Теорія оптимальних рішень

УДК 518.9

Ю.Н. ОНОПЧУК, Ал. А. ЧИКРИЙ

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Рассматриваются игровые задачи сближения с переменным цилиндрическим терминальным множеством для квазилинейных нестационарных систем. Получены достаточные условия разрешимости за некоторое гарантированное время в классе квази и стробоскопических стратегий. Дано сравнение гарантированных времен.

Введение. Для квазилинейных нестационарных конфликтно-управляемых процессов с цилиндрическим терминальным множеством устанавливаются достаточные условия окончания игры за некоторое гарантированное время в классе квази и стробоскопических стратегий. При этом используются различные схемы метода разрешающих функций [1], а ключевую роль играет условие выпуклозначности некоторого отображения. Результаты иллюстрируются на модельном примере с простыми движениями.

Пусть движение объекта в вещественном конечномерном евклидовом пространстве R^n описывается системой квазилинейных дифференциальных уравнений

$$\dot{z} = A(t)z + \varphi(t,u,v),\ z(t_0) = z_0,\quad t \ge t_0 \ge 0, \tag{1}$$

где $A(t)$ – матричная функция порядка n, элементы которой являются измеримыми функциями и суммируемы на любом конечном интервале $[t_0, T]$, $t_0 < T < +\infty$. Параметры управления игроков u и v выбираются из областей управления $U(t)$ и $V(t)$, причем они являются измеримыми (по Лебегу) и компактозначными отображениями при $t \in [t_0, +\infty)$, $U(t) \in K(R^p)$, $V(t) \in K(R^q)$, $K(R^p)$ – совокупность непустых компактов пространства R^p. Вектор-функция $\varphi(t,u,v)$, определена на множестве $[t_0, +\infty) \times R^p \times R^q$ и удовлетворяет условиям Каратеодори:

для всех фиксированных $(u,v)\in R^p\times R^q$ она измерима по $t, t\in[t_0,+\infty)$, и для любого фиксированного $t\in[t_0,+\infty)$ она непрерывна по совокупности (u,v) на $R^p\times R^q$. Будем также считать, что

$$\|\varphi(t,u,v)\|\le a(t)\quad \forall\quad u\in U(t),\quad v\in V(t),\quad t\in[t_0,+\infty), \tag{2}$$

где $a(t)$ – суммируемая на любом конечном интервале $[t_0,T]$, $t_0<T<+\infty$, функция.

Кроме динамической системы (1) задано терминальное множество $M^*(t)$, которое имеет цилиндрический вид

$$M^*(t)=M_0+M(t), t\in[t_0,+\infty), \tag{3}$$

где M_0 – линейное подпространство в R^n, а $M(t)$ – измеримое отображение, принимающее значения из $K(L)$, где L – ортогональное дополнение к M_0 в пространстве R^n.

Цель первого игрока – преследователя (u) с помощью выбора управления $u(t)$ вывести траекторию процесса (1) на терминальное множество $M^*(t)$ за кратчайшее время. Цель второго игрока – убегающего (v) с помощью управления $v(t)$ уклонить траекторию процесса (1) от встречи с множеством $M^*(t)$ в конечный момент времени, а если это невозможно, то максимально оттянуть момент встречи.

Для полной формулировки задачи сближения необходимо точно определить информированность обоих игроков в процессе игры. Приняв сторону первого игрока, выясним какой результат он может гарантировать себе. Будем считать, что убегающий в качестве управления выбирает произвольные измеримые функции $v(t)$ со значениями из многозначного отображения $V(t)$. Поскольку это отображение является измеримым и замкнутозначным, то в силу теоремы об измеримом выборе [2] это возможно. Совокупность таких управлений – измеримых селекторов отображения $V(t)$ обозначим Ω_E и будем называть программными управлениями.

Если первый игрок в момент принятия решения имеет информацию о начальном состоянии процесса (t_0,z_0) и предыстории управления убегающего

$$v_t(\cdot)=\{v(s): v(s)\in V(s),\ s\in[t_0,t]\},$$

т.е. $u(t)=u(t_0,z_0,t,v_t(\cdot))$, то будем говорить, что это управление предписано соответствующей квазистратегией. Конечно, функция $u(t)$ обязана быть измеримым селектором отображения $U(t)$. Если же преследователь принимает решение в момент t лишь на основании информации о начальном состоянии и мгновенном значении управления убегающего, т. е. $u(t)=u(t_0,z_0,t,v(t))$, то будем говорить о контруправлении по Н.Н. Красовскому [3], которое назначается стробоскопической стратегией О. Хайека [4].

