УДК 539.3

А. Ф. Верлань, д-р техн. наук
Ин-т проблем моделирования в энергетике им. Г. Е.Пухова НАН Украины
(Украина, 03164, Киев, ул. Генерала Наумова, 15,
тел. (044) 4241063, E-mail: averlan@i.com.ua),
Р. А. Абдикаримов, канд. техн. наук
Ташкентский финансовый институт
(Республика Узбекистан, 100084, Ташкент, Кичик халка йули, 7,
тел. (99871) 2346641, E-mail: rabdikarimov@mail.ru),
Х. Эшматов, д-р техн. наук
Ташкентский институт ирригации и мелиорации
(Республика Узбекистан, 100000, Ташкент, ул. Кары Ниязова, 39,
тел. (99871) 2371948, E-mail: heshmatov@mail.ru)

Численное моделирование нелинейных задач динамики вязкоупругих систем с переменной жесткостью

Приведены численный метод и алгоритм решения систем нелинейных интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерры. С помощью предложенного метода решены задачи о нелинейных колебаниях вязкоупругих прямоугольных пластин переменной толщины.

Наведено чисельний метод і алгоритм розв'язування систем нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь типа Вольтери. З використанням запропонованого методу розв'язано задачі про нелінійні коливання в'язкопружних прямокутних пластин змінної товщини.

Ключевые слова: математическая модель, вязкоупругая пластинка, переменная толщина, нелинейные колебания, метод Бубнова—Галеркина, численный метод.

Математическая модель. Для построения математической модели задачи о нелинейном колебании вязкоупругой изотропной оболочки с переменной жесткостью в геометрически нелинейной постановке по кинематической гипотезе Кирхгофа—Лява физическую зависимость между напряжениями $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ и деформациями $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ примем в виде [1, 2]

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2}(1-\Gamma^*)(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y), \; x \leftrightarrow y,$$
$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\mu)}(1-\Gamma^*)\gamma_{xy}, \tag{1}$$

где Γ^* — интегральный оператор с ядром релаксации $\Gamma(t)$,

$$\Gamma^* \varphi = \int_0^t \Gamma(\tau - \tau)\, \varphi(\tau)\, d\tau;$$

μ — коэффициент Пуассона; E — модуль упругости. Здесь и в дальнейшем символ $x \leftrightarrow y$ указывает, что остальные соотношения получаются круговой подстановкой индексов.

Связь между деформациями в срединной поверхности $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ и перемещениями u, v, w по направлениям x, y, z примем в виде [3]

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} - k_x w + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2, \;\; \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} - k_y w + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2,$$
$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}, \qquad (2)$$

где k_x, k_y — кривизны срединной поверхности оболочки, $k_x, k_y = \text{const}$.

Изгибающие и крутящие моменты элемента оболочки имеют вид

$$M_x = -D\,(1-\Gamma^*)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), \quad x \leftrightarrow y,$$
$$H = -D\,(1-\mu)(1-\Gamma^*)\,\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \qquad (3)$$

Здесь D — переменная цилиндрическая жесткость оболочки,

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)},$$

где $h = h(x, y)$.

Уравнения движения элемента вязкоупругой изотропной оболочки с переменной жесткостью примем в виде [3, 4]

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + p_x - \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \qquad \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} + p_y - \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0,$$
$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} + k_x N_x + k_y N_y + \frac{\partial}{\partial x}\left(N_x \frac{\partial w}{\partial x} + N_{xy}\frac{\partial w}{\partial y}\right) + \qquad (4)$$
$$+ \frac{\partial}{\partial y}\left(N_{xy}\frac{\partial w}{\partial x} + N_y \frac{\partial w}{\partial y}\right) + q - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0.$$

Здесь N_x, N_y и N_{xy} — усилия, отнесенные к единице длины сечения оболочки,

$$N_x = \sigma_x h,\ x \leftrightarrow y,\ N_{xy} = \gamma_{xy} h; \tag{5}$$

p_x, p_y и q — интенсивность заданных внешних нагрузок, приложенных к элементу по направлениям соответственно x, y и z.

