное уравнение (ВИУ) для плотности ТН сводится к системе трех скалярных, которые в свою очередь преобразуются с учетом симметрии СС относительно координатных плоскостей  $XOY$ ,  $YOZ$ ,  $XOZ$ . Областью определения полученных ИУ является восьмая часть поверхности магнитопровода, лежащая в первом октанте.

**Конструктивное исполнение системы кристаллизатор МНЛЗ — явнополюсный ЭМП.** На рис. 1 показан общий вид системы кристаллизатор МНЛЗ круглого сечения — ЭМП. Ось  $Z$  декартовой системы координат  $XYZ$  совмещена с осью системы, а оси  $X$  и  $Y$  — с осями симметрии обмотки одной из фаз, например первой. ЭМП состоит из магнитопровода и трехфазной обмотки. Принцип действия системы такой же, как и у асинхронного двигателя. Трехфазная обмотка содержит три фазные обмотки, соединенные звездой или треугольником. Каждая фазная обмотка состоит из двух одинаковых частей, расположенных на противоположных полюсах магнитопровода. Число витков в каждой фазной обмотке  $2W$ . Активные плоскости обмоток пересекаются по оси  $Z$  и образуют угол  $120^\circ$  (рис. 2).

Будем считать заданными токи в витках обмотки. Предположим, что фазные токи образуют симметричную трехфазную систему. Если считать положительным направление токов в фазных обмотках от начала к концу, то фазные токи имеют вид

$$i_1(t) = I_m \sin \omega t, \quad i_2(t) = I_m \sin \left( \omega t + \frac{2\pi}{3} \right), \quad i_3(t) = I_m \sin \left( \omega t - \frac{2\pi}{3} \right),$$

где  $\omega = 2\pi f$ ;  $f$  — частота токов;  $I_m$  — амплитуда фазных токов.

**Расчетная модель.** Обмотку реального ЭМП, имеющую вид винтовой линии, в расчетной модели заменим системой замкнутых соосных витков, каждый из которых лежит в плоскости, перпендикулярной оси обмотки, и симметричен относительно плоскости  $XOY$ . Очевидно, в такой модели магнитное поле симметрично относительно плоскости  $XOY$  (см. рис. 2). Поэтому его расчет достаточно выполнить в полупространстве  $z \geq 0$ . Витки обмотки будем группировать в жгуты. Жгут — это некоторое число плотно уложенных витков. Будем считать диаметр поперечного сечения жгута настолько малым, что замена операции интегрирования по токам в жгуте на интегрирование по оси жгута, по которой протекает полный ток жгута, не приведет к существенной погрешности. Не умаляя общности задачи, а преследуя цель упростить запись ИУ, каждую половину фазной обмотки, заменяем одним жгутом.

Будем рассматривать магнитное поле ЭМП без наличия заготовки, гильзы кристаллизатора, обечайки, наружного и внутреннего корпусов кристаллизатора, обшивки ЭМП. Однако модель магнитного поля ЭМП должна быть выполнена таким образом, чтобы при добавлении указанных конструктивных элементов принципы построения модели не менялись. Этому требованию удовлетворяет предложенная интегральная модель, в основе которой лежит ВИУ для плотности ТН на поверхности магнитопровода.

**Некоторые обоснования формулировки задачи расчета магнитного поля ЭМП с помощью ВИУ.** Для расчета магнитных полей в неоднородных средах часто применяют ИУ относительно связанных зарядов [8], которые являются скалярными как для двумерных, так и для трехмерных полей. Однако, если не прибегать к каким-либо преобразованиям, воспользоваться концепцией связанных зарядов не всегда возможно. Это относится, в частности, к ЭМП.

Существенно расширяет область применения концепции магнитных зарядов метод сведения вихревых магнитных полей к потенциальным [9]. Вместе с тем, применение этого эффективного метода связано с решением дополнительной задачи минимизации объемов, занимаемых магнитными массами. В ряде случаев эта задача решается введением объемных магнитных масс в области, занятой токами, простых и двойных магнитных слоев на поверхности проводников и на некоторой поверхности в области, не занятой токами.

К построению универсальных алгоритмов и программ расчета магнитных полей и параметров ЭМП с любой конструкцией магнитопровода и обмоток с учетом массивных конструктивных элементов (заготовка, кристаллизатор, обечайка, кожух ЭМП, корпус МНЛЗ) ведет использование концепции связанных ТН и соответствующих ИУ [10], которые для краткости будем называть токовыми в отличие от упомянутых выше зарядовых. Токовые ИУ в трехмерных и некоторых двумерных полях — век-

торные. Методы и алгоритмы решения их описаны в литературе применительно к трансформаторам токов [11].

**Токовое ИУ для ЭМП.** Ограничимся рассмотрением ЭМП, у которого в объеме магнитопровода  $V^-$  магнитная проницаемость  $\mu^-$  постоянна. Введем обозначения:  $V_0$  и  $V^+$  — объемы обмоток и окружающего магнитопровод и обмотки пространства; объем обмоток равен сумме объемов фазных обмоток,

$$V_0 = \sum_{k=1}^3 V_{0k} = \sum_{k=1}^3 (V'_{0k} + V''_{0k}),$$

где  $V_{0k}$ ,  $V'_{0k}$ ,  $V''_{0k}$  — объем обмотки  $k$ -й фазы, первой и второй половины обмотки  $k$ -й фазы,  $k=1, 2, 3$ ;  $S$  — поверхность магнитопровода;  $\mu_0$  — магнитная проницаемость в объемах  $V_0$  и  $V^+$ ;  $\delta_0(Q, t)$  — вектор плотности тока в точке  $Q$  обмотки.

При выводе токового ИУ будем исходить из условия на поверхности  $S$ , которому удовлетворяет вектор магнитной индукции  $\mathbf{B}$ :

$$\left[ \mathbf{n}_Q, \frac{\mathbf{B}^+(Q, t)}{\mu_0} - \frac{\mathbf{B}^-(Q, t)}{\mu_0 \mu^-} \right] = 0, \quad (1)$$

где  $\mathbf{n}_Q$  — нормаль к поверхности  $S$  в точке  $Q$ , положительное направление которой принято из объема  $V^-$  в объем  $V^+$ ;  $\mathbf{B}^+(Q, t)$  и  $\mathbf{B}^-(Q, t)$  — значения вектора магнитной индукции  $\mathbf{B}$  в  $Q$  точке со стороны объемов соответственно  $V^+$  и  $V^-$ .