При этих условиях необходимо найти достаточные условия окончания игры (1) – (3) в пользу первого игрока за некоторое гарантированное время при той или иной информированности.

Перейдем к схеме метода разрешающих функций [1, 5], соответствующей задаче сближения (1) – (3). Обозначим π ортопроектор, который действует из R^n в L, и рассмотрим многозначное отображение

$$\varphi(t, U(t), v) = \{\varphi(t, u, v) : u \in U(t)\},\ t \geq t_0,\ v \in V(t).$$

В силу предположений о параметрах конфликтно-управляемого процесса (1) – (3) и теоремы о прямом образе [2] данное отображение измеримо по t и непрерывно по v. Положим

$$W(t, \tau, v) = \pi\Phi(t, \tau)\varphi(\tau, U(\tau), v)$$

$$W(t, \tau) = \bigcap_{v \in V(\tau)} W(t, \tau, v),\ t \geq \tau \geq t_0,\ v \in V(\tau).$$

Здесь $\Phi(t, \tau)$ – переходная матрица однородной системы (1) – матрица Коши. Многозначное отображение $W(t, \tau, v)$ является измеримым по τ и непрерывным по v, а отображение $W(t, \tau)$ измеримо по τ [6], причем в силу неравенства (2) при фиксированном t для каждого ω, $\omega \in W(t, \tau)$ для любого τ, $t \geq \tau \geq t_0$, $\|\omega\| \leq b(\tau)$, где $b(\tau)$ суммируема на любом конечном интервале из $[t_0, +\infty)$.

Условие Понтрягина. Многозначное отображение $W(t, \tau)$ принимает непустые значения для $t_0 \leq \tau \leq t < +\infty$.

Поскольку отображение $W(t, \tau)$ является измеримым по τ и замкнутозначным, то в силу теоремы об измеримом выборе [2, 7] существует измеримый по τ селектор $\gamma(t, \tau)$, $\gamma(t, \tau) \in W(t, \tau), t \geq \tau \geq t_0$, который в силу (2) является суммируемой по τ на $[t_0, t]$ функцией при любом t. Зафиксируем его и обозначим

$$\xi(t_0, z_0, t, \gamma(t, \cdot)) = \pi\Phi(t, t_0)z_0 + \int_{t_0}^{t} \gamma(t, \tau)d\tau.$$

С помощью обратного функционала Минковского [1]

$$\alpha_X(p) = \sup\{\alpha \geq 0 : \alpha p \in X\}, \quad X = \overline{X}, \quad 0 \in X, \quad p \in R^n,$$

рассмотрим функцию

$$\alpha(t, \tau, v, m) = \alpha_{W(t,\tau,v) - \gamma(t,\tau)}(m - \xi(t_0, z_0, t, \gamma(t, \cdot)))$$

для $t \geq \tau \geq t_0, \quad v \in V(\tau), \quad m \in M(t)$.

В силу свойств функционала $\alpha_X(p)$, многозначного отображения $W(t, \tau, v)$ и селектора $\gamma(t, \tau)$ функция $\alpha(t, \tau, v, m)$ является измеримой по τ и полунепрерывной сверху по m [1]. Положим

$$\alpha(t,\tau,v)=\sup_{m\in M(t)}\alpha(t,\tau,v,m).$$

Согласно теореме о маргинальном отображении [2] функция $\alpha(t,\tau,v)$ измерима по τ. Она к тому же полунепрерывна сверху по v [1] и $L\times B$-измерима по совокупности (τ,v), $\tau\in[t_0,t]$, $v\in V(\tau)$, для любого $t\in[t_0,+\infty)$.

Функция $\alpha(t,\tau,v)$ может быть определена и другим образом.

Действительно, рассмотрим многозначное отображение

$$\mathrm{A}(t,\tau,v)=\{\alpha\geq 0:[W(t,\tau,v)-\gamma(t,\tau)]\bigcap\alpha[M(t)-\xi(t_0,z_0,t,\gamma(t,\cdot))]\neq\varnothing\},\quad (4)$$

