
УДК 517.949.8

С. З. Шихалиев

Ин-т проблем моделирования
в энергетике им. Г. Е. Пухова НАН Украины
(Украина, 03115, Киев, ул. Генерала Наумова, 15,
тел. (044)4241063, E-mail: ipme@ipme.kiev.ua)

Сравнение эффективности неявного локально-одномерного и чебышевского $T_{230,15}$ -методов с помощью расчета термодиффузии в плазмoeлектродной системе с неподвижной дугой

Изложены результаты сравнения эффективности неявного локально-одномерного и чебышевского $T_{230,15}$ -методов решения начально-краевых задач термодиффузии на примере расчета температуры плазмoeлектродной системы сварочной установки. Приведена таблица весов $T_{230,15}$ -метода.

Викладено результати порівняння ефективності неявного локально-одномерного та чебышевського $T_{230,15}$ -методів розв'язку початково-краєвих задач термодифузії на прикладі розрахунку температури плазмoeлектродної системи зварювальної установки. Наведено таблицю ваги $T_{230,15}$ -метода.

К л ю ч е в ы е с л о в а: плазма, электрод, термодиффузия, разностные схемы, локально-одномерный и чебышевский методы.

Численное моделирование плазмoeлектродных систем (ПЭС), в частности систем с динамическим взаимодействием электродуговой плазмы с металлическими электродами, — одна из сложнейших задач современного прикладного численного анализа. Не является в этом смысле исключением задача моделирования электромагнитно-теплого процесса (ЭМТП) [1] — начально-краевая задача для системы двух параболических уравнений 2-го порядка с самосопряженным эллиптическим оператором, описывающая связанные электромагнитный и тепловой процессы в ПЭС сварочного происхождения, сформулированная в цилиндрических координатах r (радиальная) и z (аксиальная). Для ее приближенного решения использован метод конечных разностей.

В процессе численных исследований модели установлено, что для расчета температуры требуется на порядок больше процессорного времени, чем для решения электромагнитной задачи. Поэтому при ее разработке основное внимание уделено поиску эффективных методов решения тепловой задачи.

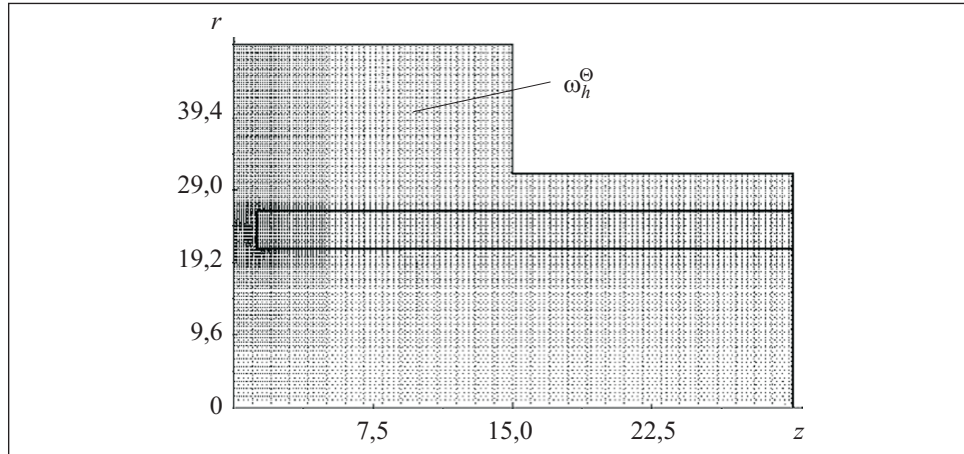


Рис.1. Общий вид сетки $\omega_h^{(3)}$

Длительность реальных процессов в рассматриваемой ПЭС исчисляется секундами, однако для разработки модели [1] оказалось возможным ограничиться наблюдением моделируемого процесса на секундном интервале $J = [0, 1]$, на начальном подынтервале которого $J^0 = [0, 0.1]$ градиенты температуры велики настолько, что решение задачи на нем с требуемой точностью возможно лишь с шагом интегрирования τ , соизмеримым с шагом $\tau = \tau_0^\theta$ устойчивого интегрирования уравнения термодиффузии явным методом. Поэтому при $t \in J^0$ температура была рассчитана явным методом, использованным в качестве «эталонного» при тестировании неявных методов вне J^0 .

