УДК 517.933+531.01

М. В. Шамолин, д-р физ.-мат. наук
Ин-т механики Московского государственного
университета им. Ломоносова
(Россия, 119899, Москва, Мичуринский пр., д. 1,
тел. (495) 9395143, E-mail: shamolin@imec.msu.ru)

Диагностика одной системы прямого управления движением летательных аппаратов *

Рассмотрен модельный пример диагностики неисправностей в одной системе прямого управления движением летательного аппарата, которое может быть описано нелинейными дифференциальными уравнениями второго порядка. Построен алгоритм диагностирования в соответствии с разработанной ранее методикой и приведен пример его использования.

Розглянуто модельний приклад діагностики несправностей в одній системі прямого управління рухом літального апарату, яке може бути описане нелінійними диференціальними рівняннями другого порядку. Побудовано алгоритм діагностування за розробленою раніше методикою та наведено приклад його використання.

К л ю ч е в ы е   с л о в а: задача дифференциальной диагностики, система прямого управления, диагностирование, асимптотическая устойчивость.

Задача дифференциальной диагностики функционального состояния объектов управления может быть сведена к двум самостоятельным последовательно решаемым задачам [1—3]: задаче контроля, т.е. установлению критерия наличия неисправности в системе, и задаче диагностирования, т.е. поиску происшедшей неисправности. Критерием наличия неисправности в системе может быть выход траектории объекта на некоторую заранее выбранную поверхность. Неисправность может произойти в любой заранее неизвестный момент времени движения объекта, в любой точке внутри данной поверхности контроля [4—6].

Исходной информацией при решении задачи контроля является математическая модель движения рассматриваемого объекта, ограниченная область ее начальных условий и априорный список математических моде-

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 08-01-00231-а).

лей движения объекта с той или иной возможной неисправностью. По этой информации можно выбрать поверхность контроля.

Задача диагностирования может быть решена с помощью слежения за траекторией объекта после ее выхода на поверхность контроля. При этом необходимо, чтобы процесс диагностики совершался во время движения объекта, был осуществлен в течение весьма краткого интервала времени, например за полупериод или за четвертую часть периода быстрых колебаний объекта, и не требовал дополнительного приборного обеспечения. Эти обстоятельства иногда не позволяют использовать довольно громоздкие алгоритмы теории идентификации и приводят к необходимости построения алгоритмов непрерывной экспресс-диагностики.

Рассмотрим применение разрабатываемой методики диагностирования на примере, взятом из теории летательных аппаратов.

Уравнения движения. Рассмотрим летательный аппарат с прямым управлением, движение которого может быть описано нелинейными дифференциальными уравнениями второго порядка [1]

$$x' = Ax - b\delta, \ \delta = \Phi(\zeta), \ \zeta = r^T x + h\varphi\,(x, \delta, f(\eta)). \qquad (1)$$

Здесь $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ — вектор, характеризующий состояние летательного аппарата; δ — координата управления; $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ — постоянная устойчивая матрица;

$$\varphi\,(x, \delta, f(\eta)) = \int_{t_0}^{t} (p^T x + q\delta - f(\eta))\, dt;$$

$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, $p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$, $r = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$ — постоянные матрицы; q и h — постоянные скалярные величины; T — символ транспонирования матрицы.

Функции $\Phi(\zeta)$ и $f(\eta)$ (η — формируемый сигнал обратной связи) принадлежат классу допустимых функций. Они определены и непрерывны при всех значениях ζ и η и удовлетворяют следующим условиям:

$$\Phi(\zeta) = 0, \ \zeta = 0, \ \zeta\Phi(\zeta) > 0, \ \zeta \neq 0;$$

$$f(\eta) = 0, \ \eta = 0, \ \eta\Phi(\eta) > 0, \ \eta \neq 0.$$

Первая задача, возникающая при исследовании системы (1), следующая: найти такое значение формируемого сигнала η, которое не вызывает неустойчивости аппарата и обеспечивает выполнение цели управления.

Целью управления может быть, например, отслеживание системой формируемого сигнала η.

Для решения этой задачи прежде всего необходимо найти условия, при выполнении которых система (1) является устойчивой.