$$t\geq\tau\geq t_0,\quad v\in V(\tau),\quad \mathrm{A}(t,\tau,v)\in 2^{R_+},$$

и его опорную функцию в направлении +1. Тогда

$$\alpha(t,\tau,v)=\sup\{\alpha:\alpha\in\mathrm{A}(t,\tau,v)\}.\quad (5)$$

Функцию $\alpha(t,\tau,v)$ в дальнейшем будем называть разрешающей [1]. Поскольку выполнено условие Понтрягина, то в силу построений и из теоремы об обратном образе [2] вытекает, что отображение $\mathrm{A}(t,\tau,v)$ является $L\times B$-измеримым по совокупности (τ,v), $\tau\in[t_0,t]$, $v\in V(\tau)$, а также замкнутозначным. Отметим также, что при $\xi(t_0,z_0,t,\gamma(t,\cdot))\in M(t)$ получим $\mathrm{A}(t,\tau,v)=[0,+\infty)$ и, соответственно, $\alpha(t,\tau,v)=+\infty$ при любых $\tau\in[t_0,t]$, $v\in V(\tau)$ согласно формул (4), (5).

Рассмотрим множество

$$T(t_0,z_0,\gamma(\cdot,\cdot))=\left\{t\geq t_0:\inf_{v(\cdot)\in\Omega_E}\int_{t_0}^{t}\alpha(t,\tau,v(\tau))d\tau\geq 1\right\}.\quad (6)$$

Поскольку функция $\alpha(t,\tau,v)$ является $L\times B$-измеримой по совокупности (τ,v) при каждом $t>t_0$ на своей области определения, то она и суперпозиционно измерима [8], а значит, соответствующий интеграл в (6) имеет смысл. Отметим, что в случае $\xi(t_0,z_0,t,\gamma(t,\cdot))\in M(t)$ и, соответственно, $\inf_{v\in V(\tau)}\alpha(t,\tau,v)=+\infty$, $\tau\in[t_0,t]$, значение интеграла в (6) естественно положить равным $+\infty$ и неравенство выполнено автоматически. В случае, когда неравенство в (6) не выполняется при любых $t>t_0$, положим $T(t_0,z_0,\gamma(\cdot,\cdot))=\varnothing$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1) – (3) выполнено условие Понтрягина.

Тогда, если при заданном начальном состоянии (t_0,z_0) существует такой измеримый по τ селектор $\gamma(t,\tau)$, $t_0\leq\tau\leq t<+\infty$, многозначного отображения $W(t,\tau)$, что $T(t_0,z_0,\gamma(\cdot,\cdot))\neq\varnothing$ и $T\in T(t_0,z_0,\gamma(\cdot,\cdot))$, причем $M(T)=\mathrm{co}\,M(T)$, то траектория процесса (1) может быть приведена на терминальное множество (3) в момент T с помощью управления вида

$$u(t)=u\big(t_0,z_0,t,v_t(\cdot)\big),\quad t\in[t_0,T].$$

Доказательство проводится по схеме метода разрешающих функций [1, 8] с помощью построения управления преследователя на активном и пассивном участках [5].

Представляет интерес ситуация, когда процесс преследования в теореме 1 можно реализовать в классе стробоскопических стратегий, не используя информацию о предыстории управления убегающего. Для того, чтобы ответить на поставленный вопрос сформулируем некоторые условия.

Условие 1. При $\xi\big(t_0,z_0,T,\gamma(T,\cdot)\big)\notin M(T)$ отображение $\mathrm{A}\big(T,\tau,v\big)$, $v\in V(\tau)$, $\tau\in[t_0,T]$, является выпуклозначным, т.е.

$$\mathrm{A}\big(T,\tau,v\big)=\big[0,\alpha(T,\tau,v)\big].$$

Условие 1 выполнено, если отображение $W\big(T,\tau,v\big)$, $v\in V(\tau)$, $\tau\in[t_0,T]$, выпуклозначно и $M(T)=\operatorname{co}M(T)$.

Условие 2. Если $\xi\big(t_0,z_0,T,\gamma(T,\cdot)\big)\notin M(T)$, то функция

$$\alpha_*(T,\tau)=\inf_{v\in V(\tau)}\alpha\big(T,\tau,v\big),\ \tau\in[t_0,T],$$

является измеримой по τ и справедливо равенство

$$\inf_{v(\cdot)\in\Omega_E}\int_{t_0}^{T}\alpha\big(T,\tau,v(\tau)\big)d\tau=\int_{t_0}^{T}\inf_{v\in V(\tau)}\alpha\big(T,\tau,v\big)d\tau.$$

Последнее равенство выражает суть теоремы Ляпунова о векторных мерах [7].

Теорема 2. Пусть для нестационарной дифференциальной игры (1) – (3) выполнено условие Понтрягина.