На начальной стадии исследований для вычисления температуры на интервале $J^1 = (0.1, 1]$ апробирован один из наиболее распространенных неявных методов решения начально-краевых задач диффузии — локально-одномерный метод (ЛОМ) [2], однако и этот метод оказался недостаточно эффективным. В связи с этим в модели использован один из неявных чебышевских методов [3] — $T_{230,15}$ -метод. Сравнение эффективности $T_{230,15}$ -метода и ЛОМ проведены на ПЭВМ класса Pentium IV (AMD Athlon(tm)64 Processor 3000+ 1,81ГГц 1600 Гб ОЗУ) на пространственной сетке $\omega_h^{(3)}$, содержащей $157(n_r^{(3)}) \times 129(n_z^{(3)})$ ячеек (рис.1). Эта сетка получена уменьшением вдвое размеров ячеек сетки $\omega_h^{(2)}$ ($79(n_r^{(2)}) \times 65(n_z^{(2)})$) [4] на участках области задания температуры, удаленных от межэлектродного промежутка.

Результаты хронометража процессорного времени (t_{CPU}^θ), потребовавшегося для вычисления температуры на 1000 временных слоях, представ-

лены в табл. 1, где обозначено τ^{θ} — шаг интегрирования уравнения термодиффузии, m_H — делитель этого шага, связывающий его с шагом расчета напряженности магнитного поля соотношением $\tau^H = \tau^{\theta} / m_H$. Необходимость введения в расчеты этого делителя очевидна: скорость электромагнитных процессов намного выше скорости распространения тепла. Для уравнивания погрешностей вычисления магнитной напряженности в случае расчета температуры явным и неявными методами, при вычислении температуры неявными методами желательно этот делитель выбрать таким, чтобы выполнялось соотношение $\tau^H \approx \tau_0^{\theta} = 1.E-7$, но это не привело бы к существенному увеличению времени расчета магнитной напряженности и соответственно решения задачи в целом. Поэтому было принято ограничение $m_H = 100$.

Следует заметить, что системы разностных уравнений при реализации $T_{230,15}$ -метода решались методом симметричной последовательной верхней релаксации с параметром $\tau_I=1,5$. На первой стадии алгоритма реализации этих методов число итераций достигало 2990, тогда как среднее их число на временном слое $N_{IT} = 244$.

Требует пояснения выбор значений шага τ^{θ} в неявных методах и особенно в ЛОМ. В работе [4] установлено, что для расчета распределения температуры ЛОМ на сетке $\omega_h^{(2)}$ с шагом τ_*^{θ} , достаточно близким к вычисленному явным методом с шагом $\tau_{\text{exp}}^{\theta}$, можно ограничиться соотношением $\tau_*^{\theta} = 10 * \tau_{\text{exp}}^{\theta}$, которое в расчетах на сетке $\omega_h^{(3)}$ вследствие слишком большого времени решения задачи на указанной выше ПЭВМ выполнить невозможно. Поэтому требование, предъявляемое к точности неявных методов в работе [4], заменим более слабым условием [5], согласно которому расчетная температура ПЭС не должна превышать 8 кС.

В работе [4] шаг τ_*^{θ} задан соотношением $\tau_*^{\theta} = a * \tau_{\text{exp}}^{\theta}$, где a — параметр, связывающий шаги по времени τ_*^{θ} и $\tau_{\text{exp}}^{\theta}$, $a = 10$. В рассматриваемом эксперименте при $a = 1$ полученный результат, как и следовало ожидать, удовлетворил условию, описанному в работе [5]. Удовлетворительный результат получен и при $a = 2,5$, однако при $a \geq 5$ расчетная температура в межэлектродном промежутке превысила максимально допустимую. В итоге для решения задачи с помощью ЛОМ было выбрано значение шага $\tau = \tau^{\theta} = 2,5 * 10^{-6}$ (табл. 1).

Таблица 1

Метод	τ^{θ} , с	m_H	t_{CPU}^{θ}
Явный	1.E-7	1	20 с
ЛОМ	2.5E-6	100	23мин
$T_{230,15}$	1.E-4	1	30мин

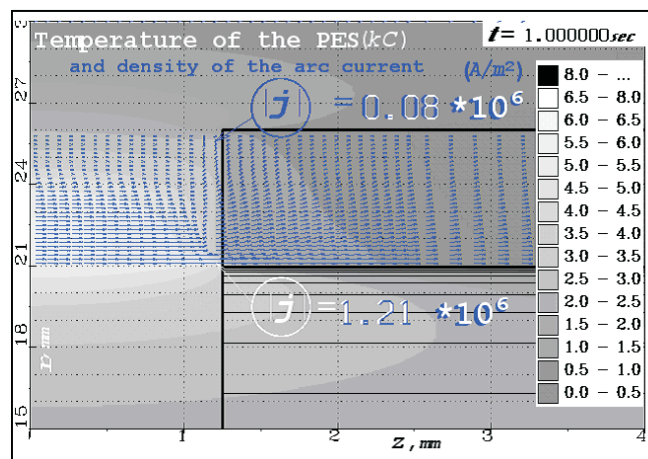


Рис.2. Результат компьютерного моделирования распределения температуры, рассчитанной $T_{230,15}$ -методом, и векторного поля объемной плотности тока в ПЭС модели, описанной в [1], при $t = 1$ с

