УДК 621.37:621.391

В. В. Палагин, канд. техн. наук
Черкасский государственный технологический университет
(Украина, 18006, Черкассы, бул. Шевченко, 460
тел. (0472)730261, E-mail: palahin@yahoo.com)

Адаптация моментного критерия качества для многоальтернативной задачи проверки гипотез при использовании полиномиальных решающих правил

(Статью представил д-р техн. наук А. Ф. Верлань)

Рассмотрена адаптация моментного асимптотически нормального критерия качества для решения многоальтернативных задач проверки статистических гипотез на основе использования стохастических полиномов и моментно-кумулянтного описания случайных величин. Показано, что нелинейная обработка выборочных значений и учет структуры негауссовых помех позволяет повысить эффективность алгоритмов различения сигналов.

Розглянуто адаптацію моментного асимптотично нормального критерію якості для розв'язування багатоальтернативних задач перевірки статистичних гіпотез на основі використання стохастичних поліномів і моментно-кумулянтного опису випадкових величин. Показано, що нелінійна обробка вибіркових значень і врахування структури негаусових завад дозволяє підвищити ефективність алгоритмів розрізнення сигналів.

К л ю ч е в ы е с л о в а: стохастические полиномы, моментные критерии качества, различение сигналов, негауссовские помехи.

Постановка задачи. При функционировании многих технических систем возникают задачи статистического анализа и синтеза, требующие оптимального решения. В некоторых из них используется разработанная теория проверки статистических гипотез, позволяющая успешно решать целый комплекс прикладных задач, в том числе и задачи обнаружения, распознавания и различения сигналов [1, 2]. Как известно, в основе решения таких задач лежит решающая функция, представленная в виде сравнения отношения правдоподобия с тем или иным порогом, выбираемым по какому либо из классических критериев. Такие критерии назовем вероятностными, так как в их основе лежат вероятности ошибок первого и второго рода решающей функции.

Несмотря на то что разработанные методы не накладывают ограничений на класс рассматриваемых случайных процессов, основное внимание уделено гауссовым моделям, что объясняется, с одной стороны, нормализацией многих процессов, а с другой стороны, удобством использования математического аппарата. На практике использование таких моделей случайных процессов не всегда оправдано, так как многие помехи для полезных сигналов в каналах связи могут иметь негауссовый характер. При изучении прохождения сигналов через неоднородные среды, переотражения сигналов от морской поверхности, загоризонтной радиолокации и других процессов необходимо использование негауссовых моделей сигналов и помех как наиболее адекватных, интерес к которым в последнее время существенно возрастает [3—5].

Использование классических вероятностных критериев качества для негауссовых моделей сигналов и помех вызывает ряд существенных трудностей, связанных как с синтезом алгоритмов обработки, так и с их практическим построением. Поэтому для решения данных проблем применяются марковские процессы и полигауссовы модели, основанные также на вероятностном подходе к описанию случайных процессов, для которых характерны повышенная сложность получаемых решений и трудность практической реализации.

Рассмотрим подход, основанный на более грубой количественной оценке числовых характеристик случайных величин, таких как математическое ожидание, дисперсия и др. [6]. Использование такого подхода позволило успешно решать многие задачи по оценке параметров, фильтрации, обнаружению сигналов на фоне негауссовых помех [7—12].

Новый подход для проверки статистических гипотез основан на использовании моментов решающей функции. Критерии качества данного подхода назовем моментными критериями, использование которых обеспечило высокую эффективность решения задач обнаружения сигналов на фоне негауссовых помех [9—11]. При адаптации моментного критерия качества к многоальтернативной проверке статистических гипотез будем использовать полиномиальные решающие правила (РП) и моментно-кумулянтное описание случайных величин.

Адаптация моментного критерия качества для многоальтернативной задачи проверки статистических гипотез. Моментный асимптотический нормальный критерий качества для проверки простых статистических гипотез применяется при решении многих прикладных задач. Он основан на использовании стохастических полиномов в качестве решающей функции и моментно кумулянтного описания случайных величин [9—12].

Логарифм отношения правдоподобия для независимых выборочных значений $\mathbf{X}=\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ при проверке простой гипотезы H_1 относительно альтернативы H_0 можно представить в виде стохастического ряда [9, 11]

$$\ln \frac{W(\mathbf{X}/H_1)}{W(\mathbf{X}/H_0)} = k_0 + \sum_{i=1}^{\infty} k_i \sum_{v=1}^{n} x_v^i,$$

где k_0, k_{iv} — коэффициенты такого ряда. При конечной последовательности ряда РП для одинаково распределенных и независимых выборочных значений можно представить в виде полинома степени s:

$$\Lambda_{sn}(\mathbf{X}) = k_0 + \sum_{i=1}^{s} k_i \sum_{v=1}^{n} x_v^i \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 0, \tag{1}$$

где неизвестные коэффициенты необходимо находить из условия минимума выбранного вероятностного критерия качества, что сделать в общем случае нельзя. Поэтому чтобы использовать РП (1) для проверки простых статистических гипотез, необходимо так изменить критерии выбора РП, чтобы они, с одной стороны, были связаны с хорошо изученными вероятностными критериями, а с другой стороны, позволяли выразить критерий качества через неопределенные коэффициенты k_0 и k_i. Таким условиям удовлетворяют моментные критерии качества, а именно асимптотически нормальный критерий.

При рассмотрении асимптотических свойств стохастических полиномов в общем случае сумма независимых и одинаково распределенных случайных величин $x_1, x_2, ..., x_n$, для которых математическое ожидание $m_i = E(x^i)$ и дисперсия каждой случайной величины являются конечными величинами согласно центральной предельной теореме при $n \to \infty$ и любом i, распределена по нормальному закону. Поскольку в стохастическом полиноме (1) имеется сумма случайных величин с таким свойством и коэффициентами k_i, не равных бесконечности (и не все из них равны нулю), то и в целом выражение (1) при любом значении степени полинома s асимптотически при $n \to \infty$ также будет распределено по нормальному закону с математическим ожиданием

$$E = n \sum_{i=1}^{s} k_i m_i + k_0$$

и дисперсией

$$G = n \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{s} k_i k_j F_{i,j},$$

где $F_{i,j} = E\left\lfloor (x^i - m_i)(x^j - m_j) \right\rfloor = m_{i+j} - m_i m_j$.