При переходе через границу раздела сред вектор магнитной индукции  $\mathbf{B}$  испытывает скачок:

$$\mathbf{B}^+(Q, t) - \mathbf{B}^-(Q, t) = \mu_0 [\boldsymbol{\sigma}(Q, t), \mathbf{n}_Q], \quad (2)$$

где  $\boldsymbol{\sigma}(Q, t)$  — вектор плотности тока намагниченности в точке  $Q \in S$ . Соотношение (2) равносильно следующим двум:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^+(Q, t) &= \mathbf{B}^0(Q, t) + \frac{\mu_0 [\boldsymbol{\sigma}(Q, t), \mathbf{n}_Q]}{2}, \\ \mathbf{B}^-(Q, t) &= \mathbf{B}^0(Q, t) - \frac{\mu_0 [\boldsymbol{\sigma}(Q, t), \mathbf{n}_Q]}{2}, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\mathbf{B}^0(Q, t)$  — вектор индукции на границе  $S$ , обусловленный всеми токами  $\delta_0$  и  $\boldsymbol{\sigma}$ , за исключением элемента тока  $\boldsymbol{\sigma}(Q, t) ds_Q$ . Подставляя (3) в соотношение (1), получаем

$$\left[ \mathbf{n}_Q, \frac{2\chi}{\mu_0} \mathbf{B}^0(Q, t) \right] + [\mathbf{n}_Q, [\boldsymbol{\sigma}(Q, t), \mathbf{n}_Q]] = 0, \quad (4)$$

где

$$\chi = \frac{\mu^- - 1}{\mu^- + 1}.$$

Используя тождество векторной алгебры и учитывая тот факт, что вектор  $\boldsymbol{\sigma}(Q, t)$  лежит в касательной к поверхности  $S$  в точке  $Q$  плоскости, преобразуем второе слагаемое в равенстве (4) к следующему виду:

$$\boldsymbol{\sigma}(Q, t) = [\mathbf{n}_Q[\boldsymbol{\sigma}(Q, t), \mathbf{n}_Q]]. \quad (5)$$

Подставляя (5) в (4), получаем

$$\boldsymbol{\sigma}(Q, t) + \left[ \mathbf{n}_Q, \frac{2\chi}{\mu_0} \mathbf{B}^0(Q, t) \right] = 0. \quad (6)$$

В рассматриваемом случае вектор магнитной индукции в любой точке пространства, в том числе и на границе  $S$ , можно представить в следующем виде:

$$\mathbf{B}(Q, t) = \mathbf{B}_0(Q, t) + \mathbf{B}_\sigma(Q, t) = \mathbf{B}'_0(Q, t) + \mathbf{B}''_0(Q, t) + \mathbf{B}_\sigma(Q, t), \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_0(Q, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_0} \frac{[\mathbf{r}_{QM} \boldsymbol{\delta}_0(M, t)]}{r_{QM}^3} dv_M; & \mathbf{B}_\sigma(Q, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_S \frac{[\mathbf{r}_{QM} \boldsymbol{\sigma}(M, t)]}{r_{QM}^3} ds_M; \\ \mathbf{B}'_0(Q, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\sum_{k=1}^3 V_{0k}} \frac{[\mathbf{r}_{QM} \boldsymbol{\delta}_0(M, t)]}{r_{QM}^3} dv_M; \\ \mathbf{B}''_0(Q, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\sum_{k=1}^3 V_{0k}} \frac{[\mathbf{r}_{QM} \boldsymbol{\delta}_0(M, t)]}{r_{QM}^3} dv_M; \end{aligned}$$

$\mathbf{r}_{QM}$  — радиус-вектор, направленный из точки  $Q$  в точку  $M$  и равный расстоянию между точками  $Q$  и  $M$ . Подставляя (7) в (6), получаем следующее токовое ИУ для вектора плотности ТН на поверхности  $S$  магнитопровода ЭМП:

$$\boldsymbol{\sigma}(Q, t) + \frac{\chi}{2\pi} \oint_S \frac{[\mathbf{n}_Q[\mathbf{r}_{QM} \boldsymbol{\sigma}(M, t)]]}{r_{QM}^3} ds_M = -\frac{\chi}{2\pi} \int_{V_0} \frac{[\mathbf{n}_Q[\mathbf{r}_{QM} \boldsymbol{\delta}_0(M, t)]]}{r_{QM}^3} dv_M, \quad Q \in S. \quad (8)$$

Для краткости запишем ВИУ (8) в операторной форме:

$$\frac{2\pi}{\chi} \boldsymbol{\sigma}(Q, t) + D_{ss} \boldsymbol{\sigma} = -D_{so} \boldsymbol{\delta}_0, \quad Q \in S. \quad (9)$$

Здесь

$$D_{ss} \boldsymbol{\sigma} = \oint_S \frac{[\mathbf{n}_Q[\mathbf{r}_{QM} \boldsymbol{\sigma}(M, t)]]}{r_{QM}^3} ds_M, \quad Q \in S,$$

$$D_{so} \boldsymbol{\delta}_0 = \int_{V_0} \frac{[\mathbf{n}_Q[\mathbf{r}_{QM} \boldsymbol{\delta}_0(M, t)]]}{r_{QM}^3} dv_M, \quad Q \in S. \quad (10)$$

Выше было принято допущение о том, что каждая половина обмотки является жгутом с достаточно малым диаметром поперечного сечения. При этом допущении (10) принимает вид

$$D_{so} \boldsymbol{\delta}_0 = \int_{V_0} \frac{[\mathbf{n}_Q[\mathbf{r}_{QM} \boldsymbol{\delta}_0(M, t)]]}{r_{QM}^3} dv_M = \sum_{k=1}^3 \int_{V_0} \frac{[\mathbf{n}_Q[\mathbf{r}_{QM} \boldsymbol{\delta}_0(M, t)]]}{r_{QM}^3} dv_M =$$

$$= W \sum_{k=1}^3 D'_{Sk} \mathbf{i}_k + W \sum_{k=1}^3 D''_{Sk} \mathbf{i}_k. \quad (11)$$

Здесь

$$D'_{Sk} \mathbf{i}_k = \int_{L'_{0k}} \frac{[\mathbf{n}_Q[\mathbf{r}_{QM} \mathbf{i}_k(M, t)]]}{r_{QM}^3} dl_M, \quad Q \in S,$$

$$D''_{Sk} \mathbf{i}_k = \int_{L''_{0k}} \frac{[\mathbf{n}_Q[\mathbf{r}_{QM} \mathbf{i}_k(M, t)]]}{r_{QM}^3} dl_M, \quad Q \in S;$$

$L'_{0k}$  и  $L''_{0k}$  — осевые линии первого и второго жгутов обмотки  $k$ -й фазы;  $\mathbf{i}_k(M, t)$  — мгновенный вектор тока в точке  $M$  осевой линии  $L_{0k} = L'_{0k} + L''_{0k}$  обмотки  $k$ -й фазы,  $\mathbf{i}_k(M, t) = \mathbf{l}_k(M) i_k(t)$ , где  $\mathbf{l}_k(M)$  — орт касательной к линии  $L_{0k}$  в точке  $M$ , характеризующий протекание тока в пространстве. Его направление совпадает с положительным направлением тока  $i_k(t)$  в обмотке  $k$ -й фазы.