Тогда, если для начального состояния (t_0,z_0) существует такой измеримый по τ селектор $\gamma(t,\tau)$, $t_0\le\tau\le t<+\infty$, многозначного отображения $W(t,\tau)$, что $T\in T\big(t_0,z_0,\gamma(\cdot,\cdot)\big)\ne\varnothing$, причем выполнены условия 1 и 2 и $M(T)=\operatorname{co}M(T)$, то траектория процесса (1) может быть приведена на терминальное множество (3) в момент T с помощью контруправления вида

$$u(t)=u\big(t_0,z_0,t,v(t)\big),\quad t\in[t_0,T].$$

Доказательство проводится по стандартной схеме [1, 8] с учетом условий 1 и 2.

Дополнительное условие 1 естественным образом приводит к некоторой модификации основной схемы метода разрешающих функций, которая дает, в определенной степени, исчерпывающий ответ на вопрос о разрешимости игровой задачи сближения в классе стробоскопических стратегий.

Рассмотрим многозначное отображение

$$\mathrm{A}(t,\tau)=\bigcap_{v\in V(\tau)}\mathrm{A}(t,\tau,v),\ t\geq\tau\geq t_0 .$$

Оно имеет непустые образы, поскольку, по крайней мере, $0\in \mathrm{A}(t,\tau,v)$, $v\in V(\tau)$, $\tau\in[t_0,t]$, является измеримым по τ [2] и замкнутозначным. Введем опорную функцию отображения $\mathrm{A}(t,\tau)$ в направлении $+1$

$$\alpha(t,\tau)=\sup\{\alpha\geq 0:\alpha\in \mathrm{A}(t,\tau)\},\ t\geq\tau\geq t_0 .$$

В силу теоремы об опорной функции [2] она измерима по τ. Обозначим множество

$$\Theta(t_0,z_0,\gamma(\cdot,\cdot))=\left\{t\geq t_0:\int_{t_0}^{t}\alpha(t,\tau)d\tau\geq 1\right\}.$$

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1) – (3) выполнено условие Понтрягина.

Тогда, если для начального состояния (t_0,z_0) существует измеримый по τ селектор $\gamma(t,\tau)$, $\gamma(t,\tau)\in W(t,\tau)$, $t_0\leq\tau\leq t<+\infty$, такой, что $\Theta\in\Theta(t_0,z_0,\gamma(\cdot,\cdot))$, причем $M(\Theta)=\mathrm{co}\,M(\Theta)$, то траектория процесса (1) может быть приведена на множество (3) в момент Θ с помощью определенного контруправления.

Доказательство аналогично приведенному в работе [8].

Для того, чтобы можно было сравнивать гарантированные времена из множеств $T(t_0,z_0,\gamma(\cdot,\cdot))$ и $\Theta(t_0,z_0,\gamma(\cdot,\cdot))$ установим соотношения между разрешающими функциями

$$\alpha_*(t,\tau)=\inf_{v\in V(\tau)}\sup\{\alpha:\alpha\in \mathrm{A}(t,\tau,v)\},$$

$$\alpha(t,\tau)=\sup\left\{\alpha:\alpha\in\bigcap_{v\in V(\tau)}\mathrm{A}(t,\tau,v)\right\},\ t_0\leq\tau\leq t<+\infty .$$

Утверждение 1. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1) – (3) выполнено условие Понтрягина.

Тогда для любого начального состояния (t_0,z_0) и выбранного селектора $\gamma(\cdot,\cdot)$ имеет место неравенство

$$\alpha(t,\tau)\leq\alpha_*(t,\tau),\ t_0\leq\tau\leq t<+\infty .$$

Если к тому же выполнено условие выпуклозначности отображения $\mathrm{A}(t,\tau,v)$, то значения функций $\alpha(t,\tau)$ и $\alpha_*(t,\tau)$ совпадают.

Пример. Рассмотрим для иллюстрации простое движение в плоскости со стационарными параметрами

$$\dot z=u-v,\ z\in R^2,\ U(t)=\{u:\|u\|\leq 2\}\bigcup\{u:3\leq\|u\|\leq 4\}=U ,$$

$$V(t)=\{v:\|v\|\le 2\},\ M^*(t)=M_0=M(t)=\{0\}, t\ge 0,$$
$$t_0=0.$$

Здесь, очевидно, $A(t)=0$, $L=R^2$, а $\pi=E$ – является оператором тождественного преобразования и задается единичной матрицей. Тогда

$$W(t,\tau)=\{0\},\ 0\le\tau\le t<+\infty.$$

Условие Понтрягина выполнено.