В общем виде синтезированное РП должно быть таким, чтобы минимизировать один из вероятностных критериев, в частности критерий идеального наблюдателя, при котором рассматривается сумма вероятностей ошибок первого α и второго β рода [1, 2]. Тогда РП (1) необходимо подобрать так, чтобы сумма α и β была минимальной. Поскольку РП (1) асимптотически при $n \to \infty$ распределено по нормальному закону, вероятность ошибок первого рода при осуществлении гипотезы H_0 имеет вид

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2\pi G_0}} \int_0^\infty \exp\left[-\frac{(x - E_0 - k_0)^2}{2G_0}\right] dx,$$

где $E_0 = E[\Lambda_{ns}(\mathbf{x}) / H_0]$; $G_0 = E\{[\Lambda_{ns}(\mathbf{x}) - E_0]^2 / H_0\}$. После замены переменных получим

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{V_0}^\infty \exp\left[-\frac{z^2}{2}\right] dz,$$

где $V_0 = \dfrac{-E_0 - k_0}{G_0^{0,5}}$.

Рассуждая аналогично, находим вероятность ошибок второго рода при осуществлении гипотезы H_1:

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{2\pi G_1}} \int_{-\infty}^0 \exp\left[-\frac{(x - E_1 - k_0)^2}{2G_1}\right] dx,$$

где $E_1 = E[\Lambda_{ns}(\mathbf{x}) / H_1]$; $G_1 = E\{[\Lambda_{ns}(\mathbf{x}) - E_1]^2 / H_1\}$. После замены переменных вероятность ошибок второго рода будет иметь вид

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{V_1} \exp\left[-\frac{z^2}{2}\right] dz,$$

где $V_1 = \dfrac{-E_1 - k_0}{G_1^{0,5}}$. Тогда асимптотическое значение вероятностного критерия суммы вероятностей ошибок в общем виде запишем так:

$$R(\alpha, \beta) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{V_0}^\infty \exp\left(\frac{-z^2}{2}\right) dz + \int_{-\infty}^{V_1} \exp\left(\frac{-z^2}{2}\right) dz\right].$$

При этом константа k_0 РП (1), минимизирующая $R(\alpha,\beta)$, имеет вид

$$k_0 = -\frac{E_1 G_0^{0,5} + E_0 G_1^{0,5}}{G_0^{0,5} + G_1^{0,5}}. \tag{2}$$

Для константы (2) пределы интегрирования $V_0 = Yu^{-0,5}, V_1 = -Yu^{-0,5}$, где

$$Yu[E,G] = \frac{(G_0^{0,5} + G_1^{0,5})^2}{(E_1 - E_0)^2}$$

есть асимптотически нормальный критерий качества, свойства которого рассмотрены в работах [9, 11]. Очевидно, что минимум критерия $Yu[E,G]$ будет минимизировать и сумму вероятностей ошибок $R(\alpha,\beta)$.

При обобщении задачи проверки простых статистических гипотез получим общий случай рассмотрения $N+1$ гипотез, который относится к задачам различения N сигналов на фоне помех. Адаптируем асимптотически нормальный критерий качества $Yu[E,G]$ для многоальтернативной проверки статистических гипотез при использовании полиномиальных РП и моментно-кумулянтного описания случайных величин.

Сформулируем задачу различения сигналов на фоне помех. Пусть на интервале времени $(0, T)$ наблюдаются случайные сигналы $\xi_i(t)$, $i = \overline{1, N}$, по которым будут приняты решения о реализации соответствующей гипотезы H_i, т.е. о приеме соответствующего полезного сигнала $s_i(t)$, подлежащего различению, либо решение о реализации гипотезы H_0, соответствующей отсутствию полезного сигнала. Принимаемые сигналы $\xi_i(t)$ представляют собой аддитивную смесь $\xi_i(t) = s_i(t) + \eta_i(t)$, где $\eta_i(t)$ — негауссова помеха с нулевым математическим ожиданием, дисперсией χ_2 и последовательностью моментов и кумулянтов. Каждому принимаемому сигналу соответствует моментно-кумулянтное описание, представленное в виде конечной последовательности $m_i\lfloor\{\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, ..., \alpha_{i\mu}\}, \{0, \chi_{i2}, \gamma_{i3}, \gamma_{i4}, ..., \gamma_{i\mu}\}\rfloor$, где $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, ..., \alpha_{i\mu}$ — начальные моменты, описывающие признаки сигнала $s_i(t)$; $\gamma_{i2}, \gamma_{i3}, \gamma_{i4}, ..., \gamma_{i\mu}$ — кумулянтные коэффициенты, описывающие признаки негауссовой помехи $\eta_i(t)$.

Рассмотрим в общем случае $N+1$ гипотез, относительно которых необходимо принять решение в пользу только одной. Тогда, заменив непрерывное время наблюдения t на дискретные отсчеты v объемом n, проведенные по наблюдаемым сигналам $\xi_i(t)$, для стационарных негауссовых помех можем записать:

$$H_i : \xi_{iv} = s_{iv}(\alpha_k) + \eta_i(\gamma_k),\ \ i = \overline{1, N},\ \ k = \overline{1, \mu},\ \ v = \overline{1, n}$$

$$H_0 : \xi_{0v} = \eta_0(\gamma_k),$$

где $s_{iv}(\alpha_k)$ — i-й сигнал с известными параметрами α_k; $\eta_i(\gamma_k)$ — негауссова случайная величина с известными параметрами в виде кумулянтов γ_k.