Подставив (11) в (9), получим следующее ВИУ для ЭМП:

$$\frac{2\pi}{\chi} \boldsymbol{\sigma}(Q, t) + D_{ss} \boldsymbol{\sigma} = -W \sum_{k=1}^3 D'_{Sk} \mathbf{i}_k - W \sum_{k=1}^3 D''_{Sk} \mathbf{i}_k, \quad Q \in S. \quad (12)$$

**Разложение вращающегося магнитного поля на симметричные составляющие.** В основе предложенной модели лежит разложение результирующего ВМП на три СС [5]. Первая СС создается током в обмотке первой фазы при нулевых токах в обмотках второй и третьей фаз. Аналогично вторая и третья СС создаются токами в обмотках соответственно второй и третьей фаз. Для нахождения распределения ВМП в пространстве в данный момент времени моделируется в этот момент первая СС. Поле второй СС получается поворотом первой СС вокруг оси системы на  $120^\circ$  по часовой стрелке и умножением полученной картины поля на отношение значения тока во второй обмотке в данный момент к значению тока в первой обмотке. Поле третьей СС получается поворотом первой СС вокруг оси системы на  $120^\circ$  против часовой стрелки и умножением полученной картины поля на отношение значения тока в третьей обмотке в данный момент к значению тока в первой обмотке.

При моделировании первой СС используем ВИУ (12) для первой СС:

$$\frac{2\pi}{\chi} \sigma_1(Q, t) + D_{SS} \sigma_1 = -WD'_{S1} \mathbf{i}_1 - WD''_{S1} \mathbf{i}_1, \quad Q \in S. \quad (13)$$

**Выделение из исходного ВИУ (13) ВИУ со скалярным ядром.** Один из путей упрощения ВИУ (13) состоит в выделении из него ВИУ со скалярным ядром. Для этого преобразуем оператор

$$D_{SS} \sigma_1 = \oint_S \frac{[\mathbf{n}_Q [\mathbf{r}_{QM} \sigma_1(M, t)]]}{r_{QM}^3} ds_M, \quad Q \in S, \quad (14)$$

воспользовавшись известным векторным тождеством  $[\mathbf{a} [\mathbf{bc}]] = \mathbf{b}(\mathbf{ac}) - \mathbf{c}(\mathbf{ab})$ . Применив его к числителю подынтегрального выражения (14), получим

$$[\mathbf{n}_Q [\mathbf{r}_{QM} \sigma_1(M, t)]] = \mathbf{r}_{QM} (\mathbf{n}_Q \sigma_1(M, t)) - \sigma_1(M, t) (\mathbf{n}_Q \mathbf{r}_{QM}). \quad (15)$$

Подставив (15) в (14), запишем

$$D_{SS} \sigma_1 = \oint_S \frac{\mathbf{r}_{QM} (\mathbf{n}_Q \sigma_1(M, t))}{r_{QM}^3} ds_M - \oint_S \frac{(\mathbf{n}_Q \mathbf{r}_{QM})}{r_{QM}^3} \sigma_1(M, t) ds_M. \quad (16)$$

Аналогично преобразуем операторы  $D'_{S1} \mathbf{i}_1$  и  $D''_{S1} \mathbf{i}_1$ :

$$\begin{aligned} D'_{S1} \mathbf{i}_1 &= \int_{L'_{01}} \frac{[\mathbf{n}_Q [\mathbf{r}_{QM} \mathbf{i}_1(M, t)]]}{r_{QM}^3} dl_M = \\ &= \int_{L'_{01}} \frac{\mathbf{r}_{QM} (\mathbf{n}_Q \mathbf{i}_1(M, t))}{r_{QM}^3} dl_M - \int_{L'_{01}} \frac{(\mathbf{n}_Q \mathbf{r}_{QM})}{r_{QM}^3} \mathbf{i}_1(M, t) dl_M, \quad Q \in S, \end{aligned} \quad (17)$$



$$\begin{aligned}
D_{S_1}'' \mathbf{i}_1 &= \int_{L_{01}'} \frac{[\mathbf{n}_Q [\mathbf{r}_{QM} \mathbf{i}_1(M, t)]]}{r_{QM}^3} dl_M = \\
&= \int_{L_{01}'} \frac{\mathbf{r}_{QM} (\mathbf{n}_Q \mathbf{i}_1(M, t))}{r_{QM}^3} dl_M - \int_{L_{01}'} \frac{(\mathbf{n}_Q \mathbf{r}_{QM})}{r_{QM}^3} \mathbf{i}_1(M, t) dl_M, \quad Q \in S. \quad (18)
\end{aligned}$$

Подставляя (16)—(18) в (13), получаем:

$$\begin{aligned}
\frac{2\pi}{\chi} \boldsymbol{\sigma}_1(Q, t) - \oint_S \frac{(\mathbf{n}_Q \mathbf{r}_{QM})}{r_{QM}^3} \boldsymbol{\sigma}_1(M, t) ds_M + \oint_S \frac{\mathbf{r}_{QM} (\mathbf{n}_Q \boldsymbol{\sigma}_1(M, t))}{r_{QM}^3} ds_M = \mathbf{F}_1(Q, t), \\
Q \in S, \quad (19)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_1(Q, t) &= -W \int_{L_{01}'} \frac{\mathbf{r}_{QM} (\mathbf{n}_Q \mathbf{i}_1(M, t))}{r_{QM}^3} dl_M + W \int_{L_{01}'} \frac{(\mathbf{n}_Q \mathbf{r}_{QM})}{r_{QM}^3} \mathbf{i}_1(M, t) dl_M - \\
&- W \int_{L_{01}'} \frac{\mathbf{r}_{QM} (\mathbf{n}_Q \mathbf{i}_1(M, t))}{r_{QM}^3} dl_M + W \int_{L_{01}'} \frac{(\mathbf{n}_Q \mathbf{r}_{QM})}{r_{QM}^3} \mathbf{i}_1(M, t) dl_M.
\end{aligned}$$

При решении уравнения (19) итерационным методом по схеме

$$\begin{aligned}
\frac{2\pi}{\chi} \boldsymbol{\sigma}_1^j(Q, t) - \oint_S \frac{(\mathbf{n}_Q \mathbf{r}_{QM})}{r_{QM}^3} \boldsymbol{\sigma}_1^j(M, t) ds_M = \\
= \mathbf{F}_1(Q, t) - \oint_S \frac{\mathbf{r}_{QM} (\mathbf{n}_Q \boldsymbol{\sigma}_1^{j-1}(M, t))}{r_{QM}^3} ds_M, \quad Q \in S,
\end{aligned}$$

на каждом шаге решается ВИУ со скалярным ядром.

Следует заметить, что численное решение уравнения (19) сопряжено с большим объемом избыточных вычислений. Объясняется это тем, что в поле первой СС имеют место симметрии относительно координатных плоскостей, которые в уравнении (19) не учтены. Поэтому прежде чем численно решать уравнение (19) его необходимо преобразовать с учетом указанных симметрий.