Достаточные условия устойчивости. В силу системы (1) выполняем следующие равенства:

$$\zeta' = r^T x' + h\varphi' = c^T x - \rho\Phi(\zeta) - hf(\eta), \tag{2}$$

где

$$c = r^T A + hp^T = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{22} \end{pmatrix}; \ \rho = r^T b + hq.$$

Функцию Ляпунова выберем в виде [6]

$$V = x^T Bx + \int_0^\zeta \Phi(\zeta)\, d\zeta .$$

Производную по времени вдоль траектории системы (1) представим в виде $V' = x'^T Bx + x^T Bx' + \Phi(\zeta)\zeta'$. В силу (1) и (2) производная вдоль траектории имеет вид

$$-V' = (x^T \Phi)\begin{pmatrix} c & d \\ d^T & \rho \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ \Phi \end{pmatrix} + \Phi(\zeta)\, hf(\eta),$$

где

$$-C = A^T B + BA, \quad d = Bb - \frac{1}{2}c. \tag{3}$$

Для положительной определенности величины $-V'$ как квадратичной формы от x, Φ и f потребуем выполнения условий

$$C > 0, \tag{4}$$

$$\rho > d^T C^{-1} d, \tag{5}$$

$$h > 0, \tag{6}$$

$$\Phi(\zeta)\, f(\eta) > 0. \tag{7}$$

В дальнейшем воспользуемся модификацией Лурье. Положительную определенность величины $-V'$ гарантировать проще, положив

$$d = Bb - \frac{1}{2}c = 0. \tag{8}$$

В силу (8) из (5) следует:

$$\rho = r_1 b_1 + r_2 b_2 + hq > 0. \tag{9}$$

Из (7) следует, что функция $f(\eta)$ должна иметь тот же знак, что и функция $\Phi(\zeta)$.

Перейдем к совместному решению уравнений (3) и (5). С этой целью выберем матрицы B и C в следующем виде:

$$B=\begin{pmatrix} p_0 & q_0 \\ q_0 & r_0 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Если в (10) принять

$$p>0,\ r>0, \tag{11}$$

то матрица C положительно определена. С учетом (10) и уравнения Ляпунова (3) получим следующую систему уравнений:

$$\begin{gathered} -p=2\left(\left(a_{11}-\frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}+a_{22}}\right)p_0-\frac{a_{21}^2}{a_{11}+a_{22}}r_0\right), \\ -r=2\left(\left(a_{22}-\frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}+a_{22}}\right)r_0+\frac{a_{12}^2}{a_{11}+a_{22}}p_0\right), \\ a_{11}+a_{22}\neq 0. \end{gathered} \tag{12}$$

Если определитель системы алгебраических уравнений (12) относительно неизвестных p_0, r_0, имеющий вид

$$\Delta=4(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}), \tag{13}$$

отличен от нуля, то система (12) будет иметь единственное решение. Предположим, что определитель (13) не равен нулю, и запишем решение системы уравнений (12) в следующем виде:

$$\begin{gathered} p_0=\frac{2}{\Delta}\left(-\left(a_{22}-\frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}+a_{22}}\right)p-\frac{a_{21}^2}{a_{11}+a_{22}}r\right), \\ r_0=\frac{2}{\Delta}\left(-\left(a_{11}-\frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}+a_{22}}\right)r-\frac{a_{12}^2}{a_{11}+a_{22}}p\right). \end{gathered} \tag{14}$$

При этом

$$q_0=\frac{2}{\Delta}\frac{1}{a_{11}+a_{22}}(a_{12}a_{22}p+a_{21}a_{11}r). \tag{15}$$

Запишем, далее, с учетом (10) решение уравнения (8):

$$p_0b_1+q_0b_2=\frac{1}{2}c_{11},\ \ q_0b_1+r_0b_2=\frac{1}{2}c_{22}. \tag{16}$$

Затем перепишем уравнения (16) с учетом (14) и (15) в виде

$$\frac{2}{\Delta}\left\{\left(-b_1\left(a_{22}-\frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}+a_{22}}\right)+b_2\frac{a_{12}a_{22}}{a_{11}+a_{22}}\right)p+\right.$$

$$\left.+\left(-b_1\frac{a_{21}a_{11}}{a_{11}+a_{22}}+b_2\frac{a_{21}a_{11}}{a_{11}+a_{22}}\right)r\right\}=\frac{1}{2}c_{11},$$

$$\frac{2}{\Delta}\left\{\left(b_1\frac{a_{12}a_{22}}{a_{11}+a_{22}}-b_2\frac{a_{12}^2}{a_{11}+a_{22}}\right)p+\right. \tag{17}$$

$$\left.+\left(b_1\frac{a_{21}a_{11}}{a_{11}+a_{22}}-b_2\left(a_{11}-\frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}+a_{22}}\right)\right)r\right\}=\frac{1}{2}c_{22}.$$