Согласно классическому вероятностному подходу [1] оптимальный байесовский алгоритм различения сигналов находим из условия минимума среднего риска

$$R=\sum_{j=0}^{N}\sum_{i=0}^{N}\Pi_{ij}\,p_j P(\gamma_i|H_j),$$

где Π_{ij} — элементы матрицы потерь; $p_j=P(H_j)$ — вероятности появления гипотез H_j; $P(\gamma_i|H_j)$ — вероятности ошибок вынесения решений о событии γ_i при реализации гипотезы H_j. Тогда оптимальный алгоритм различения сигналов представим в виде

$$p_i W(\mathbf{X}/H_i)=\max_{j=\overline{0,N}}\{p_j W(\mathbf{X}/H_j)\},\ i=\overline{0,N}, \tag{3}$$

или

$$\ln W(\mathbf{X}/H_i)+\ln p_i=\max_{j=\overline{0,N}}\{\ln W_j(\mathbf{X}/H_j)+\ln p_j\},\ i=\overline{0,N}.$$

Минимальной достаточной статистикой для поставленной задачи является N скалярных функций векторной выборки $\mathbf{X}$ отношения правдоподобия $\Lambda_i(\mathbf{X})=W(\mathbf{X}/H_i)/W(\mathbf{X}/H_0)$. Используя критерий максимума апостериорной вероятности, решение о передаче сигнала $s_i(t)$ (реализация гипотезы H_i) принимаем тогда, когда

$$\ln\Lambda_i(\mathbf{X})+\ln p_i=\max_{j=\overline{0,N}}\{\ln\Lambda_j(\mathbf{X})+\ln p_j\},\ \Lambda_j(\mathbf{X})p_j/p_0\ge 1,$$

а решение о том, что сигналы отсутствуют (реализация гипотезы H_0), — в случае, если $\Lambda_j(\mathbf{X})p_j/p_0<1,\ j=\overline{1,N}$.

Решение подобных задач в основном рассматривается при нормальном законе распределения $W(\mathbf{X}/H_i)$ случайных величин. В других случаях бывает затруднительно найти плотности распределения и, соответственно, получить решения вида (3). Тогда можно воспользоваться приемом [9, 11], представляющим собой разложение отношения правдоподобия проверки статистических гипотез H_m и H_r в стохастический полином конечной степени s, который при простых матрицах потерь и равновероятном появлении гипотез принимает вид

$$\Lambda^{(mr)}(\mathbf{X})_{sn}=\sum_{i=1}^{s}k_i^{(mr)}\sum_{v=1}^{n}x_v^i+k_0^{(mr)}\underset{H_r}{\overset{H_m}{\gtrless}}0,\ r,m=\overline{0,N-1},\ r\ne m, \tag{4}$$

где неизвестные коэффициенты $k_i^{(mr)}$, $k_0^{(mr)}$ находятся по заданному критерию качества. Следует заметить, что при использовании стохастического полинома (4) для многоальтернативной проверки статистических гипотез его неизвестные коэффициенты необходимо находить таким образом, чтобы они, с одной стороны, минимизировали вероятности ошибок РП, а с другой — учитывали взаимосвязи между проверяемыми гипотезами H_m и H_r.

Рассмотрим общий случай обработки статистически независимых одинаково распределенных выборочных значений **X**, для которых коэффициент $k_i^{(mr)}$ не зависит от номера выборочных значений v.

Для оценки качества полиномиальных РП (4) используем матрицу вероятностей ошибок различения сигналов $p_{ij} = P(\gamma_i | H_j)$, $i, j = \overline{0, N}$, характеризующую как вероятности ошибок определения максимального значения (3), так и вероятность перепутывания гипотез:

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & 0 & 1 & 2 & \cdots & N \\
\hline
H_1 & p_{00} & p_{01} & p_{02} & \cdots & p_{0N} \\
H_1 & p_{10} & p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1N} \\
H_1 & p_{20} & p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2N} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
H_N & p_{N0} & p_{N1} & p_{N2} & \cdots & p_{NN}
\end{array}.
$$

Отсюда видно, что вероятность ошибок реализации соответствующих гипотез определяется так:

$$P(H_0) = \sum_{i=1}^{N} p_{0i};\ P(H_1) = \sum_{i=0,\, i\neq 1}^{N} p_{1i};\ P(H_2) = \sum_{i=0,\, i\neq 2}^{N} p_{2i},\ \ldots,\ P(H_N) = \sum_{i=0,\, i\neq N}^{N} p_{Ni}.$$

Значения p_{ii}, $i = \overline{0, N}$, на главной диагонали характеризуют вероятности правильного различения сигналов. Легко показать, что p_{ij}, лежащие над главной диагональю, представляют собой вероятности ошибок первого рода $\alpha^{(mr)}$ всех возможных РП (4), а лежащие под главной диагональю — вероятности ошибок второго рода $\beta^{(mr)}$. Тогда, в соответствии с байесовским подходом, при использовании простых матриц потерь и равновероятном появлении гипотез, т.е. при $p_0 = p_1 = \ldots = p_N = 1/(N+1)$, оптимальные коэффициенты РП (4) должны минимизировать среднее значение риска:

$$R = \sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{N} p_{ij}.$$

В предположении большого числа выборочных значений $n \to \infty$, согласно предельной центральной теореме, вероятности ошибок РП вида (4) будут стремиться к нормальному закону распределения [11]. Тогда сумма асимптотических вероятностей ошибок первого и второго рода для одной решающей функций $\Lambda^{(mr)}(\mathbf{X})$ проверки гипотез H_m и H_r примет вид

$$Yu(E,G)^{(mr)} = \frac{[(G_m^{(mr)})^{0,5} + (G_r^{(mr)})^{0,5}]^2}{[E_m^{(mr)} - E_r^{(mr)}]^2}, \; r, m = \overline{0, N}, \; r \neq m, \tag{5}$$