Анализируя величины времени t_{CPU}^{θ} , приведенные в табл. 1, нетрудно убедиться в том, что решение задачи на ПЭВМ указанного класса явным методом проблематично. Поскольку неявными методами расчет температуры выполнен на интервале J^1 , длительность которого 0,9 с, для вычисления температуры на этом интервале $T_{230,15}$ -методом требуется 9000 шагов, т.е. в 9 раз больше. Следовательно, время решения задачи на интервале J^1 этим методом составило 4,5 ч. Для получения такого же результата с помощью ЛОМ потребовалось бы 5,75 суток непрерывного счета, что и определило выбор $T_{230,15}$ -метода для расчета температуры в модели [1]. Веса этого метода $a_s^{(230)}$, $s=1,230$, приведены в табл. 2.

Результаты расчета температуры и объемной плотности тока в момент времени $t = 1$ с (рис. 2) использованы в качестве начальных в компьютерных экспериментах с моделью [6] термогазодинамического процесса в ПЭС установки для магнитоуправляемой дуговой сварки.

Таким образом, на примере решения прикладной начально-краевой задачи термодиффузии получены результаты тестирования одного из чебышевских методов [3]. Очевидно, что при решении иных задач эффективными могут оказаться и другие $T_{m,n}$ -методы при $m \gg n \gg 1$. В модели, описанной в работе [1], был испытан, в частности, $T_{75,15}$ -метод, который также оказался высоко эффективным. Если по каким-либо причинам очень большие значения m и n нежелательны, то вполне удовлетворительные результаты можно получать при $m \approx 2n$. Выбор $T_{230,15}$ -метода в качестве «представителя» чебышевских методов [3] обусловлен желанием

Таблица 2

s	$a_s^{(230)}$	s	$a_s^{(230)}$
1	-.644165924929254E-04	51	.278283996334063E-02
2	.111771640645513E-02	52	.307819924455991E-02
3	.584818909299225E-02	53	.330853359057813E-02
4	.107510896842941E-01	54	.347259553740811E-02
5	-.200953055977506E-02	55	.357044122269288E-02
6	-.778064413394270E-02	56	.360328402343480E-02
7	-.371886273123442E-02	57	.357334738540098E-02
8	.238358670602224E-02	58	.348371997414150E-02
9	.568875550565404E-02	59	.333821557970939E-02
10	.544927984331066E-02	60	.314123961048431E-02
11	.293925352005490E-02	61	.289766350844164E-02
12	.229661812044164E-03	62	.261270799941770E-02
13	-.288029698883342E-02	63	.229183574480664E-02
14	-.443175343335357E-02	64	.194065367925887E-02
15	-.478551186526348E-02	65	.156482509090176E-02
16	-.413979532460173E-02	66	.116999132106893E-02
17	-.282512913957661E-02	67	.761702820240487E-03
18	-.118970741888830E-02	68	.345359190917594E-03
19	.466651206837605E-03	69	-.738422301549095E-04
20	.192156245043337E-02	70	-.490949751334289E-03
21	.303495876570289E-02	71	-.901293204343474E-03
22	.374030994411382E-02	72	-.130051287683488E-02
23	.402963335548910E-02	73	-.168458206202422E-02
24	.393702565398571E-02	74	-.204982378473600E-02
25	.352339507310694E-02	75	-.239292225146779E-02
26	.286367280955789E-02	76	-.271092955532547E-02
27	.203690328118850E-02	77	-.300126814435884E-02
28	.111911003974524E-02	78	-.326172953721684E-02
29	.178582087891734E-03	79	-.349046974259976E-02
30	-.726869815589033E-03	80	-.368600181022094E-02
31	-.155114139441434E-02	81	-.384718591225592E-02
32	-.225995866004250E-02	82	-.397321732450640E-02
33	-.283024433180364E-02	83	-.406361264765783E-02
34	-.324900546182208E-02	84	-.411819458092921E-02
35	-.351195658117892E-02	85	-.413707553248374E-02
36	-.362203667450320E-02	86	-.412064032547850E-02
37	-.358793188676377E-02	87	-.406952823287109E-02
38	-.342267888459515E-02	88	-.398461455087197E-02
39	-.314239528318998E-02	89	-.386699189865091E-02
40	-.276516224358242E-02	90	-.371795141081639E-02
41	-.231006893997519E-02	91	-.353896396995107E-02
42	-.179641787022331E-02	92	-.333166160839590E-02
43	-.124308287421139E-02	93	-.309781919166400E-02
44	-.668007344351364E-03	94	-.283933648080028E-02
45	-.878277372361749E-04	95	-.255822065660706E-02
46	.482393446438890E-03	96	-.225656937586080E-02
47	.102934099577687E-02	97	-.193655441790624E-02
48	.154154171463480E-02	98	-.160040596967654E-02
49	.200939450266367E-02	99	-.125039758676502E-02
50	.242514842367441E-02	100	-.888831860358376E-03