Подставляя (3) и (5) в (4), получаем систему нелинейных интегро-дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами:

$$
\begin{gathered}
(1-\Gamma^*)\left[h\left(\frac{\partial\varepsilon_x}{\partial x}+\mu\frac{\partial\varepsilon_y}{\partial x}+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial y}\right)+\frac{\partial h}{\partial x}(\varepsilon_x+\mu\varepsilon_y)+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial h}{\partial y}\gamma_{xy}\right]+\\
+\frac{1-\mu^2}{E}p_x-\rho h\frac{1-\mu^2}{E}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0,\\
(1-\Gamma^*)\left[h\left(\frac{\partial\varepsilon_y}{\partial y}+\mu\frac{\partial\varepsilon_x}{\partial y}+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial x}\right)+\frac{\partial h}{\partial y}(\varepsilon_y+\mu\varepsilon_x)+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial h}{\partial x}\gamma_{xy}\right]+\\
+\frac{1-\mu^2}{E}p_y-\rho h\frac{1-\mu^2}{E}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=0,\\
(1-\Gamma^*)\left\{\left[D\nabla^4 w+2\frac{\partial D}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 w+2\frac{\partial D}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\nabla^2 w+\nabla^2 D\nabla^2 w-\right.\right.\\
\left.-(1-\mu)\left(\frac{\partial^2 D}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-2\frac{\partial^2 D}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 D}{\partial y^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\right]+\\
\left.+\frac{Eh}{1-\mu^2}[(k_x+\mu k_y)\varepsilon_x+(\mu k_x+k_y)\varepsilon_y]\right\}+\\
+\frac{Eh}{1-\mu^2}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial w}{\partial x}(1-\Gamma^*)(\varepsilon_x+\mu\varepsilon_y)+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial w}{\partial y}(1-\Gamma^*)\gamma_{xy}\right]+\right.\\
\left.+\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial w}{\partial y}(1-\Gamma^*)(\varepsilon_y+\mu\varepsilon_x)+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial w}{\partial x}(1-\Gamma^*)\gamma_{xy}\right]\right\}+\\
+\frac{E}{1-\mu^2}\frac{\partial h}{\partial x}\left[\frac{\partial w}{\partial x}(1-\Gamma^*)(\varepsilon_x+\mu\varepsilon_y)+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial w}{\partial y}(1-\Gamma^*)\gamma_{xy}\right]+\\
+\frac{E}{1-\mu^2}\frac{\partial h}{\partial y}\left[\frac{\partial w}{\partial y}(1-\Gamma^*)(\varepsilon_y+\mu\varepsilon_x)+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial w}{\partial x}(1-\Gamma^*)\gamma_{xy}\right]+q-\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0,
\end{gathered}
\tag{6}
$$

где ε_x, ε_y, γ_{xy} определяются из (2). Следует заметить, что система нелинейных интегро-дифференциальных уравнений движения вязкоупругой оболочки относительно перемещений u, v и w (6) является достаточно общей. Из нее в частном случае можно получить уравнения движения вязкоупругих пластин, пологих и цилиндрических оболочек постоянной и переменной толщины. Для полного определения задачи к интегро-дифференциальным уравнениям (6) необходимо добавить граничные и начальные условия.

Подобные задачи в различных постановках были рассмотрены в [5, 6], а именно задача об изгибе упругих оболочек и пластин с переменной жесткостью исследована в [5], а динамические задачи с учетом температуры — в [6].

Метод Бубнова—Галеркина. Численные методы решения систем нелинейных интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерры. При решении полученных уравнений с помощью метода Бубнова—Галеркина необходимо найти системы функций, аппроксимирующие искомые составляющие u, v, w. При этом каждая из функций соответствующей системы должна удовлетворять граничным условиям, которым удовлетворяет аппроксимируемая функция, а сама система должна быть полной [7].

С помощью метода Бубнова—Галеркина решение уравнений (6) находим в следующем виде:

$$u(x,y,t)=\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}u_{nm}(t)\,\phi_{nm}(x,y),$$
$$v(x,y,t)=\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}v_{nm}(t)\,\varphi_{nm}(x,y), \tag{7}$$
$$w(x,y,t)=\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}w_{nm}(t)\,\psi_{nm}(x,y),$$

где $u_{nm}=u_{nm}(t)$, $v_{nm}=v_{nm}(t)$, $w_{nm}=w_{nm}(t)$ — неизвестные функции времени; $\phi_{nm}(x,y)$, $\varphi_{nm}(x,y)$ и $\psi_{nm}(x,y)$, $n=1,2,\ldots,N$, $m=1,2,\ldots,M$ — координатные функции, удовлетворяющие заданным граничным условиям задачи.