где математические ожидания и дисперсии РП при гипотезах H_m и H_r соответственно имеют вид

$$E_m^{(mr)} = n\sum_{i=1}^{s} k_i^{(mr)} m_i^{(m)}; \; E_r^{(mr)} = n\sum_{i=1}^{s} k_i^{(mr)} m_i^{(r)};$$

$$G_m^{(mr)} = n\sum_{i=s}^{s}\sum_{j=1}^{s} k_i^{(mr)} k_j^{(mr)} F_{(i,j)}^{(m)}; \; G_r^{(mr)} = n\sum_{i=s}^{s}\sum_{j=1}^{s} k_i^{(mr)} k_j^{(mr)} F_{(i,j)}^{(r)},$$

где $F_{(i,j)}^{(m)} = m_{(i+j)}^{(m)} + m_i^{(m)} m_j^{(m)}$ и $F_{(i,j)}^{(r)} = m_{(i+j)}^{(r)} + m_i^{(r)} m_j^{(r)}$ — центральные корелянты наблюдаемой случайной величины ξ (i, j)-го порядка соответственно при гипотезах H_m и H_r; $m_i^{(m)}$ и $m_i^{(r)}$ — начальные моменты i-го порядка случайной величины ξ соответственно при гипотезах H_m и H_r.

В случае, когда оптимальный коэффициент $k_0^{(mr)}$ РП (4) отличается от (2), т.е.

$$k_0^{(mr)} = -\frac{E_m^{(mr)}(G_r^{(mr)})^{0,5} + T_r^{(mr)}(G_m^{(mr)})^{0,5}}{(G_m^{(mr)})^{0,5} + (G_r^{(mr)})^{0,5}}, \tag{6}$$

неизвестные коэффициенты $k_i^{(mr)}$ (4), минимизирующие функционал (5), находятся из решения системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^{s} k_j^{(mr)} \left[(1+R^{(mr)}) F_{(i,j)}^{(r)} + \left(1+\frac{1}{R^{(mr)}}\right) F_{(i,j)}^{(m)} \right] = m_i^{(m)} - m_i^{(r)}, \; i = 1, s, \tag{7}$$

где $R^{(mr)} = [G_m^{(mr)} / G_r^{(mr)}]^{0,5}$.

Определение 1. Положим, что функционал (5) является критерием качества выбора РП (4), и будем считать наилучшим то правило, которое при $k_0^{(mr)}$ вида (6) и $k_i^{(mr)}$, найденных из (7), минимизирует правую часть (5). Данный критерий назовем адаптированным асимптотически нормальным моментным критерием качества для проверки многоальтернативных статистических гипотез.

При таком полиномиальном подходе к оптимальному выбору РП различения сигналов на фоне помех математическая структура выбора гипотезы H_m имеет вид

$$H_m : \max_{m=\overline{1,N}} \left\{ \sum_{i=1}^{s} \sum_{v=1}^{n} k_i^{m0} x_v^i + k_0^{m0} \right\} > 0;\ H_0 : \max_{m=\overline{1,N}} \left\{ \sum_{i=1}^{s} \sum_{v=1}^{n} k_i^{m0} x_v^i + k_0^{m0} \right\} < 0;$$

$$\sum_{i=1}^{s} \sum_{v=1}^{n} k_i^{m0} x_v^i + k_0^{m0} > \sum_{i=1}^{s} \sum_{v=1}^{n} k_i^{r0} x_v^i + k_0^{r0},\ m, r = \overline{1, N},\ r \neq m.$$

Рассматривая общий случай проверки $N+1$ гипотез для качественной оценки полученных РП различения сигналов на фоне помех, введем величину, характеризующую общие асимптотические вероятности ошибок различения гипотезы H_m:

$$Yu(E,G)^{(m)} = \sum_{r=0}^{N} \frac{[(G_m^{(mr)})^2 + (G_r^{(mr)})^2]^2}{[E_m^{(mr)} - E_r^{(mr)}]^2},\ m = 1, N,\ m \neq r.$$

Свойство 1. Если оптимальные коэффициенты РП (4) выбраны из решения системы алгебраических уравнений (7), то для них выполняется следующее условие:

$$I_{Yusn}^{(mr)} = n \sum_{i=1}^{s} k_j^{(mr)} k_i^{(mr)} [F_{(i,j)v}^{(r)} [1 + R^{(mr)}] + F_{(i,j)v}^{(m)} [1 + 1/R^{(mr)}]] =$$

$$= n \sum_{i=1}^{s} k_i^{(mr)} (m_i^m - m_i^r),\quad m, r = \overline{1, N},\quad r \neq m.$$

Определение 2. Величину $I_{Yusn}^{(mr)}$ будем считать количеством извлекаемой информации в выборке объемом n о различии гипотез H_m и H_r с помощью РП в виде стохастического полинома степени s (4) с коэффициентами, оптимальными по адаптированному асимптотически нормальному моментному критерию качества для проверки сложных статистических гипотез.

Свойство 2. Для оптимальных коэффициентов (7) РП вида (4) критерий качества выбора РП вида (5) для многоальтернативной проверки статистических гипотез является величиной, обратной количеству извлекаемой информации из выборочных значений о различении гипотез H_m и H_r:

$$I_{Yusn}^{(mr)} = \frac{1}{Yu(E,G)^{(mr)}} = n \sum_{i=1}^{m} k_i^{(mr)} (m_i^{(m)} - m_i^{(r)}),\ r = \overline{1, N},\ m \neq r. \quad (8)$$