**Преобразование ВИУ (19) к системе скалярных ИУ в декартовой системе координат.** Представим в декартовой системе координат векторы, входящие в ВИУ (19),

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma}_1(Q, t) &= \sigma_{1x}(Q, t) \mathbf{e}_x + \sigma_{1y}(Q, t) \mathbf{e}_y + \sigma_{1z}(Q, t) \mathbf{e}_z, \\
\mathbf{i}_1(M, t) &= i_{1x}(M, t) \mathbf{e}_x + i_{1y}(M, t) \mathbf{e}_y + i_{1z}(M, t) \mathbf{e}_z, \\
\mathbf{n}_Q &= \alpha_n(Q) \mathbf{e}_x + \beta_n(Q) \mathbf{e}_y + \gamma_n(Q) \mathbf{e}_z,
\end{aligned} \quad (20)$$

где

$$\alpha_n(Q) = \cos(\mathbf{n}_Q, \mathbf{e}_x), \beta_n(Q) = \cos(\mathbf{n}_Q, \mathbf{e}_y), \gamma_n(Q) = \cos(\mathbf{n}_Q, \mathbf{e}_z),$$

$$\mathbf{r}_{QM} = (x_M - x_Q)\mathbf{e}_x + (y_M - y_Q)\mathbf{e}_y + (z_M - z_Q)\mathbf{e}_z = r_{QM}\mathbf{r}_{QM}^0,$$

$$\mathbf{r}_{QM}^0 = \frac{\mathbf{r}_{QM}}{r_{QM}} = \alpha_r(Q, M)\mathbf{e}_x + \beta_r(Q, M)\mathbf{e}_y + \gamma_r(Q, M)\mathbf{e}_z, \quad (21)$$

$$\alpha_r(Q, M) = \frac{(x_M - x_Q)}{r_{QM}}, \beta_r(Q, M) = \frac{(y_M - y_Q)}{r_{QM}}, \gamma_r(Q, M) = \frac{(z_M - z_Q)}{r_{QM}}.$$

Подставляя (20), (21) в (19), получаем систему трех скалярных ИУ

$$\frac{2\pi}{\chi}\sigma_{1x}(Q, t) - \oint_S P_0(Q, M)\sigma_{1x}(M, t)dl_M +$$

$$+ \oint_S \frac{\alpha_n(Q)\sigma_{1x}(M, t) + \beta_n(Q)\sigma_{1y}(M, t) + \gamma_n(Q)\sigma_{1z}(M, t)}{r_{QM}^2} \alpha_r(Q, M) ds_M =$$

$$= F_{1x}(Q, t), \quad Q \in S, \quad (22)$$

$$\frac{2\pi}{\chi}\sigma_{1y}(Q, t) - \oint_S P_0(Q, M)\sigma_{1y}(M, t)dl_M +$$

$$+ \oint_S \frac{\alpha_n(Q)\sigma_{1x}(M, t) + \beta_n(Q)\sigma_{1y}(M, t) + \gamma_n(Q)\sigma_{1z}(M, t)}{r_{QM}^2} \beta_r(Q, M) ds_M =$$

$$= F_{1y}(Q, t), \quad Q \in S, \quad (23)$$

$$\frac{2\pi}{\chi}\sigma_{1z}(Q, t) - \oint_S P_0(Q, M)\sigma_{1z}(M, t)dl_M +$$

$$+ \oint_S \frac{\alpha_n(Q)\sigma_{1x}(M, t) + \beta_n(Q)\sigma_{1y}(M, t) + \gamma_n(Q)\sigma_{1z}(M, t)}{r_{QM}^2} \gamma_r(Q, M) ds_M =$$

$$= F_{1z}(Q, t), \quad Q \in S, \quad (24)$$

где

$$F_{1x}(Q, t) = -W \int_{L_{01}} \frac{\alpha_n(Q)i_{1x}(M, t) + \beta_n(Q)i_{1y}(M, t) + \gamma_n(Q)i_{1z}(M, t)}{r_{QM}^2} \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \alpha_r(Q, M) dl_M + W \int_{L_{01}'} P_0(Q, M) i_{1x}(M, t) dl_M - \\
& - W \int_{L_{01}'} \frac{\alpha_n(Q) i_{1x}(M, t) + \beta_n(Q) i_{1y}(M, t) + \gamma_n(Q) i_{1z}(M, t)}{r_{QM}^2} \alpha_r(Q, M) dl_M + \\
& \quad + W \int_{L_{01}'} P_0(Q, M) i_{1x}(M, t) dl_M; \\
F_{1y}(Q, t) = & - W \int_{L_{01}'} \frac{\alpha_n(Q) i_{1x}(M, t) + \beta_n(Q) i_{1y}(M, t) + \gamma_n(Q) i_{1z}(M, t)}{r_{QM}^2} \times \\
& \times \beta_r(Q, M) dl_M + W \int_{L_{01}'} P_0(Q, M) i_y(M, t) dl_M - \\
& - W \int_{L_{01}'} \frac{\alpha_n(Q) i_{1x}(M, t) + \beta_n(Q) i_{1y}(M, t) + \gamma_n(Q) i_{1z}(M, t)}{r_{QM}^2} \beta_r(Q, M) dl_M + \\
& \quad + W \int_{L_{01}'} P_0(Q, M) i_y(M, t) dl_M; \\
F_{1z}(Q, t) = & - W \int_{L_{01}'} \frac{\alpha_n(Q) i_{1x}(M, t) + \beta_n(Q) i_{1y}(M, t) + \gamma_n(Q) i_{1z}(M, t)}{r_{QM}^2} \times \\
& \times \gamma_r(Q, M) dl_M + W \int_{L_{01}'} P_0(Q, M) i_{1z}(M, t) dl_M - \\
& - W \int_{L_{01}'} \frac{\alpha_n(Q) i_{1x}(M, t) + \beta_n(Q) i_{1y}(M, t) + \gamma_n(Q) i_{1z}(M, t)}{r_{QM}^2} \gamma_r(Q, M) dl_M + \\
& \quad + W \int_{L_{01}'} P_0(Q, M) i_{1z}(M, t) dl_M; \\
P_0(Q, M) = & \frac{(\mathbf{n}_Q \mathbf{r}_{QM})}{r_{QM}^3}.
\end{aligned}$$

Преобразование системы ИУ (22)—(24) с учетом симметрии по координате  $x$  магнитного поля первой СС. Введем коэффициенты сим-

метрии:  $a$  — коэффициент, характеризующий соотношения симметрии в проекции на ось  $x$  заданного распределения вектора тока в обмотке первой фазы  $i_{1x}$ :

$$i_{1x}(Q_x) = a_x i_{1x}(Q), \quad i_{1x}(Q_y) = a_y i_{1x}(Q), \quad i_{1z}(Q_z) = a_z i_{1z}(Q). \quad (25)$$

Здесь  $Q$  — точка с координатами  $x_Q, y_Q, z_Q$ ;  $Q_x$  — точка с координатами  $-x_Q, y_Q, z_Q$ ;  $Q_y$  — точка с координатами  $x_Q, -y_Q, z_Q$ ;  $Q_z$  — точка с координатами  $x_Q, y_Q, -z_Q$ .

