Теорія оптимальних рішень

Рассматриваются особенности применения комбинированного метода выпуклого программирования для решения указанного в названии класса задач. Спецификой этих задач является кусочно-линейный характер используемых функций при очень большом количестве аппроксимирующих плоскостей. Описываются настройки и процедуры метода, а также приводятся сравнительные результаты вычислительных экспериментов.

УДК 519.8

В.В. БОЙКО, В.Н. КУЗЬМЕНКО

ПРИМЕНЕНИЕ КОМБИНИРОВАННОГО МЕТОДА ВЫПУКЛОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ В ЗАДАЧАХ ФИНАНСОВОЙ МАТЕМАТИКИ

Введение. В настоящей работе описываются особенности применения комбинированного метода выпуклого программирования [1, 2] к задачам финансовой математики. Такие задачи имеют разнообразные постановки, но все они так или иначе учитывают неопределенность, связанную с будущими курсами валют, стоимостью акций, вероятностью выигрыша или потерь, эффективностью портфелей акций и другими финансовыми показателями [3–5].

Теоретически предполагается, что неопределенные величины имеют некоторые непрерывные вероятностные распределения, на основании чего строятся зависимости, которые используются при формулировке задач. При выполнении расчетов и решении оптимизационных задач используются дискретные распределения, полученные на основании обработки статистики. В результате зависимости представляются в виде кусочно-линейных функций с большим числом линейных частей. Для эффективного применения комбинированного метода необходимо учитывать эти особенности и разработать соответствующие процедуры метода. К ним относятся: регулирование параметров внутренней подзадачи, критерии остановки метода, правила отсева аппроксимирующих плоскостей. Использование соответствующих процедур позволяет существенно ускорить работу метода.

Функции, используемые в финансовых моделях. Рассмотрим некоторую функцию $f(x,q)$, которая в финансовой модели будет определять потери или выигрыш, аргумент x которой – это вектор управляющих решений, а q – случайный вектор, связанный с будущим состоянием системы. Положительные значения $f(x,q)$ будут обозначать потери, а отрицательные – выигрыш. Функция распределения для $f(x,q)$ в общем виде задается следующим образом:

$$\Psi(x,\xi) = P[f(x,q) \le \xi].$$

При моделировании и оценке финансовой деятельности используется ряд производных функций, которые получаются на основе случайной функции $f(x,q)$. Одной из таких функций, которые используются в финансовых расчетах, является функция, задающая величину потерь для заданного уровня вероятности α (Value-at-risk – VaR). Она определяется как обратная функция к $\Psi(x,\xi)$ при фиксированном x, если такая существует, в общем случае – как α-квантиль от $f(x,q)$:

$$V_\alpha(x) = \arg\min_{\xi\in R}\{\Psi(x,\xi) \ge \alpha\}.$$

Близкая по смыслу функция, которая является оценкой сверху для $V_\alpha(x)$, есть функция средних потерь (Conditional Value-at-Risk – CVaR) [6], превышающих или равных значению $\xi = V_\alpha(x)$. Эта функция определяется следующим образом:

$$C_\alpha(x) = \frac{1}{1-\alpha}\int\limits_{\xi \ge V_\alpha(x)} \xi \cdot p(x,\xi)\,d\xi,$$

где $p(x,\xi)$ – плотность вероятности случайной функции $f(x,q)$.

Другой используемой функцией является частичный момент для заданного уровня значений w функции потерь (Partial Moment)

$$P_w(x) = \int\limits_{\xi \ge w} (\xi - w)\cdot p(x,\xi)\,d\xi.$$

Связь между функциями $V_\alpha(x)$, $C_\alpha(x)$ и $P_w(x)$ при заданном уровне вероятности α выражается формулой $(1-\alpha)\cdot\left(C_\alpha(x) - V_\alpha(x)\right) = P_{V_\alpha(x)}(x)$, а при заданном уровне w потерь – $(1-\alpha_w)\cdot\left(C_{\alpha_w}(x) - V_{\alpha_w}(x)\right) = P_w(x)$, где $\alpha_w = \Psi(x,w)$.