При увеличении степени стохастических полиномов, реализующих РП, общее количество извлекаемой информации может увеличиваться, а следовательно, могут уменьшаться асимптотические вероятности ошибок, т.е. $I^{(mr)}_{Yun(s+1)} > I^{(mr)}_{Yuns}$. При обработке независимых и неодинаково распределенных выборочных значений $\mathbf{X}$ неизвестные коэффициенты $k_i^{(mr)}$ РП (4) становятся зависимыми от этих выборочных значений, и считать, что сумма $\sum_{i=1}^{s}\sum_{v=1}^{n} k_{iv}^{(mr)} x_v^i$ асимптотически распределена по нормальному закону, нельзя. Поэтому необходимо брать не одну выборку, а так называемую пачку выборок объемом L и рассматривать сумму вида

$$\sum_{p=1}^{L}\sum_{i=1}^{s}\sum_{v=1}^{n} k_{iv}^{(mr)} x_{vp}^{i}, \tag{9}$$

которую можно записать так:

$$\sum_{i=1}^{s}\sum_{v=1}^{n} k_{iv}^{(mr)} \left(\sum_{p=1}^{L} x_{vp}^{i}\right).$$

Выражение в скобках представляет собой сумму независимых одинаково распределенных v-х выборочных значений пачки. Следовательно, выражение (9) асимптотически распределено по нормальному закону. Тогда для нахождения коэффициентов $k_0^{(mr)}$ и $k_{iv}^{(mr)}$ можем воспользоваться асимптотически нормальным критерием качества. При этом РП вида (4) трансформируется в следующее РП для неодинаково распределенных выборочных значений:

$$\Lambda^{(mr)}(\mathbf{X})_{sn} = \sum_{p=1}^{L}\sum_{i=1}^{s}\sum_{v=1}^{n} k_{iv}^{(mr)} x_{vp}^{i} + k_0^{(mr)} \underset{H_r}{\overset{H_m}{\gtrless}} 0. \tag{10}$$

В этом случае математические ожидания и дисперсии РП (10) имеют вид

$$E_m^{(mr)} = L\sum_{i=1}^{s}\sum_{v=1}^{n} k_{iv}^{(mr)} m_{iv}^{(m)}; \quad E_r^{(mr)} = L\sum_{i=1}^{s}\sum_{v=1}^{n} k_{iv}^{(mr)} m_{iv}^{(r)};$$

$$G_m^{(mr)} = L\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s}\sum_{v=1}^{n} k_{iv}^{(mr)} k_{jv}^{(mr)} F_{(i,j)v}^{(m)}; \quad G_r^{(mr)} = L\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s}\sum_{v=1}^{n} k_{iv}^{(mr)} k_{jv}^{(mr)} F_{(i,j)v}^{(r)},$$

где $F_{(i,j)v}^{(m)} = m_{(i+j)v}^{(m)} + m_{iv}^{(m)} m_{jv}^{(m)}$; $F_{(i,j)v}^{(r)} = m_{(i+j)v}^{(r)} + m_{iv}^{(r)} m_{jv}^{(r)}$.

Неопределенные коэффициенты $k_{iv}^{(mr)}$ находим из условия минимума критерия $Yu(E,G)^{(mr)}$ (5), который в расширенном варианте имеет вид

$$Yu(E,G)^{(mr)}=\frac{\left[\left(\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s}\sum_{v=1}^{n}k_{iv}^{(mr)}k_{iv}^{(mr)}F_{(i,j)v}^{(r)}\right)^{0,5}+\left(\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s}\sum_{v=1}^{n}k_{iv}^{(mr)}k_{iv}^{(mr)}F_{(i,j)v}^{(r)}\right)^{0,5}\right]^{2}}{L\left(\sum_{i=1}^{s}\sum_{v=1}^{n}k_{iv}^{(mr)}(m_{iv}^{(m)}-m_{iv}^{(r)})\right)^{2}}.$$

Тогда систему уравнений для нахождения коэффициентов $k_{iv}^{(mr)}$ запишем так:

$$\sum_{j=1}^{s}k_{jv}^{(mr)}[F_{(i,j)v}^{(r)}[1+R^{(mr)}]+F_{(i,j)v}^{(m)}[1+1/R^{(mr)}]]=m_{iv}^{(m)}-m_{iv}^{(r)},\ i=\overline{1,s},\ v=\overline{1,n}.$$

При перемножении левой и правой частей данного равенства на $k_{iv}^{(mr)}$ получим равенство

$$I_{Yusv}^{(mr)}=\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s}k_{iv}^{(mr)}k_{jv}^{(mr)}[F_{(i,j)v}^{(r)}[1+R^{(mr)}]+F_{(i,j)v}^{(m)}[1+1/R^{(mr)}]]=$$

$$=\sum_{i=1}^{s}k_{iv}^{(mr)}(m_{iv}^{(m)}-m_{iv}^{(r)}),$$

которое, согласно определению 2, будем считать количеством извлекаемой информации из одного выборочного значения о различии гипотез H_m и H_r с помощью РП (10) для неодинаково распределенных выборочных значений.

Поскольку имеется L пачек, в каждой из которых содержится n выборочных значений, общее количество извлекаемой информации о различии гипотез H_m и H_r имеет вид

$$I_{YusNn}^{(mr)}=L\sum_{v=1}^{n}\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s}k_{iv}^{(mr)}k_{jv}^{(mr)}[F_{(i,j)v}^{(r)}[1+R^{(mr)}]+F_{(i,j)v}^{(m)}[1+1/R^{(mr)}]]=$$

$$=L\sum_{v=1}^{n}\sum_{i=1}^{s}k_{iv}^{(mr)}(m_{iv}^{(m)}-m_{iv}^{(r)}).$$

В этом случае при рассмотрении общего подхода к построению полиномиальных РП различения $N+1$ статистических гипотез математическая структура выбора гипотезы H_m или H_r имеет вид

$$H_m:\max_{r=\overline{1,N}}\left\{\sum_{p=1}^{L}\sum_{i=1}^{s}\sum_{v=1}^{n}k_{iv}^{(m0)}x_{vp}^{i}+k_0^{(m0)}\right\}>0\,;$$

$$H_0: \max_{r=\overline{1,N}} \left\{ \sum_{p=1}^{L} \sum_{i=1}^{s} \sum_{v=1}^{n} k_{iv}^{(m0)} x_{vp}^{i} + k_0^{(m0)} \right\} < 0 ;$$

$$\sum_{p=1}^{L} \sum_{i=1}^{s} \sum_{v=1}^{n} k_{iv}^{(m0)} x_{vp}^{i} + k_0^{m0} > \sum_{p=1}^{L} \sum_{i=1}^{s} \sum_{v=1}^{n} k_{iv}^{(r0)} x_{vp}^{i} + k_0^{(r0)}, \quad m, r = \overline{1, N}, \quad r \neq m.$$