Аналогичные соотношения запишем для  $\sigma_x$ :

$$\sigma_x(Q_x) = a_x \sigma_x(Q), \quad \sigma_x(Q_y) = a_y \sigma_x(Q), \quad \sigma_x(Q_z) = a_z \sigma_x(Q); \quad (26)$$

$b$  — коэффициент, характеризующий соотношения симметрии в проекции на ось  $y$  заданного распределения вектора тока в обмотке первой фазы  $i_{1y}$ ,

$$i_{1y}(Q_x) = b_x i_{1y}(Q), \quad i_{1y}(Q_y) = b_y i_{1y}(Q), \quad i_{1y}(Q_z) = b_z i_{1y}(Q). \quad (27)$$

Аналогичные соотношения для  $\sigma_y$  имеют вид

$$\sigma_y(Q_x) = b_x \sigma_y(Q), \quad \sigma_y(Q_y) = b_y \sigma_y(Q), \quad \sigma_y(Q_z) = b_z \sigma_y(Q); \quad (28)$$

$c$  — коэффициент, характеризующий соотношения симметрии в проекции на ось  $z$  заданного распределения вектора тока в обмотке первой фазы  $i_{1z}$ ,

$$i_{1z}(Q_x) = c_x i_{1z}(Q), \quad i_{1z}(Q_y) = c_y i_{1z}(Q), \quad i_{1z}(Q_z) = c_z i_{1z}(Q). \quad (29)$$

Аналогичные соотношения для  $\sigma_z$ :

$$\sigma_z(Q_x) = c_x \sigma_z(Q), \quad \sigma_z(Q_y) = c_y \sigma_z(Q), \quad \sigma_z(Q_z) = c_z \sigma_z(Q). \quad (30)$$

Введем следующие обозначения:  $S_x$  — часть поверхности  $S$ , лежащая в полупространстве  $x \leq 0$ , т.е.  $S_x$  — геометрическое место точек  $M_x$ , если точка  $M$  принадлежит  $S$ . Контур  $L''_{01}$  лежит в полупространстве  $x \leq 0$ , т.е.  $L''_{01}$  — геометрическое место точек  $M_x$ , если точка  $M$  принадлежит  $L'_{01}$ .

С учетом соотношений (25)—(30) уравнения (22)—(24) преобразуются к виду

$$\begin{aligned} & \frac{2\pi}{\chi} \sigma_{1x}(Q, t) - \\ & - \int_{S-S_x} P_x^x(Q, M) \sigma_{1x}(M, t) ds_M + \alpha_n(Q) \int_{S-S_x} A_x^x(Q, M) \sigma_{1x}(M, t) ds_M + \\ & + \beta_n(Q) \int_{S-S_x} A_x^y(Q, M) \sigma_{1y}(M, t) ds_M + \gamma_n(Q) \int_{S-S_x} A_x^z(Q, M) \sigma_{1z}(M, t) ds_M = \\ & = F_{1x}^x(Q, t), \quad Q \in S - S_x, \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{2\pi}{\chi} \sigma_{1y}(Q, t) - \\
& - \int_{S-S_x} P_x^y(Q, M) \sigma_{1y}(M, t) ds_M + \alpha_n(Q) \int_{S-S_x} B_x^x(Q, M) \sigma_{1x}(M, t) ds_M + \\
& + \beta_n(Q) \int_{S-S_x} B_x^y(Q, M) \sigma_{1y}(M, t) ds_M + \gamma_n(Q) \int_{S-S_x} B_x^z(Q, M) \sigma_{1z}(M, t) ds_M = \\
& = F_{1x}^y(Q, t), \quad Q \in S - S_x, \tag{32}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{2\pi}{\chi} \sigma_{1z}(Q, t) - \\
& - \int_{S-S_x} P_x^z(Q, M) \sigma_{1z}(M, t) ds_M + \alpha_n(Q) \int_{S-S_x} G_x^x(Q, M) \sigma_{1x}(M, t) ds_M + \\
& + \beta_n(Q) \int_{S-S_x} G_x^y(Q, M) \sigma_{1y}(M, t) ds_M + \gamma_n(Q) \int_{S-S_x} G_x^z(Q, M) \sigma_{1z}(M, t) ds_M = \\
& = F_{1x}^z(Q, t), \quad Q \in S - S_x, \tag{33}
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
F_{1x}^x(Q, t) &= -W\alpha_n(Q) \int_{L_{01}} A_x^x(Q, M) i_{1x}(M, t) dl_M - \\
& - W\beta_n(Q) \int_{L_{01}} A_x^y(Q, M) i_{1y}(M, t) dl_M - W\gamma_n(Q) \int_{L_{01}} A_x^z(Q, M) i_{1z}(M, t) dl_M + \\
& + W \int_{L_{01}} P_x^x(Q, M) i_{1x}(M, t) dl_M, \\
P_x^x(Q, M) &= P_0(Q, M) + a_x P_0(Q, M_x), \quad A_x^x(Q, M) = \frac{\alpha_r(Q, M)}{r_{QM}^2} + \frac{a_x \alpha_r(Q, M_x)}{r_{QM_x}^2}, \\
A_x^y(Q, M) &= \frac{\alpha_r(Q, M)}{r_{QM}^2} + \frac{b_x \alpha_r(Q, M_x)}{r_{QM_x}^2}, \quad A_x^z(Q, M) = \frac{\alpha_r(Q, M)}{r_{QM}^2} + \frac{c_x \alpha_r(Q, M_x)}{r_{QM_x}^2}, \\
F_{1x}^y(Q, t) &= -W\alpha_n(Q) \int_{L_{01}} B_x^x(Q, M) i_{1x}(M, t) dl_M - \\
& - W\beta_n(Q) \int_{L_{01}} B_x^y(Q, M) i_{1y}(M, t) dl_M - W\gamma_n(Q) \int_{L_{01}} B_x^z(Q, M) i_{1z}(M, t) dl_M + \\
& + W \int_{L_{01}} P_x^y(Q, M) i_{1y}(M, t) dl_M,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_x^y(Q, M) &= P_0(Q, M) + b_x P_0(Q, M_x), \quad B_x^x(Q, M) = \frac{\beta_r(Q, M)}{r_{QM}^2} + \frac{a_x \beta_r(Q, M_x)}{r_{QM_x}^2}, \\
 B_x^y(Q, M) &= \frac{\beta_r(Q, M)}{r_{QM}^2} + \frac{b_x \beta_r(Q, M_x)}{r_{QM_x}^2}, \quad B_x^z(Q, M) = \frac{\beta_r(Q, M)}{r_{QM}^2} + \frac{c_x \beta_r(Q, M_x)}{r_{QM_x}^2}, \\
 F_{1x}^z(Q, t) &= -W \alpha_n(Q) \int_{L'_{01}} G_x^x(Q, M) i_{1x}(M, t) dl_M - \\
 &- W \beta_n(Q) \int_{L'_{01}} G_x^y(Q, M) i_{1y}(M, t) dl_M - W \gamma_n(Q) \int_{L'_{01}} G_x^z(Q, M) i_{1z}(M, t) dl_M + \\
 &+ W \int_{L'_{01}} P_x^z(Q, M) i_{1z}(M, t) dl_M, \\
 P_x^z(Q, M) &= P_0(Q, M) + c_x P_0(Q, M_x), \quad G_x^x(Q, M) = \frac{\gamma_r(Q, M)}{r_{QM}^2} + \frac{a_x \gamma_r(Q, M_x)}{r_{QM_x}^2}, \\
 G_x^y(Q, M) &= \frac{\gamma_r(Q, M)}{r_{QM}^2} + \frac{b_x \gamma_r(Q, M_x)}{r_{QM_x}^2}, \quad G_x^z(Q, M) = \frac{\gamma_r(Q, M)}{r_{QM}^2} + \frac{c_x \gamma_r(Q, M_x)}{r_{QM_x}^2}.
 \end{aligned}$$