Пусть $z_0=(0{,}5)$. Тогда автоматически $\gamma(t,\tau)=0$, $0\le\tau\le t<+\infty$,

$$\mathrm{A}(t,\tau,v)=\mathrm{A}(v)=\{\alpha\ge 0:-\alpha z_0\in U-v\}.$$

Поскольку $\mathrm{A}(t,\tau,v)$ принимает числовые значения из R_+ и не зависит от t и τ, то нетрудно посчитать, что

при $v=(0,0)$ $\quad \mathrm{A}(v)=[0,2/5]\bigcup[3/5,4/5]$,

при $v=(0,-2)$ $\quad \mathrm{A}(v)=\{0\}\bigcup[1/5,2/5]$,

при $v=(0,+2)$ $\quad \mathrm{A}(v)=[0,4/5]\bigcup[1,6/5]$,

при $v=(-2,0)$, $\quad \mathrm{A}(v)=\{0\}\bigcup[\sqrt{5}/5,2\sqrt{3}/5]$.
$v=(2,0)$

Даных значений достаточно, чтобы заключить, что $\mathrm{A}(t,\tau)=\{0\}$, и, соответственно, $\alpha(t,\tau)=0$, $0\le\tau\le t<+\infty$, а $\alpha_*(t,\tau)=2/5$, $0\le\tau\le t<+\infty$. Следовательно, $\Theta(0,z_0,0)=\varnothing$, а

$$T(0,z_0,0)=\{t:t\ge 5/2\}.$$

В силу симметрии областей управления относительно нуля можно сделать вывод, что

$$\Theta(0,z_0,0)=\varnothing,\ T(0,z_0,0)=\{t:t\ge\|z_0\|/2\}\text{ для всех } z_0,\ z_0\ne 0.$$

В этом примере отображение $\mathrm{A}(t,\tau,v)$ не является выпуклозначным и поэтому игра не может быть закончена за конечное фиксированное время ни из одной точки z_0, $z_0\ne 0$, в классе стробоскопических стратегий, несмотря на то, что условие Понтрягина выполнено. Использование предыстории управления убегающего, т. е. квазистратегий, напротив позволяет закончить игру за фиксированное время из любых начальных состояний. Отметим также, что в данном примере игра может быть закончена за нефиксированное время в классе стробоскопических стратегий из любых начальных положений [1].

Ю.М. Онопчук, О.А. Чикрій

НЕСТАЦІОНАРНІ ПРОЦЕСИ КЕРУВАННЯ РУХОМ В УМОВАХ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ

Розглядаються ігрові задачі зближення зі змінною циліндричною термінальною множиною для квазілінійних нестаціонарних систем. Отримані достатні умови розв’язності задачі за деякий гарантований час у класах квазі та стробоскопічних стратегій. Дано порівняння гарантованих часів. Результати ілюструються на модельному прикладі.

Yu.M. Onopchuk, O.A. Chikrii

NONSTATIONARY PROCESSES OF MOTION CONTROL IN CONDITION OF UNCERTAINTY

Game problems of approach a variable terminal set are studied for quasilinear nonstationary systems. Sufficient conditions for termination of the game in a finite time are derived in the case of quasi and stroboscopic strategies of the pursuer. The guaranteed times are compared. Obtained results are illustrated by a model example.

1. *Чикрий А.А.* Конфликтно управляемые процессы. – К.: Наук. думка, 1992. – 384 с.
2. *Aubin J.-P., Frankowska H.* Set-valued analysis. – Boston; Basel; Berlin: Birkhauser, 1990. – 461 p.
3. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. – М.: Наука, 1974. – 455 с.
4. *Hajek O.* Pursuit Games. – Acad. Press, 1975. – **12** – 266 p.
5. *Чикрий Ал.А.* Об одном классе нестационарных задач преследования // Проблемы управления и информатики. – 1995. – № 4. – С. 64 – 74.
6. *Никольский М.С.* Первый прямой метод Л.С. Понтрягина в дифференциальных играх. – М.: Изд-во МГУ, 1984. – 65 с.
7. *Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.* Теория экстремальных задач. – М.: Наука, 1974. – 480 с.
8. *Чикрий А.А., Раппопорт И.С., Чикрий К.А.* Многозначные отображения и их селекторы в теории конфликтно-управляемых процессов // Кибернетика и системный анализ. – 2007. – № 5. – С. 129 – 144.

Получено 31.03.2008