Продолжение табл. 2

s	$a_s^{(230)}$	s	$a_s^{(230)}$
101	-.518026811480303E-03	152	-.290990332534522E-02
102	-.140303027262552E-03	153	-.344961108578145E-02
103	.242028452356520E-03	154	-.399026954309065E-02
104	.626677494560535E-03	155	-.453002013267908E-02
105	.101138548200199E-02	156	-.506697448943438E-02
106	.139393517583146E-02	157	-.559921728478630E-02
107	.177215984324028E-02	158	-.612480900605679E-02
108	.214395166236400E-02	159	-.664178867570212E-02
109	.250726942052182E-02	160	-.714817650817336E-02
110	.286014552375661E-02	161	-.764197650242403E-02
111	.320069233759068E-02	162	-.812117896860548E-02
112	.352710788079716E-02	163	-.858376298733692E-02
113	.383768089491738E-02	164	-.902769880057719E-02
114	.413079531331945E-02	165	-.945095013308768E-02
115	.440493415480275E-02	166	-.985147644379734E-02
116	.465868286646445E-02	167	-.102272351065866E-01
117	.489073214173268E-02	168	-.105761835201096E-01
118	.509988023894647E-02	169	-.108962811464615E-01
119	.528503482643867E-02	170	-.111854914788648E-01
120	.544521437936053E-02	171	-.114417839382669E-01
121	.557954915393494E-02	172	-.116631356993245E-01
122	.568728176377405E-02	173	-.118475334461024E-01
123	.576776738280510E-02	174	-.119929750579909E-01
124	.582047359911914E-02	175	-.120974712265176E-01
125	.584497994274906E-02	176	-.121590470037687E-01
126	.584097711039741E-02	177	-.121757432831339E-01
127	.580826590913740E-02	178	-.121456182134558E-01
128	.574675594069745E-02	179	-.120667485473326E-01
129	.565646404651104E-02	180	-.119372309248093E-01
130	.553751253399454E-02	181	-.117551830933359E-01
131	.539012720277234E-02	182	-.115187450655343E-01
132	.521463518933063E-02	183	-.112260802144620E-01
133	.501146264771046E-02	184	-.108753763116315E-01
134	.478113228288904E-02	185	-.104648465024807E-01
135	.452426075288468E-02	186	-.999273022712390E-02
136	.424155595481832E-02	187	-.945729408377907E-02
137	.393381420935261E-02	188	-.885683263748579E-02
138	.360191735712918E-02	189	-.818966917530413E-02
139	.324682978032716E-02	190	-.745415640941313E-02
140	.286959536132000E-02	191	-.664867712935285E-02
141	.247133439029066E-02	192	-.577164480493857E-02
142	.205324043225773E-02	193	-.482150414108999E-02
143	.161657716404610E-02	194	-.379673158612544E-02
144	.116267519048706E-02	195	-.269583579474310E-02
145	.692928848971611E-03	196	-.151735804711315E-02
146	.208793010407206E-03	197	-.259872625540108E-03
147	-.288220115376666E-03	198	.107801285008499E-02
148	-.796544162834602E-03	199	.249765712656815E-02
149	-.131456177571864E-02	200	.400038506019962E-02
150	-.184060774783994E-02	201	.558748739666504E-02
151	-.237297213394087E-02	202	.726022058678534E-02