После применения метода Бубнова—Галеркина, в общем случае, рассматриваемая задача сводится к решению системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений:

$$\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}(a_{klnm}\ddot{u}_{nm}+\lambda_{nmkl}^{2}u_{nm})=X_{nm}(t,u_{11},\ldots,u_{NM}\,,\ v_{11},\ldots,v_{NM}\,,\ w_{11},\ldots,w_{NM}\,,$$

$$\int_0^t \phi_{nm}(t,\tau,u_{11},...,u_{NM},\ v_{11},...,v_{NM},\ w_{11},...,w_{NM})d\tau),$$

$$\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}(b_{klnm}\ddot{v}_{nm}+\chi^2_{klnm}v_{nm})=Y_{nm}(t,u_{11},...,u_{NM},\ v_{11},...,v_{NM},\ w_{11},...,w_{NM},$$

$$\int_0^t \varphi_{nm}(t,\tau,u_{11},...,u_{NM},\ v_{11},...,v_{NM},\ w_{11},...,w_{NM})\,d\tau), \tag{8}$$

$$\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}(c_{klnm}\ddot{w}_{nm}+\omega^2_{klnm}w_{nm})=Z_{nm}(t,u_{11},...,u_{NM},\ v_{11},...,v_{NM},\ w_{11},...,w_{NM},$$

$$\int_0^t \psi_{nm}(t,\tau,u_{11},...,u_{NM},\ v_{11},...,v_{NM},\ w_{11},...,w_{NM})\,d\tau),$$

$$u_{nm}(0)=u_{0nm},\ \dot{u}_{nm}(0)=\dot{u}_{0nm},\ v_{nm}(0)=v_{0nm},\ \dot{v}_{nm}(0)=\dot{v}_{0nm},$$

$$w_{nm}(0)=w_{0nm},\ \dot{w}_{nm}(0)=\dot{w}_{0nm},$$

где $u_{nm}=u_{nm}(t)$, $v_{nm}=v_{nm}(t)$, $w_{nm}=w_{nm}(t)$ — неизвестные функции времени; X_{nm}, Y_{nm}, Z_{nm}, ϕ_{nm}, φ_{nm}, ψ_{nm} — непрерывные функции в области изменения аргументов; a_{klnm}, b_{klnm}, c_{klnm}, λ^2_{klnm}, χ^2_{klnm}, ω^2_{klnm}, $n=1,2,...,N$, $m=1,2,...,M$ — заданные постоянные числа.

Численный метод, предложенный в [8, 9], применим для решения систем нелинейных интегро-дифференциальных уравнений (8). Запишем систему (8) в матричном виде:

$$\begin{aligned} &A\ddot{\mathbf{u}}+\Lambda\mathbf{u}=\mathbf{X}\left(t,\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w},\int_0^t \boldsymbol{\phi}(t,\tau,\mathbf{u}(\tau),\mathbf{v}(\tau),\mathbf{w}(\tau))\,d\tau\right),\\ &B\ddot{\mathbf{v}}+\mathrm{H}\mathbf{v}=\mathbf{Y}\left(t,\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w},\int_0^t \boldsymbol{\varphi}(t,\tau,\mathbf{u}(\tau),\mathbf{v}(\tau),\mathbf{w}(\tau))\,d\tau\right),\\ &C\ddot{\mathbf{w}}+\Omega\mathbf{w}=\mathbf{Z}\left(t,\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w},\int_0^t \boldsymbol{\psi}(t,\tau,\mathbf{u}(\tau),\mathbf{v}(\tau),\mathbf{w}(\tau))\,d\tau\right),\end{aligned} \tag{9}$$

$$\mathbf{u}(0)=\mathbf{u}_0,\ \dot{\mathbf{u}}(0)=\dot{\mathbf{u}}_0,\ \mathbf{v}(0)=\mathbf{v}_0,\ \dot{\mathbf{v}}(0)=\dot{\mathbf{v}}_0,\ \mathbf{w}(0)=\mathbf{w}_0,\ \dot{\mathbf{w}}(0)=\dot{\mathbf{w}}_0.$$

Систему (9) перепишем в виде

$$T\ddot{\mathbf{x}}+P\mathbf{x}=\boldsymbol{\Pi}\left(t,\mathbf{x},\int_0^t \boldsymbol{\psi}(\tau,\mathbf{x})\,d\tau\right),\ \ \mathbf{x}(0)=\mathbf{x}_0,\ \ \dot{\mathbf{x}}(0)=\dot{\mathbf{x}}_0, \tag{10}$$