Также используются моменты абсолютных значений $f(x,q)$ (Mean-Absolute Penalty и Mean-Absolute Deviation):

$$M(x) = E\left(\,|f(x,q)|\,\right) \quad \text{и} \quad M_0(x) = E\left(\,|f(x,q) - E(f(x,q))|\,\right).$$

Линейные аппроксимации функций. В качестве функции $f(x,q)$ чаще всего рассматривается линейная функция $f(x,q) = q_0 + \sum_{i\in I} q_i x_i$, где I – множество финансовых инструментов; x_i – средства, вложенные в i-й финансовый инструмент; q_i – случайная величина, задающая потери или выигрыш по финансовому инструменту; q_0 – случайные потери или выигрыш, не связанный с финансовыми инструментами.

Количество рассматриваемых финансовых инструментов $|I|$ в реальных задачах может достигать нескольких тысяч.

Вероятностные характеристики случайного вектора q оцениваются, как правило, на основании статистики. При этом выборки могут иметь значительный объем. Например, они могут содержать сотни тысяч реализаций q^k, $k \in K, |K| \approx 10^5$. Как правило, вероятности p_k реализаций q^k рассматриваются как равные, но в общем случае их можно считать различными.

Вышеописанные функции в этом случае приближенно представляются следующим образом.

Величина потерь (VaR) для заданного уровня вероятности α

$$V_\alpha(x) = f(x, q^{k_\alpha}),$$

где реализация q^{k_α} находится следующим образом. Реализации q^k, $k \in K$ упорядочиваются по возрастанию значений $f(x, q^k)$. Для каждого порядкового номера m вычисляется сумма вероятностей $p_m^{sum} = \sum_{i=1}^{m} p_i$ по всем меньшим и равным реализациям. В качестве q^{k_α} берется первая реализация с номером m_α, такая, что $p_{m_\alpha}^{sum} \geq \alpha$.

Остальные функции вычисляются следующим образом:

$$C_\alpha(x) = \frac{1}{1-\alpha} \cdot \sum_{f(x,q^k) \geq V_\alpha(x)} f\left(x, q^k\right) \cdot p_k \,,$$

$$P_w(x) = \sum_{f(x,q^k) \geq w} (f\left(x, q^k\right) - w) \cdot p_k \,,$$

$$M(x) = \sum_{k \in K} \left| f\left(x, q^k\right) \right| \cdot p_k \,, \quad M_0(x) = \sum_{k \in K} \left| f\left(x, q^k\right) - A(x) \right| \cdot p_k \,,$$

где $A(x) = \sum_{k \in K} f\left(x, q^k\right) \cdot p_k$ – среднее значение.

Функции C_α, P_w, M, M_0, A – выпуклые не зависимо от способа их вычисления. При приближенном вычислении они являются также кусочно-линейными. Функция $V_\alpha(x)$ в общем случае не выпукла.

Формулировки задач, как правило, достаточно простые. Они включают до 10 содержательных ограничений и, возможно, систему линейных ограничений на вектор x.

Пример задачи оптимизации:

$$C_{1\alpha}(x) \to \min$$

$$P_{2w}(x) \le \overline{P},$$

$$A_3(x) \le \overline{A},$$

$$\underline{L}_j \le L_j(x) \le \overline{L}_j, \quad j \in J,$$

$$\underline{x}_i \le x_i \le \overline{x}_i, \quad i \in I.$$

Индексами 1, 2, 3 обозначено то, что вычисление соответствующих функций C_α, P_w, A основано на использовании различных функций потерь-выигрышей f_1, f_2, f_3, а значит на использовании различных случайных векторов q_1, q_2, q_3 и их реализаций.

Комбинированный метод. Напомним, что комбинированный метод [1, 2] используется для решения задач выпуклого программирования. В процессе решения строится последовательность точек, включающая подпоследовательность, сходящуюся к решению, используя следующую итерационную процедуру.