Определитель системы (17) имеет вид

$$\bar{\Delta}=\left(-b_1\left(a_{22}-\frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}+a_{22}}\right)+b_2\frac{a_{12}a_{22}}{a_{11}+a_{22}}\right)\times$$

$$\times\left(b_1\frac{a_{21}a_{11}}{a_{11}+a_{22}}-b_2\left(a_{11}-\frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}+a_{22}}\right)\right)-$$

$$-\frac{1}{(a_{11}+a_{22})^2}(-b_1a_{21}^2+b_2a_{21}a_{11})(b_1a_{12}a_{22}-b_2a_{12}^2).$$

Тогда решение системы алгебраических уравнений (17) примет вид

$$p=\frac{1}{\Delta\bar{\Delta}}\left\{\left(b_1\frac{a_{21}a_{11}}{a_{11}+a_{22}}-b_2\left(a_{11}-\frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}+a_{22}}\right)\right)c_{11}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{a_{11}+a_{22}}(b_2a_{21}a_{11}-b_1a_{21}^2)\,c_{22}\right\},$$

$$r=\frac{1}{\Delta\bar{\Delta}}\left\{\left(b_2\frac{a_{12}a_{22}}{a_{11}+a_{22}}-b_1\left(a_{22}-\frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}+a_{22}}\right)\right)c_{22}-\right. \tag{18}$$

$$\left.-\frac{1}{a_{11}+a_{22}}(b_1a_{12}a_{22}-b_2a_{12}^2)\,c_{11}\right\}.$$

С учетом (11) из (18) получим следующие условия:

$$\left(b_1\frac{a_{21}a_{11}}{a_{11}+a_{22}}-b_2\left(a_{11}-\frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}+a_{22}}\right)\right)c_{11}>\frac{1}{a_{11}+a_{22}}(b_2a_{21}a_{11}-b_1a_{21}^2)\,c_{22},$$

$$\left(b_2\,\frac{a_{12}a_{22}}{a_{11}+a_{22}}-b_1\left(a_{22}-\frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}+a_{22}}\right)\right)c_{22}>\frac{1}{a_{11}+a_{22}}\,(b_1a_{12}a_{22}-b_2a_{12}^2)\,c_{11}. \quad (19)$$

Таким образом, если $a_{11}+a_{22}\neq 0$, $\Delta\neq 0$, $\overline{\Delta}\neq 0$, то выполняются условия (6), (9) и (19). Поэтому рассматриваемая система будет абсолютно устойчивой независимо от выбора допустимых функций Ф и f, удовлетворяющих условию (7), т. е. все решения системы (1) будут сходиться к началу координат при $t\to+\infty$. При этом предполагается, что начало координат x_0 является единственной критической точкой системы (1).

Условие (7) в силу (8) может быть легко нарушено. Могут возникнуть и другие ситуации, которые обусловят нарушение цели управления. Поэтому возникает вторая задача при исследовании системы (1) — задача диагностирования нежелательных ситуаций, или диагностирования неисправностей, которые могут возникнуть в системе управления летательным аппаратом.

Диагностирование отказов в системе управления летательным аппаратом (1). Рассмотрим отказы трех датчиков, формирующих три обратные связи в системе управления объектом:

$$\begin{aligned}&1)\ r_1=0,\\&2)\ r_2=0,\ \ p_2=0,\ \ q=0,\\&3)\ \eta=0.\end{aligned}\quad (20)$$

Функционал диагностирования. Сформируем следующие суммы:

$$S_j=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{N}(x_{jk}(t_l)-x_{gk}(t_l))^2,\ \ j=0,\dots,3, \quad (21)$$

где $x_{jk}(t_l)$ — значения компонент вектора состояния рассматриваемой системы в момент t_l ($l=1,\ \dots,\ N$), рассчитанные по (1) для j-й траектории с помощью исходной системы и систем с параметрами (20); $x_{gk}(t_l)$ — компоненты действительного вектора состояния, измеренного в моменты времени t_l, $l=1,\ \dots,\ N$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема. Для конечного набора систем уравнений найдутся такие числа S_j и N ($j=0,\dots,3$), что при некотором номере i числа $S_i=\min\limits_j S_j$ возникшая в системе неисправность с неизвестным номером j в процессе движения объекта с помощью функционала (21) будет диагностирована однозначно (ср. с теоремами из [1—3]).