где

$$T=\begin{pmatrix} A & 0 & 0\\ 0 & B & 0\\ 0 & 0 & C\end{pmatrix}, P=\begin{pmatrix} \Lambda & 0 & 0\\ 0 & \mathrm{H} & 0\\ 0 & 0 & \Omega\end{pmatrix},\ \mathbf{x}=\begin{pmatrix}\mathbf{u}\\ \mathbf{v}\\ \mathbf{w}\end{pmatrix},\ \mathbf{\Pi}=\begin{pmatrix}\mathbf{X}\\ \mathbf{Y}\\ \mathbf{Z}\end{pmatrix}, \mathbf{\Psi}=\begin{pmatrix}\phi\\ \varphi\\ \psi\end{pmatrix},$$

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1N}\\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2N}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ A_{N1} & A_{N2} & \cdots & A_{NN}\end{pmatrix},\quad \Lambda=\begin{pmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} & \cdots & \Lambda_{1N}\\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} & \cdots & \Lambda_{2N}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \Lambda_{N1} & \Lambda_{N2} & \cdots & \Lambda_{NN}\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{X}=\begin{pmatrix}\mathbf{X}_1\\ \mathbf{X}_2\\ \vdots\\ \mathbf{X}_N\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\varphi}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\varphi}_1\\ \boldsymbol{\varphi}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{\varphi}_N\end{pmatrix},\ \mathbf{u}=\begin{pmatrix}\mathbf{u}_1\\ \mathbf{u}_2\\ \vdots\\ \mathbf{u}_N\end{pmatrix}.$$

Матрицы и векторы, используемые здесь как элементы матриц и векторов, имеют следующий вид:

$$A_{kn}=\begin{pmatrix} a_{k1n1} & a_{k1n2} & \cdots & a_{k1nM}\\ a_{k2n1} & a_{k2n2} & \cdots & a_{k2nM}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{kMn1} & a_{kMn2} & \cdots & a_{kMnM}\end{pmatrix},\ \Lambda_{kn}=\begin{pmatrix} \lambda^2_{k1n1} & \lambda^2_{k1n2} & \cdots & \lambda^2_{k1nM}\\ \lambda^2_{k2n1} & \lambda^2_{k2n2} & \cdots & \lambda^2_{k2nM}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \lambda^2_{kMn1} & \lambda^2_{kMn2} & \cdots & \lambda^2_{kMnM}\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{u}_n=\begin{pmatrix}u_{n1}\\ u_{n2}\\ \vdots\\ u_{nM}\end{pmatrix},\quad \mathbf{X}_n=\begin{pmatrix}X_{n1}\\ X_{n2}\\ \vdots\\ X_{nM}\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\phi}_n=\begin{pmatrix}\phi_{n1}\\ \phi_{n2}\\ \vdots\\ \phi_{nM}\end{pmatrix}.$$

Аналогично записываем выражения для матриц и векторов второго и третьего уравнения системы (9).

Решая систему (10) относительно **x**, для определения неизвестных в точках $t_i=i\Delta t,\ i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$, где Δt — шаг интерполяции, получаем следующую рекуррентную формулу:

$$\mathbf{x}_{i+1}=\mathbf{x}_0 t_{i+1}+\mathbf{x}_0+T^{-1}\sum_{j=0}^{i}A_j(t_{i+1}+t_j)\left[-P\mathbf{x}_j+\mathbf{\Pi}(t_j,\mathbf{x}_j,\sum_{k=0}^{j}B_k\mathbf{\Psi}(t_j,t_k,\mathbf{x}_k)\right],$$

где T^{-1} — матрица, обратная клеточной матрице T; $A_j,\ B_k,\ j=0,1,\ldots,i$, $k=0,1,\ldots,j$, — узлы интерполяционной формулы.