На основе адаптации моментного асимптотически нормального критерия качества для проверки многоальтернативных статистических гипотез могут быть построены нелинейные эффективные РП с меньшими вероятностями ошибок по сравнению с известными результатами. Выполним синтез таких РП на примере проверки трех статистических гипотез.

Построение нелинейных алгоритмов различения сигналов на фоне асимметричных негауссовых помех. Рассмотрим один из простых случаев обработки независимых и одинаково распределенных случайных величин. Пусть на входе системы наблюдается аддитивная смесь случайного сигнала $\xi(t)$ и асимметричной негауссовой помехи η, описываемой кумулянтной последовательностью γ_i, $i = 1, 2s$. Обработке подлежат выборочные значения $\mathbf{X} = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ объемом n. При дискретизации входного сигнала $\xi(t)$ по результатам обработки необходимо вынести решение о выполнении одной из следующих гипотез:

H_0 — полезный сигнал отсутствует, принята помеха: $\xi_v = \eta$;

H_1 — принятый сигнал a_1: $\xi_v = a_1 + \eta$;

H_2 — принятый сигнал a_2: $\xi_v = a_2 + \eta$.

Здесь a_1 и a_2 — полезные постоянные сигналы, которые необходимо различить.

Обобщенное РП (4) для различения трех статистических гипотез, согласно поставленной задаче, представим в виде следующих РП:

$\Lambda_{sn}^{(10)}(\mathbf{X})$ — проверка гипотезы H_1 относительно гипотезы H_0;

$\Lambda_{sn}^{(20)}(\mathbf{X})$ — проверка гипотезы H_2 относительно гипотезы H_0;

$\Lambda_{sn}^{(21)}(\mathbf{X})$ — проверка гипотезы H_2 относительно гипотезы H_1.

Вероятности ошибок таких РП представлены в матрице вероятностей ошибок различения сигналов при $N = 0 \div 2$. В этом случае формируется система уравнений, при решении которой принимается соответствующая гипотеза.

Пример.

Выполняется гипотеза H_0:

$$\Lambda_{sn}^{(10)}(\mathbf{X}) < 0, \ \Lambda_{sn}^{(20)}(\mathbf{X}) < 0.$$

Выполняется гипотеза H_1:

$$\Lambda_{sn}^{(10)}(\mathbf{X})>0,\ \ \Lambda_{sn}^{(21)}(\mathbf{X})<0.$$

Выполняется гипотеза H_2:

$$\Lambda_{sn}^{(21)}(\mathbf{X})>0,\ \ \Lambda_{sn}^{(20)}(\mathbf{X})>0.$$

Определим начальные моменты случайной величины ξ при выполнении гипотез H_0, H_1, H_2. При выполнении гипотезы H_0 начальные моменты до 12-го порядка определяются в общем виде: $m_i^{(0)}(\xi)=E(\xi)^i=$ $=E(\eta)^i$. Асимметричная негауссова величина первого типа первого вида [7, 8] с нулевым математическим ожиданием и дисперсией χ^2, описываемая только коэффициентом асимметрии γ_3, а все остальные кумулянты выше третьего порядка равны нулю, примет вид

$$m_1^{(0)}=0,\ m_2^{(0)}=\chi_2,\ m_3^{(0)}=\gamma_3\chi_2^{3/2},\ m_4^{(0)}=3\chi_2^2,\ m_5^{(0)}=10\gamma_3\chi_2^{3/2},$$

$$m_6^{(0)}=(15+10\gamma_3^2)\chi_2^3;$$

$$m_7^{(0)}=105\gamma_3\chi_2^{7/2},\ m_8^{(0)}=(105+280\gamma_3^2)\chi_2^4,\ \ m_9^{(0)}=(1260\gamma_3+280\gamma_3^3)\chi_2^{9/2};$$

$$m_{10}^{(0)}=(945+6300\gamma_3^2)\chi_2^5,\ \ m_{11}^{(0)}=(17325\gamma_3+15400\gamma_3^3)\chi_2^{11/2};$$

$$m_{12}^{(0)}=(10395+138600\gamma_3^2+15400\gamma_3^4)\chi_2^6.$$

При выполнении гипотез H_r, $r=1,2$, начальные моменты до 12-го порядка определяются выражением $m_i^{(r)}(\xi)=E(a_r+\eta)^i$, $r=1,2$. Здесь

$$m_1^{(r)}=q_r^{1/2}\chi_2^{1/2},\ m_2^{(r)}=(1+q_r)\chi_2,\ \ m_3^{(r)}=(3q_r^{1/2}+q_r^{3/2}+\gamma_3)\chi_2^{3/2};$$

$$m_4^{(r)}=(3+6q_r+q_r^2+4q_r^{1/2}\gamma_3)\chi_2^2,$$

$$m_5^{(r)}=(15q_r^{1/2}+10q_r^{3/2}+q_r^{5/2}+(10+10q_r)\gamma_3)\chi_2^{5/2};$$

$$m_6^{(r)}=(15+45q_r+15q_r^2+q_r^3+(60q_r^{1/2}+20q_r^{3/2})\gamma_3+10\gamma_3^2)\chi_2^3;$$

$$m_7^{(r)}=(105q_r^{1/2}+105q_r^{3/2}+21q_r^{5/2}+q_r^{7/2}+(105+210q_r+35q_r^2)\gamma_3+$$
$$+70q_r^{1/2}\gamma_3^2)\chi_2^{7/2};$$