Очередная точка последовательности x_{k+1}, а также используемые на следующей итерации множество точек аппроксимации задачи X_{k+1} и штрафной множитель N_{k+1} определяются в конце *k*-го шага по результату решения такой подзадачи:

$$\min_{x,\,\xi_1,\xi_2} \left\{ \frac{1}{2u} \| x - \tilde{x}_k \|^2 + \xi_1 + N_k\, \xi_2 \right\}, \tag{1}$$

$$f(x_i) + (f'(x_i),\ x - x_i) \le \xi_1,\ \ \forall x_i \in X_k, \tag{2}$$

$$\varphi(x_i) + (\varphi'(x_i),\ x - x_i) \le \xi_2,\ \ \forall x_i \in X_k, \tag{3}$$

$$\xi_2 \ge 0,\ x \in M, \tag{4}$$

где $\tilde{x}_k = \arg\min\{F_k(x) : x \in X_k\}$ – точка минимума штрафной функции $F_k(x) = f(x) + N_k \max\{0; \varphi(x)\}$ на множестве X_k; подмножество линейных ограничений (2) – кусочно-линейная аппроксимация целевой функции; подмножество линейных ограничений (3) – кусочно-линейная аппроксимация обобщенного ограничения $\varphi(x) = \max\limits_j \{ f_j(x):\ 1 \le j \le m \}$, где $f_j(x):\ 1 \le j \le m$ – ограничения исходной задачи; M – многогранник, задаваемый линейными ограничениями; $f'(x), \varphi'(x)$ – элементы субдифференциалов $\partial f(x), \partial\varphi(x)$; функции f, f_j – выпуклые и непрерывные на M; $u > 0$ – параметр, регулирующий вес квадратичной добавки.

Применение комбинированного метода. При практической реализации комбинированного метода возникает необходимость разработки и использования дополнительных процедур метода: регулирование веса квадратичной добавки $1/u$; определение критериев остановки алгоритма; замена множеств X_k на подмножества $Y_k \subseteq X_k$ путем отсева точек аппроксимации, которые на последующих итерациях не будут влиять на решение подзадач (1)–(4). При этом необходимо отметить, что для эффективного решения задач различных типов следует учитывать особенности этих задач и применять различные способы регулировки, критерии остановки и процедуры отсева аппроксимирующих точек.

В работе [1] описан один из способов регулирования параметра u и отсева точек аппроксимации, который приводит к уменьшению количества итераций и ускоряет работу метода на отдельных итерациях. Этот способ дает существенное улучшение для гладких задач.

При решении задач, в которых функции задаются в виде большого числа кусочно-линейных аппроксимаций, используются несколько иные процедуры, которые оказываются более эффективными, чем описанные в [1]. При этом учитывается, что схема алгоритма решения квадратичной подзадачи (1)–(4) в определенном смысле соответствует схеме алгоритма рассматриваемого комбинированного метода: алгоритм решения подзадачи (1)-(4) реализует прямо-двойственный метод Гольдфарба и Индани [7] для задач квадратичного программирования. На каждом шаге алгоритм формирует список активных ограничений и минимизирует целевую функцию. Список активных ограничений на каждой итерации обновляется. В него добавляются ограничения, нарушенные в текущей точке, и выводятся неактивные. Если в текущей точке нет нарушенных ограничений, то подзадача (1)–(4) является решенной.

Из этого описания видно, что формирование новой квадратичной подзадачи (1)–(4) можно рассматривать как варьирование предыдущей и продолжение ее решения: добавление двух новых линейных ограничений (2), (3), полученных по точке x_{k+1}, соответствует увеличению списка активных ограничений внутренней подзадачи. Изменение параметров u, N_k и точки $\tilde{x}_k$ соответствует изменению только линейной части целевой функции подзадачи (1)–(4), если представить ее в виде

$$\min_{x,\,\xi_1,\xi_2} \left\{ \frac{1}{2}\|x\|^2 - (x, \tilde{x}_k) + u\,\xi_1 + u\,N_k\,\xi_2 + \frac{1}{2}\left\|\tilde{x}^k\right\|^2 \right\}.$$

Отсев точек множества X_k осуществляется с учетом наличия активных точек в конце решения подзадачи (1)–(4): все активные точки сохраняются.

В список точек, которые могут быть удалены из множества X_k, включаются только неактивные точки, для которых выполняется условие

$$f(x_i)+(f'(x_i),\, x-x_i)\le\xi_1-\delta\left|p_k\right|, \tag{5}$$

где δ – параметр порядка 10^{-2}; $p_k=x_{k+1}-\tilde{x}_k$ – смещение на итерации k.