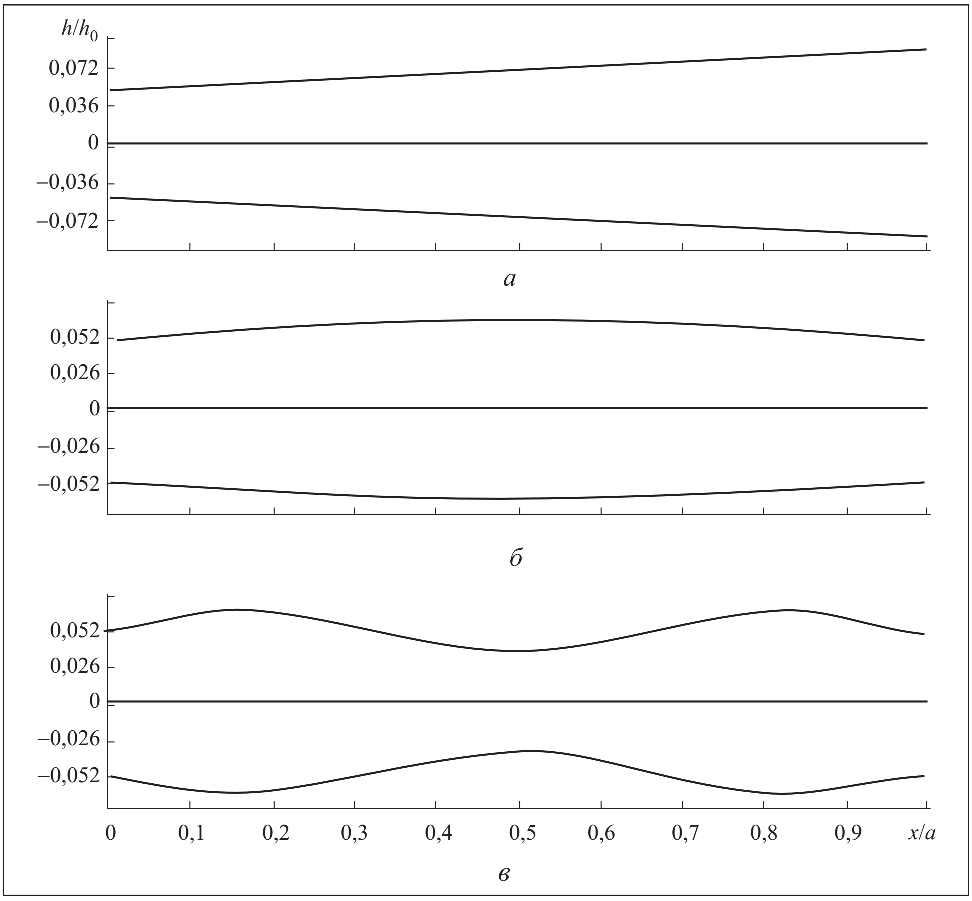

Рис. 1. Профили толщины вязкоупругой пластины, полученные сечением пластины плоскостью *yOx*: *а* — $r = 0{,}5$; *б* — $r = 1$; *в* — $r = 2$

Расчет нелинейных колебаний вязкоупругих систем с переменной жесткостью. Рассмотрим задачу о нелинейном колебании вязкоупругой прямоугольной пластины переменной толщины $h = h(x, y)$ со сторонами a и b (рис. 1). Пусть пластина шарнирно оперта по всем краям. Решение уравнения (6), удовлетворяющее граничным условиям задачи, находим в виде (7), где

$$\phi_{nm}(x, y) = \cos\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b},$$

$$\varphi_{nm}(x, y) = \sin\frac{n\pi x}{a}\cos\frac{m\pi y}{b},$$

$$\psi_{nm}(x,y)=\sin\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b}.$$

Подставляя (7) в систему уравнений (6), считая при этом для вязкоупругой пластины $k_x=k_y=0$, и выполняя процедуру Бубнова—Галеркина, для определения неизвестных u_{kl}, v_{kl} и w_{kl} получаем систему нелинейных интегро-дифференциальных уравнений

$$\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}a_{klnm}\ddot{u}_{nm}-\eta_1(1-\Gamma^*)\times$$

$$\times\left\{\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}\left(d_{1klnm}u_{nm}+\lambda e_{1klnm}v_{nm}-\frac{\lambda(k_x+\mu k_y)}{\delta}f_{1klnm}w_{nm}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\delta}\sum_{n,i=1}^{N}\sum_{n,j=1}^{M}g_{1klnmij}w_{nm}w_{ij}\right\}=0,$$

$$\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}b_{klnm}\ddot{v}_{nm}-\eta_2(1-\Gamma^*)\times$$

$$\times\left\{\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}\left(\frac{1}{\lambda}d_{2klnm}u_{nm}+e_{2klnm}v_{nm}-\frac{k_y+\mu k_x}{\delta}f_{2klnm}w_{nm}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\delta}\sum_{n,i=1}^{N}\sum_{m,j=1}^{M}g_{2klnmij}w_{nm}w_{ij}\right\}=0,$$