**Преобразование уравнений (31)—(33) с учетом симметрии по координате  $y$  магнитного поля первой СС.** Введем обозначения:  $(S - S_x)_y$  — часть поверхности  $S - S_x$ , лежащая в полупространстве  $y_M \leq 0$ ;  $(S - S_x) - (S - S_x)_y$  — часть поверхности  $S$ , являющаяся геометрическим местом точек  $M$ , у которых  $x_M \geq 0$  и  $y_M \geq 0$ ;  $L'_{01y}$  — часть контура  $L'_{01}$ , лежащая в полупространстве  $y_M \leq 0$ ;  $L'_{01} - L'_{01y}$  — часть контура  $L'_{01}$ , являющаяся геометрическим местом точек  $M$ , у которых  $x_M \geq 0$  и  $y_M \geq 0$ .

В результате преобразования уравнений (31)—(33) с учетом симметрии по координате  $y$  магнитного поля первой СС получаем следующую СИУ:

$$\begin{aligned}
 \frac{2\pi}{\chi} \sigma_{1x}(Q, t) &- \int_{(S-S_x)-(S-S_x)_y} P_{xy}^{xx}(Q, M) \sigma_{1x}(M, t) ds_M + \\
 &+ \alpha_n(Q) \int_{(S-S_x)-(S-S_x)_y} A_{xy}^{xx}(Q, M) \sigma_{1x}(M, t) ds_M + \\
 &+ \beta_n(Q) \int_{(S-S_x)-(S-S_x)_y} A_{xy}^{yy}(Q, M) \sigma_{1y}(M, t) ds_M + \\
 &+ \gamma_n(Q) \int_{(S-S_x)-(S-S_x)_y} A_{xy}^{zz}(Q, M) \sigma_{1z}(M, t) ds_M =
 \end{aligned}$$

$$= F_{1xy}^{xx}(Q, t), \quad Q \in (S - S_x) - (S - S_x)_y, \quad (34)$$

$$\begin{aligned} & \frac{2\pi}{\chi} \sigma_{1y}(Q, t) - \int_{(S-S_x)-(S-S_x)_y} P_{xy}^{yy}(Q, M) \sigma_{1y}(M, t) ds_M + \\ & + \alpha_n(Q) \int_{(S-S_x)-(S-S_x)_y} B_{xy}^{xx}(Q, M) \sigma_{1x}(M, t) ds_M + \\ & + \beta_n(Q) \int_{(S-S_x)-(S-S_x)_y} B_{xy}^{yy}(Q, M) \sigma_{1y}(M, t) ds_M + \\ & + \gamma_n(Q) \int_{(S-S_x)-(S-S_x)_y} B_{xy}^{zz}(Q, M) \sigma_{1z}(M, t) ds_M = \\ & = F_{1xy}^{yy}(Q, t), \quad Q \in (S - S_x) - (S - S_x)_y, \quad (35) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{2\pi}{\chi} \sigma_{1z}(Q, t) - \int_{(S-S_x)-(S-S_x)_y} P_{xy}^{zz}(Q, M) \sigma_{1z}(M, t) ds_M + \\ & + \alpha_n(Q) \int_{(S-S_x)-(S-S_x)_y} G_{xy}^{xx}(Q, M) \sigma_{1x}(M, t) ds_M + \\ & + \beta_n(Q) \int_{(S-S_x)-(S-S_x)_y} G_{xy}^{yy}(Q, M) \sigma_{1y}(M, t) ds_M + \\ & + \gamma_n(Q) \int_{(S-S_x)-(S-S_x)_y} G_{xy}^{zz}(Q, M) \sigma_{1z}(M, t) ds_M = \\ & = F_{1xy}^{zz}(Q, t), \quad Q \in (S - S_x) - (S - S_x)_y, \quad (36) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} F_{1xy}^{xx}(Q, t) = & -W \alpha_n(Q) \int_{L'_{01}-L'_{01y}} A_{xy}^{xx}(Q, M) i_{1x}(M, t) dl_M - \\ & -W \beta_n(Q) \int_{L'_{01}-L'_{01y}} A_{xy}^{yy}(Q, M) i_{1y}(M, t) dl_M - \\ & -W \gamma_n(Q) \int_{L'_{01}-L'_{01y}} A_{xy}^{zz}(Q, M) i_{1z}(M, t) dl_M + \\ & + W \int_{L'_{01}-L'_{01y}} P_{xy}^{xx}(Q, M) i_{1x}(M, t) dl_M, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_{xy}^{xx}(Q, M) &= P_x^x(Q, M) + a_y P_x^x(Q, M_y), \\
 A_{xy}^{xx}(Q, M) &= A_x^x(Q, M) + a_y A_x^x(Q, M_y), \\
 A_{xy}^{yy}(Q, M) &= A_x^y(Q, M) + b_y A_x^y(Q, M_y), \\
 A_{xy}^{zz}(Q, M) &= A_x^z(Q, M) + c_y A_x^z(Q, M_y); \\
 F_{1xy}^{yy}(Q, t) &= -W \alpha_n(Q) \int_{L'_{01}-L'_{01y}} B_{xy}^{xx}(Q, M) i_{1x}(M, t) dl_M - \\
 &\quad -W \beta_n(Q) \int_{L'_{01}-L'_{01y}} B_{xy}^{yy}(Q, M) i_{1y}(M, t) dl_M - \\
 &\quad -W \gamma_n(Q) \int_{L'_{01}-L'_{01y}} B_{xy}^{zz}(Q, M) i_{1z}(M, t) dl_M + \\
 &\quad +W \int_{L'_{01}-L'_{01y}} P_{xy}^{yy}(Q, M) i_{1y}(M, t) dl_M, \\
 P_{xy}^{yy}(Q, M) &= P_x^y(Q, M) + b_y P_x^y(Q, M_y), \\
 B_{xy}^{xx}(Q, M) &= B_x^x(Q, M) + a_y B_x^x(Q, M_y), \\
 B_{xy}^{yy}(Q, M) &= B_x^y(Q, M) + b_y B_x^y(Q, M_y), \\
 B_{xy}^{zz}(Q, M) &= B_x^z(Q, M) + c_y B_x^z(Q, M_y); \\
 F_{1xy}^{zz}(Q, t) &= -W \alpha_n(Q) \int_{L'_{01}-L'_{01y}} G_{xy}^{xx}(Q, M) i_{1x}(M, t) dl_M - \\
 &\quad -W \beta_n(Q) \int_{L'_{01}-L'_{01y}} G_{xy}^{yy}(Q, M) i_{1y}(M, t) dl_M - \\
 &\quad -W \gamma_n(Q) \int_{L'_{01}-L'_{01y}} G_{xy}^{zz}(Q, M) i_{1z}(M, t) dl_M + \\
 &\quad +W \int_{L'_{01}-L'_{01y}} P_{xy}^{zz}(Q, M) i_{1z}(M, t) dl_M, \\
 P_{xy}^{zz}(Q, M) &= P_x^z(Q, M) + c_y P_x^z(Q, M_y), \\
 G_{xy}^{xx}(Q, M) &= G_x^x(Q, M) + a_y G_x^x(Q, M_y), \\
 G_{xy}^{yy}(Q, M) &= G_x^y(Q, M) + b_y G_x^y(Q, M_y), \\
 G_{xy}^{zz}(Q, M) &= G_x^z(Q, M) + c_y G_x^z(Q, M_y).
 \end{aligned}$$