$$m_8^{(r)}=(105+420q_r+210q_r^2+28q_r^3+q_r^4+(840q_r^{1/2}+560q_r^{3/2}+56q_r^{5/2})\gamma_3+$$
$$+(280q_r^{5/2}+280)\gamma_3^2)\chi_2^4;$$

$$m_9^{(r)} = (945q_r^{1/2} + 1260q_r^{3/2} + 378q_r^{5/2} + 36q_r^{7/2} + q_r^{9/2} + (1260 + 3780q_r +$$

$$+1260q_r^2 + 84q_r^3)\gamma_3 + (2520q_r^{1/2} + 840q_r^{3/2})\gamma_3^2 + 280\gamma_3^3)\chi_2^{9/2};$$

$$m_{10}^{(r)} = (945 + 4725q_r + 3150q_r^2 + 630q_r^3 + 45q_r^4 + q_r^5 +$$

$$+(1260q_r^{1/2} + 12600q_r^{3/2} + 2520q_r^{5/2} + 120q_r^{7/2})\gamma_3 +$$

$$+(6300 + 12600q_r + 2100q_r^2)\gamma_3^2 + 2800q_r^{1/2}\gamma_3^3)\chi_2^5;$$

$$m_{11}^{(r)} = (10395q_r^{1/2} + 17325q_r^{3/2} + 6930q_r^{5/2} + 990q_r^{7/2} + 55q_r^{9/2} + q_r^{11/2} +$$

$$+(17325 + 69300q_r + 34650q_r^2 + 4620q_r^3 + 165q_r^4)\gamma_3 +$$

$$+(69300q_r^{1/2} + 46200q_r^{3/2} + 4620q_r^{5/2})\gamma_3^2 + (15400 + 15400q_r)\gamma_3^3)\chi_2^{11/2};$$

$$m_{12}^{(r)} = (10395 + 62370q_r + 51975q_r^2 + 13860q_r^3 + 1485q_r^4 + 66q_r^5 + q_r^6 +$$

$$+(207900q_r + 277200q_r^{3/2} + 83160q_r^{5/2} + 7920q_r^{7/2} + 220q_r^{9/2})\gamma_3 +$$

$$+(138600 + 415800q_r + 138600q_r^2 + 9240q_r^3)\gamma_3^2 +$$

$$+(184800q_r^{1/2} + 61600q_r^{3/2})\gamma_3^3 + 15400)\gamma_3^4)\chi_2^6,$$

где $q_r = a_r^2/\chi_2$ — отношение сигнал/шум по мощности при реализации гипотезы H_r. Соответствующие коррелянты $F_{(i,j)}^{(m)}$ и $F_{(i,j)}^{(r)}$ определяются из приведенных начальных моментов.

С учетом неизвестных коэффициентов (6), (7) указанные выше РП (4) при степени полинома $s = 1$ будут линейными и примут следующий окончательный вид:

$$\Lambda_{sn}^{(10)}(\mathbf{X}) = \frac{1}{n}\sum_{v=1}^{n} x_v - \frac{a_1}{2} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 0, \quad \Lambda_{sn}^{(20)}(\mathbf{X}) = \frac{1}{n}\sum_{v=1}^{n} x_v - \frac{a_2}{2} \underset{H_0}{\overset{H_2}{\gtrless}} 0,$$

$$\Lambda_{sn}^{(21)}(\mathbf{X}) = \frac{1}{n}\sum_{v=1}^{n} x_v - \frac{a_2 + a_1}{2} \underset{H_1}{\overset{H_2}{\gtrless}} 0. \tag{11}$$

Необходимо заметить, что линейные РП (11) аналогичны выражениям, полученным из отношения правдоподобия (3) для гауссовых случайных величин, что подтверждает тесную связь данного моментного критерия качества с классическими вероятностными критериями, в данном случае с критерием идеального наблюдателя [1, 2].

Общее количество информации, извлекаемой из выборочных значений для РП (11), согласно (8), определяется так:

$$I_{Yu1n} = I_{Yu1n}^{(10)} + I_{Yu1n}^{(20)} + I_{Yu1n}^{(21)},$$

где

$$I_{Yu1n}^{(10)} = \frac{nq_1}{4},\ I_{Yu1n}^{(20)} = \frac{nq_2}{4},\ I_{Yu1n}^{(21)} = \frac{n(q_2^{0,5} - q_1^{0,5})^2}{4}.$$

В этом случае вероятности ошибок РП следующие:

$$\Lambda_{sn}^{(10)}(\mathbf{X}) — R^{(10)} = p_{01} + p_{10};$$

$$\Lambda_{sn}^{(20)}(\mathbf{X}) — R^{(20)} = p_{02} + p_{20};$$

$$\Lambda_{sn}^{(21)}(\mathbf{X}) — R^{(21)} = p_{21} + p_{12}.$$

Тогда сумма вероятностей ошибок для линейных РП (11) о различии гипотез H_m и H_r с учетом симметричности вероятностей ошибок p_{ij}, $i, j = 0, 2,\ i \neq j$, определяется выражением