Окончание табл. 2

s	$a_s^{(230)}$	s	$a_s^{(230)}$
203	.901980663679382E-02	217	.433754657178826E-01
204	.108674329918692E-01	218	.465609590740353E-01
205	.128042524517940E-01	219	.498481657930039E-01
206	.148313831172691E-01	220	.532377270724433E-01
207	.169499083659244E-01	221	.567302515361130E-01
208	.191608768566664E-01	222	.603263155246664E-01
209	.214653025613207E-01	223	.640264633999260E-01
210	.238641648223355E-01	224	.678312078619005E-01
211	.263584084354670E-01	225	.717410302776951E-01
212	.289489437563807E-01	226	.757563810215965E-01
213	.316366468300626E-01	227	.798776798256220E-01
214	.344223595420063E-01	228	.841053161397818E-01
215	.373068897901165E-01	229	.884396495014390E-01
216	.402910116765023E-01	230	.928810099130641E-01

продемонстрировать возможности этих методов при очень большом числе стадий и чебышевском порядке однополусных аппроксимаций (степени двойки в оценке [7] скорости их сходимости к экспоненте), лежащих в их основе, и реальность вычисления весов этих методов с большими значениями m и n . Для вычисления весов на указанной ПЭВМ требуется не более минуты. Потому представляется технологически более рациональным включать алгоритм вычисления весов методов непосредственно в программы, реализующие численные модели прикладных задач.

Эффективность чебышевских методов, рассмотренных в работе [3], в численных моделях достаточно сложных прикладных начально-краевых задач диффузии может быть значительно выше эффективности неявных методов редукции многомерных задач к последовательности задач одномерных (ЛОМ, методы расщепления, метод дробных шагов и др.), поскольку последние, во-первых, не обладают свойством абсолютной аппроксимации и, во-вторых, недостаточно точны.

Методы, исследованные в работе [3], могут стать реальной альтернативой методам типа локально-одномерного, а их эффективность может быть еще выше, если системы разностных уравнений на каждой стадии алгоритма полиномиального ускорения, реализующего $T_{m,n}$ -методы, решать итерационными методами более быстрыми, чем, использованный в работе [1] метод релаксации. Более других для этого пригоден метод, описанный в работе [8], с максимально возможной скоростью сходимости.

Таким образом, результаты хронометража процессорного времени, необходимого для решения тестовой задачи, свидетельствуют о том, что чебышевский метод на порядок эффективнее локально-одномерного. Это

позволяет сделать вывод о предпочтительности использования в численных моделях процессов диффузии $T_{m,n}$ -методов при $m \gg n \gg 1$ вместо широко распространенных методов, основанных на редукции многомерных задач к цепочке одномерных.

The paper states the results of comparison of efficiency of an implicit local unidimensional and Chebyshev $T_{230,15}$ -methods for solution of initial-boundary problems of thermodiffusion on an example of estimating the temperature of plasma-electrode system of a welding unit. A table of weight of $T_{230,15}$ -method is given.

1. Шихалиев С. З. Упрощенная физико-математическая модель динамического электромагнитно-теплого взаимодействия электродуговой плазмы с электродом // Электрон. моделирование. — 1997. — **19**, № 5. — С. 20—30.
2. Самарский А. А. Теория разностных схем / Учеб. пособие. — М.: Наука. 1977. — 656 с.
3. Шихалиев С. З. Чебышевские методы с минимальными весами решения начально-краевых задач для параболических уравнений // Электрон. моделирование. — 2004. — **26**, № 3. — С. 15 — 25.
4. Шихалиев С. З. Об эффективности неявных чебышевских методов решения начально-краевых задач диффузии // Там же. — 2003. — **25**, № 4. — С. 11 — 26.
5. Шихалиев С. З. Результаты апробации T_{mn} -методов в тепловой численной модели установки для прессовой магнито-дуговой сварки // Там же. — 2008. — **30**, № 2. — С. 109 — 114.
6. Евдокимов В. Ф., Борукаев З. Х., Шихалиев С. З. Некоторые результаты моделирования взаимодействия равновесной дуговой плазмы с металлическим электродом // Тр. конф. «Моделирование — 2006». — Киев : ИПМЭ НАН Украины, 2006. — С.7—10
7. Saff E. D., Shönhage A., Varga R. S. Geometric convergence to e^{-z} by Rational Function with Real Poles // Numer. Math. — 1976. — **25**, № 3. — P. 307—322.
8. Федоренко Р. П. Релаксационный метод решения разностных эллиптических уравнений // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1961. — **1**, №5. — С. 922—927.

Поступила 31.03.09

ШИХАЛИЕВ Сабир Заурович, науч. сотр. Ин-та проблем моделирования в энергетике им. Г.Е. Пухова НАН Украины. В 1967 г. окончил Киевский ин-т инженеров гражданской авиации. Область научных исследований — вычислительная физика.