**Преобразование уравнений (34)—(36) с учетом симметрии по координате  $z$  магнитного поля первой СС.** Введем обозначения:  $[(S - S_x) - (S - S_x)_y]_z$  — часть поверхности  $(S - S_x) - (S - S_x)_y$ , лежащая в полупространстве  $z \leq 0$ ;  $S^1 = [(S - S_x) - (S - S_x)_y] - [(S - S_x) - (S - S_x)_y]_z$  — часть поверхности  $S$ , лежащая в первом октанте системы координат  $x, y, z$ ; если  $M \in S^1$ , то  $x_M \geq 0, y_M \geq 0, z_M \geq 0$ ;  $(L'_{01} - L'_{01y})_z$  — часть контура  $L'_{01} - L'_{01y}$ , лежащая в полупространстве  $z \leq 0$ ;  $L'_{01} = (L'_{01} - L'_{01y}) - (L'_{01} - L'_{01y})_z$  — часть контура  $L'_{01}$ , лежащая в первом октанте системы координат  $x, y, z$ ; если  $M \in L'_{01}$ , то  $x_M \geq 0, y_M \geq 0, z_M \geq 0$ .

В результате преобразования уравнений (34)—(36) с учетом симметрии по координате  $z$  магнитного поля первой СС получена следующая СИУ:

$$\begin{aligned} & \frac{2\pi}{\chi} \sigma_{1x}(Q, t) - \int_{S^1} P_{xyz}^{xxx}(Q, M) \sigma_{1x}(M, t) ds_M + \\ & + \alpha_n(Q) \int_{S^1} A_{xyz}^{xxx}(Q, M) \sigma_{1x}(M, t) ds_M + \beta_n(Q) \int_{S^1} A_{xyz}^{yyy}(Q, M) \sigma_{1y}(M, t) ds_M + \\ & + \gamma_n(Q) \int_{S^1} A_{xyz}^{zzz}(Q, M) \sigma_{1z}(M, t) ds_M = F_{1xy}^{xxx}(Q, t), \quad Q \in S^1, \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} & \frac{2\pi}{\chi} \sigma_{1y}(Q, t) - \int_{S^1} P_{xyz}^{yyy}(Q, M) \sigma_{1y}(M, t) ds_M + \\ & + \alpha_n(Q) \int_{S^1} B_{xyz}^{xxx}(Q, M) \sigma_{1x}(M, t) ds_M + \beta_n(Q) \int_{S^1} B_{xyz}^{yyy}(Q, M) \sigma_{1y}(M, t) ds_M + \\ & + \gamma_n(Q) \int_{S^1} B_{xyz}^{zzz}(Q, M) \sigma_{1z}(M, t) ds_M = F_{1xyz}^{yyy}(Q, t), \quad Q \in S^1, \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} & \frac{2\pi}{\chi} \sigma_{1z}(Q, t) - \int_{S^1} P_{xyz}^{zzz}(Q, M) \sigma_{1z}(M, t) ds_M + \\ & + \alpha_n(Q) \int_{S^1} G_{xyz}^{xxx}(Q, M) \sigma_{1x}(M, t) ds_M + \beta_n(Q) \int_{S^1} G_{xyz}^{yyy}(Q, M) \sigma_{1y}(M, t) ds_M + \\ & + \gamma_n(Q) \int_{S^1} G_{xyz}^{zzz}(Q, M) \sigma_{1z}(M, t) ds_M = F_{1xyz}^{zzz}(Q, t), \quad Q \in S^1, \end{aligned} \quad (39)$$

где

$$F_{1xy}^{xxx}(Q, t) = -W\alpha_n(Q) \int_{L'_{01}} A_{xyz}^{xxx}(Q, M) i_{1x}(M, t) dl_M -$$

$$\begin{aligned}
 & -W \beta_n(Q) \int_{L_{01}^1} A_{xyz}^{yyy}(Q, M) i_{1y}(M, t) dl_M - \\
 & -W \gamma_n(Q) \int_{L_{01}^1} A_{xyz}^{zzz}(Q, M) i_{1z}(M, t) dl_M + \\
 & +W \int_{L_{01}^1} P_{xyz}^{xxx}(Q, M) i_{1x}(M, t) dl_M, \\
 & P_{xyz}^{xxx}(Q, M) = P_{xy}^{xx}(Q, M) + a_z P_{xy}^{xx}(Q, M_z), \\
 & A_{xyz}^{xxx}(Q, M) = A_{xy}^{xx}(Q, M) + a_z A_{xy}^{xx}(Q, M_z), \\
 & A_{xyz}^{yyy}(Q, M) = A_{xy}^{yy}(Q, M) + b_z A_{xy}^{yy}(Q, M_z), \\
 & A_{xyz}^{zzz}(Q, M) = A_x^{zz}(Q, M) + c_z A_x^{zz}(Q, M_z); \\
 & F_{1xyz}^{yyy}(Q, t) = -W \alpha_n(Q) \int_{L_{01}^*} B_{xyz}^{xxx}(Q, M) i_{1x}(M, t) dl_M - \\
 & -W \beta_n(Q) \int_{L_{01}^*} B_{xyz}^{yyy}(Q, M) i_{1y}(M, t) dl_M - \\
 & -W \gamma_n(Q) \int_{L_{01}^*} B_{xyz}^{zzz}(Q, M) i_{1z}(M, t) dl_M + \\
 & +W \int_{L_{01}^*} P_{xyz}^{yyy}(Q, M) i_{1y}(M, t) dl_M, \\
 & P_{xyz}^{yyy}(Q, M) = P_{xy}^{yy}(Q, M) + b_z P_{xy}^{yy}(Q, M_z), \\
 & B_{xyz}^{xxx}(Q, M) = B_{xy}^{xx}(Q, M) + a_z B_{xy}^{xx}(Q, M_z), \\
 & B_{xyz}^{yyy}(Q, M) = B_{xy}^{yy}(Q, M) + b_z B_{xy}^{yy}(Q, M_z), \\
 & B_{xyz}^{zzz}(Q, M) = B_{xy}^{zz}(Q, M) + c_z B_{xy}^{zz}(Q, M_z); \\
 & F_{1xyz}^{zzz}(Q, t) = -W \alpha_n(Q) \int_{L_{01}^*} G_{xyz}^{xxx}(Q, M) i_{1x}(M, t) dl_M - \\
 & -W \beta_n(Q) \int_{L_{01}^*} G_{xyz}^{yyy}(Q, M) i_{1y}(M, t) dl_M - \\
 & -W \gamma_n(Q) \int_{L_{01}^*} G_{xyz}^{zzz}(Q, M) i_{1z}(M, t) dl_M +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + W \int_{L_{01}^*} P_{xyz}^{zzz}(Q, M) i_{1z}(M, t) dl_M, \\
P_{xyz}^{zzz}(Q, M) &= P_{xy}^{zz}(Q, M) + c_z P_{xy}^{zz}(Q, M_z), \\
G_{xyz}^{xxx}(Q, M) &= G_{xy}^{xx}(Q, M) + a_z G_{xy}^{xx}(Q, M_z), \\
G_{xyz}^{yyy}(Q, M) &= G_{xy}^{yy}(Q, M) + b_z G_{xy}^{yy}(Q, M_z), \\
G_{xyz}^{zzz}(Q, M) &= G_{xy}^{zz}(Q, M) + c_z G_{xy}^{zz}(Q, M_z).
\end{aligned}$$