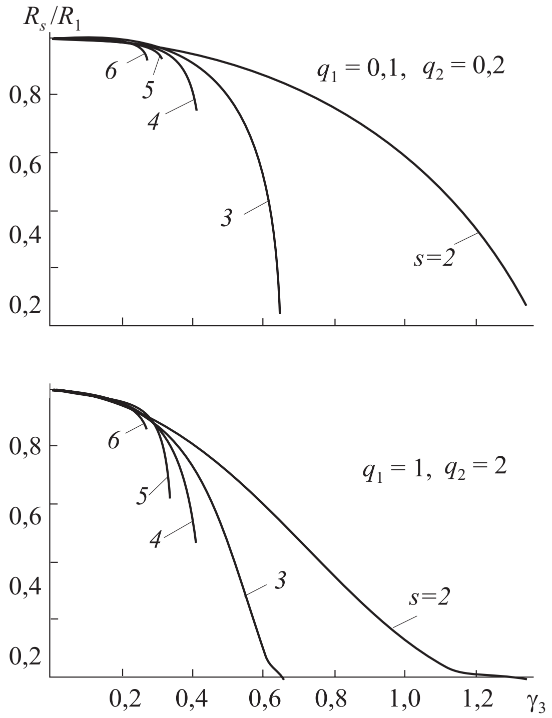
$$R^{(mr)}(p_{ij}) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{V^{(mr)}}^{\infty} \exp\left(\frac{-z^2}{2}\right) dz, \tag{12}$$

где $V^{(mr)} = (I_{Yu1n}^{(mr)})^{0,5}$ — пределы интегрирования, а общая вероятность ошибок R_s полиномиальных РП степени s — как сумма выражений (12).

Из (12) следует, что асимптотически с увеличением числа выборочных значений n количество извлекаемой информации из выборочных значений линейно возрастает, следовательно, сумма вероятностей ошибок каждого из РП стремится к нулю.

Следует заметить, что в линейных РП (11) не учитываются негауссовы распределения выборочных значений в виде последовательности моментов и кумулянтов. Поэтому представляет интерес увеличение степени полинома РП. В этом случае получаем такие РП, в которых выборочные значения подвергаются нелинейным преобразованиям с учетом коэффициентов k_i, включая коэффициент асимметрии γ_3. Из-за громоздкости эти выражения не приводятся.

Результат анализа нелинейной обработки выборочных значений графически представлен на рисунке, из которого видно, что учет тонкой структуры негауссовой помехи в виде коэффициента асимметрии γ_3 позволяет уменьшить значение R_s нелинейных РП по сравнению с линейными. Наибольший эффект наблюдается при значениях γ_3, приближающихся к границе области допустимых значений (ОДЗ) и зависящих от



Зависимости отношения вероятностей ошибок РП при $s = 2 \div 6$ к вероятности ошибок при $s = 1$ от значений коэффициента асимметрии γ_3 для различных значений отношения сигнал/шум q_1, q_2 и $n = 100$

объема тел [7, 8]. Области допустимых значений параметра γ_3 для приведенных полиномиальных РП и асимметричной первого типа первого вида негауссовой случайной величины находятся в следующих пределах:

s	2	3	4	5	6
ОДЗ γ_3	(–1,41; 1,41)	(–0,65; 0,65)	(–0,43; 0,43)	(–0,33; 0,33)	(–0,27; 0,27)

Полученные результаты могут найти широкое применение в различных прикладных областях для проверки статистических гипотез при использовании негауссовых моделей сигналов и помех.

Adaptation of the moment asymptotically normal quality criterion for solving multialternative problems of checking statistical hypotheses based on the use of stochastic polynomials and moment-cumulant description of random values has been considered. It is shown that the nonlinear treatment of optional values and allowance for the structure of non-Gaussian noises permits increasing the efficiency of the algorithms of signals distinguishing.

1. *Левин Б. Р.* Теоретические основы статистической радиотехники. — Изд. 3-е, перераб. и доп. — М. : Радио и связь, 1989. — 696 с.
2. *Безрук В. М., Певцов Г. М.* Теоретические основы проектирования систем распознавания сигналов для автоматизированного радиоконтроля. — Харьков : Коллегиум, 2007. — 430 с.
3. *Шелухин О. И., Беляков И. В.* Негауссовские процессы. — СП. : Политехника, 1992. — 312 с.
4. *Тихонов В. А.* Обобщенные модели линейного предсказания негауссовых процессов и их применение в задачах статистической радиотехники// Тези доп. Міжнародної науково-практичної конференції «Обробка сигналів і негаусівських процесів» пам'яті професора Кунченка Ю.П. — Черкаси : ЧДТУ, 2007. — С. 53—55.
5. *Rousseau D., Anand G. V., Chapeau-Blondeau F.* Noise-enhanced Nonlinear Detector to Improve Signal Detection in Non-Gaussian Noise // IEEE Signal Process. — 2006. — Vol. 86, Issue 11. — P. 3456—3465.
6. *Малахов А. Н.* Кумулянтный анализ негауссовских процессов и их преобразований. — М. : Сов. радио, 1979. — 376 с.
7. *Kunchenko Y.* Polynomial Parameter Estimations of Close to Gaussian Random variables. — Germany, Aachen : Shaker Verlag, 2002. — 396 p.
8. *Кунченко Ю. П.* Стохастические полиномы. — Киев : Наук. думка, 2006. — 275 с.
9. *Кунченко Ю. П., Палагин В. В.* Проверка статистических гипотез при использовании полиномиальных решающих правил, оптимальных по моментному критерию суммы асимптотических вероятностей ошибок// Радиоэлектроника и информатика. — 2006. — № 3 (34). — С. 4—11.
10. *Палагін В. В., Жила О. М.* Поліноміальне вирішення задач розпізнавання випадкових сигналів. // Вісн. ЧДТУ. — 2008. — № 2. — С. 31—35.
11. *Палагин В. В.* Построение моментного критерия проверки статистических гипотез при использовании полиномиальных решающих правил. // Электрон. моделирование. — 2008. — **30**, № 3. — С. 57—72.
12. *Палагин В. В.* Моментный критерий качества проверки статистических гипотез для обработки сигналов на фоне коррелированных негауссовских помех. // Системы обработки информации. — 2009. — Вып. 4(78). — С. 96—101.

Поступила 15.03.10;
после доработки 26.05.10

ПАЛАГИН Владимир Васильевич, канд. техн., наук, доцент Черкасского государственного технологического университета. В 1992 г. окончил Киевский политехнический ин-т. Область научных исследований — методы нелинейной обработки сигналов на фоне негауссовых помех.