Количество точек, которые удаляются, ограничивается двумя-тремя. Удаляются те точки, для которых левая часть оценки (5) минимальна.

Вычислительные эксперименты. Эффективность работы комбинированного метода на задачах финансовой математики была проверена на примерах (в таблице приведены некоторые сравнительные результаты). Так как зависимости C_α, P_w, M, M_0, A являются кусочно-линейными функциями с явно описанными линейными частями, то они могут быть представлены в виде систем линейных неравенств. Поэтому рассматриваемые задачи были представлены также в виде задача линейного программирования и решены соответствующими методами. Для сравнения эти задачи были решены также r-алгоритмом (время решения приведено в секундах).

Задача	Количество		Метод		
	переменных	реализаций	комбинированный	линейный	r-алгоритм
1	100	10000	24,6	45,8	56,7
2	125	20000	59,2	96,7	58,1
3	82	48000	152,3	420,6	180,4
4	14	100000	140,1	958,6	86,9
5	240	20000	283,2	581,3	365,9

Заключение. В результате выполненной работы разработаны процедуры комбинированного метода выпуклого программирования, которые позволили построить эффективный алгоритм для решения задач определенного типа. Этот алгоритм может применяться для любых задач, в которых функции, используемые в ограничениях и в цели, представляются как кусочно-линейные с большим количеством линейных аппроксимаций. Тестовые расчеты показали, что предложенный алгоритм существенно эффективней, по сравнению с методами линейного программирования, решает задачи, в которых число линейных аппроксимаций измеряется сотнями тысяч. Развитие работы будет направлено на построение алгоритмов эффективного решения других типов задач.

В.В. Бойко, В.М. Кузьменко

ЗАСТОСУВАННЯ КОМБІНОВАНОГО МЕТОДУ ОПУКЛОГО ПРОГРАМУВАННЯ В ЗАДАЧАХ ФІНАНСОВОЇ МАТЕМАТИКИ

Розглядаються особливості застосування комбінованого методу опуклого програмування для розв'язування класу задач, що вказані у назві. Специфікою цих задач є кусково-лінійний характер функцій, що використовуються, при значній кількості лінійних апроксимуючих площин. Описуються настройки та процедури методу, наводяться порівняльні результати обчислювальних експериментів.

V.V. Boyko, V.M. Kuzmenko

USING MIXED CONVEX PROGRAMMING METHOD FOR SOLVING FINANTIAL MATHEMATIC PROBLEM

The paper considers features of using mixed convex programming method for solving problems of pointed class. The main feature of these problems is using linear peacewise functions with much number of linear peaces. Ajustments and procedures of the method are discribed, comparison results of computational experiments with other methods are given.

1. *Пшеничный Б.Н., Ненахов Э.И., Кузьменко В.Н.* Комбинированный метод решения общей задачи выпуклого программирования // Кибернетика и системный анализ. – 1998. – № 4. – С. 121–134.
2. *Кузьменко В.Н., Бойко В.В.* О применении комбинированного метода выпуклого программирования // Теорія оптимальних рішень. – К.: Ін-т кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, 2003. – С. 19–24.
3. *Markowitz H.M.* The Optimization of a Quadratic Function Subject to Linear Constraints // Naval Research Logistics Quarterly. – 1956. – 3. – P. 111–133.
4. *Huang C.F., Litzenberger R.H.* Foundations for Financial Economics. – Elsevier Science Publishing Co., Inc., 1988. – 347 p.
5. *Elton E., Gruber M., Brown S.* Modern Portfolio Theory and Investment Analysis. – John Wiley and Sons, 6th edition, 2003. – 589 p.
6. *Rockafellar R.T., Uryasev S.P.* Optimization of Conditional Value-at-Risk // J. of Risk. – 2000. – 2. – P. 21–41.
7. *Goldfarb D., Idnani A.* A numerically stable method for solving strictly convex quadratic programs // Mathematical Programming. – 1983. – 27. – P. 1–33.

Получено 25.03.2008