$$\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}c_{klnm}\ddot{w}_{nm}+\eta_3(1-\Gamma^*)\left\{\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}(d_{3klnm}u_{nm}+e_{3klnm}v_{nm}+f_{3klnm}w_{nm})-\right.$$

$$\left.-\sum_{n,i=1}^{N}\sum_{m,j=1}^{M}g_{3klnmij}w_{nm}w_{ij}\right\}-\eta_3\sum_{n,i=1}^{N}\sum_{m,j=1}^{M}w_{nm}(1-\Gamma^*),$$

$$(d_{4klnmij}u_{ij}+e_{4klnmij}v_{ij}+f_{4klnmij}w_{ij})-\sum_{n,i,r=1}^{N}\sum_{m,j,s=1}^{M}g_{klnmijrs}w_{nm}(1-\Gamma^*)w_{ij}w_{rs}=0,$$

где постоянные коэффициенты, входящие в эту систему, связаны с координатными функциями и их производными.

Интегрирование полученной системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений выполнено с помощью численного метода, основанного на использовании квадратурных формул [8, 9]. При расчетах в качестве $\Gamma(t)$ использовано слабосингулярное ядро Колтунова—Ржаницына [2]:

$$\Gamma(t)=Ae^{-\beta t}t^{\alpha-1},\ 0<\alpha<1.$$

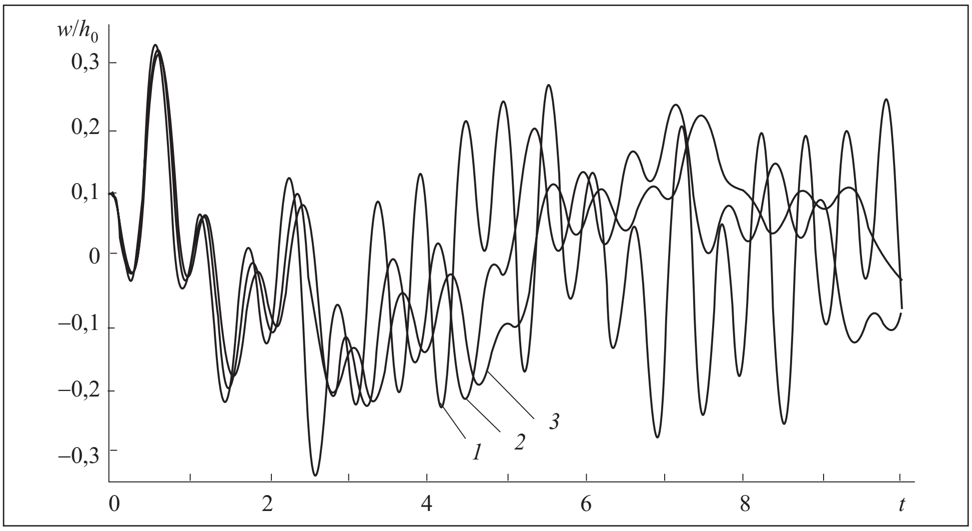

Рис. 2. Зависимость прогиба в срединной точке упругой (кривая *1*) и вязкоупругой (кривые *2*, *3*) пластин от времени: *1* — $A = 0$; *2* — $A = 0{,}03$; *3* — $A = 0{,}05$

На основе разработанного алгоритма составлена программа на языке Delphi. Вычисления проводились при различных значениях реологических и геометрических параметров вязкоупругой пластины.

Рассмотрим частные случаи этой задачи, когда толщина пластины изменяется только в одном направлении, вдоль оси Ox, по следующим законам:

$$h = h(x) = h_0\left(1 + \alpha^* \frac{x}{a}\right), \ h_0 = h(0) = \text{const}, \ 0 < \alpha < 1, \tag{11}$$

$$h = h(x) = h_0[1 + 0{,}3\sin(2r-1)\pi x], \ h_0 = h(0) = \text{const}, \tag{12}$$

где α^*, r — параметры изменения толщины.

Результаты вычислений представлены в виде графиков на рис. 2 и 3, где в качестве исходных данных принято: $u_0 = 0$, $v_0 = 0$, $w_0 = 0{,}1$, $A = 0{,}03$, $\alpha = 0{,}25$, $\beta = 0{,}05$, $\mu = 0{,}32$, $\lambda = a/b = 1$, $\delta = b/h_0 = 25$, $q = 0$.

Следует заметить, что на начальной стадии различие в решении упругих и вязкоупругих задач несущественное. С течением времени колебание при $A = 0$ приближается к гармоническому закону, с увеличением значения A амплитуда и частота колебаний значительно уменьшаются. Таким образом, полученные результаты свидетельствуют о том, что влияние вязкоупругости материала пластины переменной толщины приводит к уменьшению амплитуды и частоты колебаний.