Из этой теоремы вытекает следующий алгоритм диагностирования.

Из всех чисел S_j выбираем наименьшее. Номер i такого числа S_i принимаем за номер случившейся неисправности.

В априорный список неисправностей под номером 0 включаем исходную (исправную) систему (1).

Алгоритм диагностирования включается циклически, и если обнаруживается нулевая неисправность, то моделируется дальнейшее функционирование системы. Если номер j неисправности не был равен нулю, то выдается сигнал о возникновении j-й неисправности.

Численный эксперимент. На ЭВМ моделировалось поведение рассматриваемой системы, возникновение неисправности в системе и диагностика этой неисправности. Априорный список неисправностей содержал три неисправности, каждая из которых характеризует обрыв, соответствующий обратной связи в системе управления. Вектор диагностирования был вектором состояния системы (x_1, x_2), число измерений $N = 3$.

Моделировалось исправное движение системы, начинавшееся в момент $t_0 = 0$, затем — возникновение неисправности № 1 в момент $t_1 = 15$ с, включение алгоритма диагностирования в момент $t_2 = 20$ с. С помощью алгоритма правильно диагностирована неисправность в момент $t_3 = 24$ с.

Неисправность № 2 моделировалась аналогичным способом, значения t_0, t_1, t_2, t_3 были такими же, как при моделировании неисправности № 1. Неисправность № 2 определена в момент t_3 правильно.

Неисправность № 3 моделировалась так: начало функционирования — момент $t_0 = 0$, возникновение неисправности — $t_1 = 10$ с, включение алгоритма — $t_2 = 15$ с. При первом включении алгоритм диагностировал систему как исправную, поэтому функционирование системы продолжалось и алгоритм включился вторично в момент $t_3 = 30$ с и правильно диагностировал неисправность № 3 в момент $t_4 = 34$ с.

The paper deals with a model example of malfunction diagnosis in a system of direct control of flying vehicle motion which can be described by the second order nonlinear differential equations. An algorithm has been created for diagnosis due to the already developed methods [1–6] and an example of its use is presented.

1. *Shamolin M. V.* Foundations of differential and topological diagnostics // Journal of Mathematical Sciences. — 2003. — Vol. 114, No. 1. — P. 976—1024 (Итоги науки и техники. Сер. «Современные проблемы математики и ее приложения». Тематические обзоры. Т. 88. «Динамические системы-12», 2001).
2. *Шамолин М. В.* Некоторые задачи дифференциальной и топологической диагностики. Изд. 2-е, переработанное и дополненное. — М. : Изд-во «Экзамен», 2007. — 320 с.
3. *Борисенок И. Т., Шамолин М. В.* Алгоритмы решения задачи дифференциальной диагностики // Тез. докл. матем. конф. «Еругинские чтения III». Брест, 14—16 мая 1996 г. — Брест : БГУ, 1996. — С. 102.
4. *Борисенок И. Т., Шамолин М. В.* Существование и единственность решения общей задачи дифференциальной диагностики // Тез. докл. 5-го Междунар. совещания-семинара. «Инженерно-физические проблемы новой техники». Москва, 19—22 мая 1998 г. — М. : Изд-во МГТУ, 1998. — С. 6—7.

5. *Борисенок И. Т., Шамолин М. В.* Существование решения общей задачи дифференциальной диагностики // Тез. докл. конф., посвящ. 40-летию Ин-та механики МГУ. 22—26 ноября 1999 г. — М. : Изд-во МГУ, 1999. — С. 259—260.
6. *Борисенок И. Т., Шамолин М. В.* Решение задачи дифференциальной диагностики // Фундаментальная и прикладная математика. — 1999. — **5**, Вып. 3. — С. 775—790.

Поступила 09.09.09

ШАМОЛИН Максим Владимирович, д-р физ.-мат. наук, профессор, вед. науч. сотр. Ин-та механики МГУ им. Ломоносова. В 1988 г. окончил Московский госуниверситет. Область научных исследований — классическая механика, дифференциальная и топологическая диагностика, качественная теория динамических систем, алгебраическая и дифференциальная топология, геометрия.