**Выводы.** Полученная система скалярных интегральных уравнений (31)—(33) эквивалентна токовому интегральному уравнению (13) для первой симметричной составляющей вращающегося магнитного поля электромагнитного перемешивателя. В ней учтены симметрии магнитного поля первой симметричной составляющей относительно координатных плоскостей  $XOY$ ,  $XOZ$ ,  $YOZ$ . Областью определения системы есть одна восьмая часть поверхности магнитопровода  $S$ , лежащая в первом октанте. Порядок матриц, аппроксимирующих интегральные операторы в уравнениях (37)—(39) существенно ниже порядка матриц, аппроксимирующих интегральные операторы в исходной системе уравнений (22)—(24).

Предложенная трехмерная интегральная модель магнитного поля электромагнитного перемешивателя является составной частью разрабатываемых в настоящее время более сложных моделей, а именно: трехмерная интегральная модель распределения вихревых токов и электродинамических усилий в системе кристаллизатор—ЭМП, а так же трехмерная интегральная модель распределения вихревых токов и электродинамических усилий в системе кристаллизатор—два соосных ЭМП.

A three-dimensional integral model of a rotating magnetic field for electromagnetic stirrer is offered. The decomposition of the rotating magnetic field on three symmetric components (SC) lies in the basis of the model. To simulate the first SC the vector integral equation for the magnetized currents density is used, which is reduced to the system of three scalar equations. These equations are transformed taking into account symmetry of the first SC in relation to co-ordinate planes.

1. Lehman A., Sjoden O., Kuchaev A. Electromagnetic Equipment for Noncontacting Treatment of Liquid Metal in Metallurgical Processes // Magnetohydrodynamics. — 2006. — 42, No. 2 — 3. — P. 3—10.
2. Miki Y. Applications of MHD to Continuous Casting of Steel // Proc. the 5th Int. Symposium on Electromagnetic Processing of Materials. — Sendai, Japan, 27 June—1 July, 2006. — P. 26—30.
3. Tallbäck G. R., Lavers J. D., Beitelman L. S. Simulation and Measurement of EMS Induced Fluid Flow in Billet/Bloom Casting Systems // Proc. Int. Congress Electromagn. Process of Materials. Lyon, 14—17 October, 2003. — Lyon, 2003. — P. 33—36.

4. Найдек В. Л., Дубоделов В. И., Евдокимов В. Ф. и др. Двумерная интегро-дифференциальная модель распределения вихревых токов и электродинамических усилий в системе кристаллизатор-индукционный перемешиватель машины непрерывного литья заготовок // Электрон. моделирование. — 2004. — 26, № 1. — С. 30—52.
5. Евдокимов В. Ф., Петрушенко Е. И. Интегральные уравнения для симметричных составляющих синусоидальных вихревых токов в сечении системы кристаллизатор—индукционный перемешиватель // Там же. — 2005. — 27, № 1. — С. 73—96.
6. Дубоделов В. И., Евдокимов В. Ф., Кондратенко И. П. и др. Блочный алгоритм реализации двумерной интегральной модели распределения синусоидальных вихревых токов и электродинамических усилий в кристаллизаторе с индукционным перемешивателем // Там же. — 2005. — 27, № 4. — С. 57—74.
7. Евдокимов В. Ф., Кучаев А. А., Петрушенко Е. И., Касьян Г. И. Двумерная интегральная модель распределения синусоидальных вихревых токов и электродинамических усилий в кристаллизаторе с явнополюсным электромагнитным перемешивателем // Там же. — 2010. — 32, № 1. — С. 53—75.
8. Тозони О. В. Метод вторичных источников в электротехнике. — М. : Энергия, 1975. — 296 с.
9. Демирчан К. С., Чечурин В. Л. Расчет вихревых магнитных полей на основе использования скалярного магнитного потенциала // Электричество. — 1982. — 4, № 1. — С. 7—14.
10. Петрушенко Е. И. К расчету трехмерных магнитных полей в кусочно-однородных средах с помощью векторных интегральных уравнений // Электрон. моделирование. — 1983. — 5, № 5. — С. 27—32.
11. Моделирование на ЭВМ трехмерного магнитного поля линейного одноэлементного трансформатора тока на основе векторного интегрального уравнения / Е. И. Петрушенко, А. И. Пашко, Н. Л. Трофимук, Г. А. Филиппова; АН УССР. Ин-т проблем моделирования в энергетике — Препринт. — Киев, 1986. — 46 с.

Поступила 15.02.10

*ЕВДОКИМОВ Виктор Федорович, чл.-кор. НАН Украины, директор Ин-та проблем моделирования в энергетике им. Г. Е. Пухова НАН Украины. В 1963 г. окончил Харьковский политехнический ин-т. Область научных исследований — методы и устройства для математического моделирования, математическое и компьютерное моделирование энергетических систем.*

*КУЧАЕВ Александр Андреевич, д-р техн. наук, вед. науч. сотр. отдела МГД Физико-технологического ин-та металлов и сплавов НАН Украины. В 1978 г. окончил Киевский ин-т инженеров гражданской авиации. Область научных исследований — моделирование электромагнитных полей.*

*ПЕТРУШЕНКО Евгений Иванович, канд. техн. наук, ст. науч. сотр., зав. отделом математического моделирования электромагнитных полей Ин-та проблем моделирования в энергетике им. Г. Е. Пухова НАН Украины. В 1960 г. окончил Новочеркасский политехнический ин-т, а в 1963 г. — Ростовский госуниверситет. Область научных исследований — моделирование электромагнитных полей.*

*КУЧАЕВ Виталий Александрович, инженер-конструктор Общества с ограниченной ответственностью «ЛАМИ». В 2002 г. окончил Национальный технический университет Украины «КПИ». Область научных исследований — моделирование электромагнитных полей.*