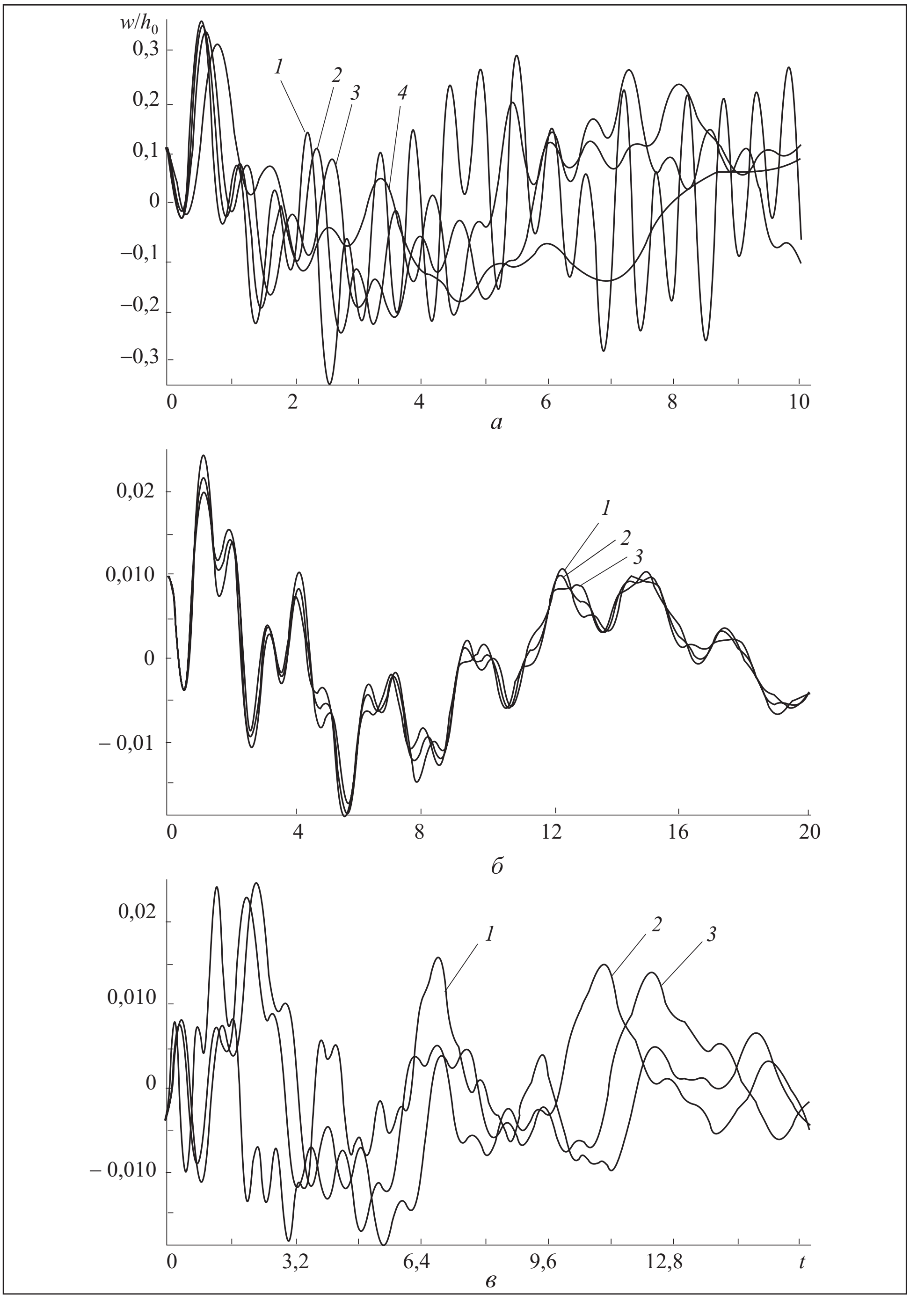

Рис. 3. Зависимость прогиба вязкоупругой пластины от времени: *а* — *1* — $A = 0$; *2*— $A = 0{,}03$, $\alpha = 0{,}2$; *3* — $A = 0{,}03$, $\alpha = 0{,}1$; *4* — $A = 0{,}03$, $\alpha = 0{,}05$; *б* — *1* — $\alpha^* = 0$; *2* — $\alpha^* = 0{,}3$; *3* — $\alpha^* = 0{,}5$; *в* — *1* — $r = 0{,}5$; *2* — $r = 1$; *3* — $r = 2$

Поведение вязкоупругой пластины переменной толщины при различных значениях реологического параметра α представлено на рис. 3, *а*, из которого видно, что уменьшение значения этого параметра приводит к уменьшению амплитуды и частоты колебаний.

Изменение толщины вязкоупругой пластины по закону (11) при равных объемах пластин постоянной и переменной толщины приводит к незначительному уменьшению максимальных перемещений, что видно на рис. 3, *б*.

Влияние изменения толщины вязкоупругой пластины по закону (12) графически представлено на рис. 3, *в*. Таким образом, из рис. 2 и 3 видно, что увеличение значения параметра r приводит к уменьшению амплитуды и частоты колебаний, а также смещению фаз вправо.

Выводы. Анализ результатов вычислительных экспериментов по исследованию нелинейных динамических задач о колебаниях вязкоупругих пластин с переменной толщиной, позволяет сделать следующие выводы.

1. Влияние вязкоупругих свойств материала пластины переменной толщины приводит к уменьшению амплитуды колебаний, а уменьшение значения реологического параметра α — к уменьшению их частоты.

2. Характер колебаний существенно зависит от изменения толщины вязкоупругой пластины. Изменение ее толщины по линейному закону, при равных объемах пластин постоянной и переменной толщины, приводит к уменьшению максимальных перемещений, а изменение толщины пластины по закону (12) с течением времени приводит к уменьшению их амплитуды и частоты колебаний и к смещению фаз вправо.

A numerical method and an algorithm for solution of the system of the Volterra type integro-differential equations are presented. Problems on nonlinear oscillations of viscoelastic rectangular plates of variable thickness were solved by the offered method.

1. *Ильюшин А. А., Победря Б. Е.* Основы математической теории термовязкоупругости. — М. : Наука, 1970. — 280 с.
2. *Колтунов М. А.* Ползучесть и релаксация. — М. : Высшая школа, 1976. — 276 с.
3. *Вольмир А. С.* Нелинейная динамика пластинок и оболочек. — М. : Наука, 1972. — 432 с.
4. *Верлань А. Ф., Эшматов Х., Эшматов Б. Х. и др.* Математическое моделирование нелинейных колебаний и исследование динамической устойчивости вязкоупругих прямоугольных пластин и цилиндрических панелей. I // Электрон. моделирование. — 2009. — **31.** — № 3. — С. 3—19.
5. *Григоренко Я. М., Крюков Н. Н.* Численное решение задач статики гибких слоистых оболочек с переменными параметрами. — Киев : Наук.думка, 1988. — 264 с.
6. *Карнаухов В. Г., Сенчеков И. К., Гуменюк Б. П.* Термомеханическое поведение вязкоупругих тел при гармоническом нагружении. — Киев : Наук. думка, 1985. — 288 с.
7. *Михлин С. Г.* Численная реализация вариационных методов. — М. : Наука, 1966. — 432 с.

8. *Бадалов Ф. Б., Эшматов Х., Юсупов М.* О некоторых методах решения систем интегро-дифференциальных уравнений, встречающихся в задачах вязкоупругости // ПММ. — 1987. —№ 5 (51). — С. 867—871.
9. *Эшматов Х.* Интегральный метод математического моделирования задач динамики вязкоупругих систем: Дис... д-ра техн. наук. — Киев, 1991. — 337 с.

Поступила 15.12.09

ВЕРЛАНЬ Анатолий Федорович, д-р техн. наук, зав. отделом Ин-та проблем моделирования в энергетике им. Г.Е. Пухова НАН Украины. В 1956 г. окончил Киевский политехнический ин-т. Область научных исследований — методы математического и компьютерного моделирования в задачах исследования динамических систем, электрических цепей; численные методы и алгоритмы решения интегральных уравнений.

АБДИКАРИМОВ Рустамхан Алимханович, канд.техн.наук, доцент кафедры математики Ташкентского финансового института. В 1982 г. окончил Ташкентский Государственный университет. Область научных исследований — математическое моделирование.

ЭШМАТОВ Хасан, д-р техн. наук, зав. кафедрой информационных технологий Ташкентского ин-та ирригации и мелиорации. В 1969 г. окончил Самаркандский госуниверситет. Область научных исследований — математическое моделирование.