doi: https://doi.org/10.15407/dopovidi2017.09.041
УДК 532.3

В.Д. Кубенко, академик НАН Украины

Институт механики им. С.П.Тимошенко НАН Украины, Киев
E-mail: vdk@inmech.kiev.ua

Об определении волнового потенциала вибрирующей сферической частицы в полубесконечном цилиндре с жидкостью

Рассматривается полубесконечная круговая цилиндрическая полость, заполненная идеальной сжимаемой жидкостью и содержащая сферическое тело, поверхность которого возбуждается с заданной частотой. Требуется построить волновой потенциал для рассматриваемой области с целью определения влияния торца цилиндра на характер полей давления и скорости в системе. Формулируется соответствующая краевая задача для уравнения Гельмгольца. Общее решение задачи строится в виде суперпозиции потенциалов, записанных с использованием цилиндрических и сферических волновых функций. Вводится в рассмотрение также "мнимая" сфера, с помощью которой реализуется условие в торцевом сечении цилиндра. Для удовлетворения граничным условиям применяются переразложения сферических волновых функций по цилиндрическим и наоборот, а также теоремы сложения сферических функций. В результате решение задачи сводится к решению бесконечной системы алгебраических уравнений, которую предлагается решать методом усечения.

Ключевые слова: *полубесконечный цилиндр, сжимаемая жидкость, вибрирующая сферическая частица.*

Исследование высокочастотных колебаний жидкости в сосудах актуально в связи с развитием некоторых технологических процессов, таких как, например, дегазация и очистка жидкостей, флотация, задачи биомеханики и другие. Известно, что воздействие наведенного волнового поля способно управлять процессами движения частиц и их систем в жидкости. В работе [1] предложен подход к решению задач дифракции в сжимаемой жидкости в присутствии системы цилиндрических и сферических тел. В публикации [2] исследовано поле давлений в сжимаемой жидкости, заполняющей бесконечный цилиндрический сосуд со сферической частицей. В работе [3] построено решение задачи для полубесконечного сосуда с несжимаемой жидкостью. В данной публикации рассматривается аналогичная задача для случая сжимаемой жидкости, для которой в [2] установлено, что при некоторых частотах возбуждения уровень давления существенно повышается, что может свидетельствовать о наличии собственных частот такой системы. Можно ожидать, что при расположении частицы вблизи торцевого сечения цилиндра волновое поле может существенно измениться.

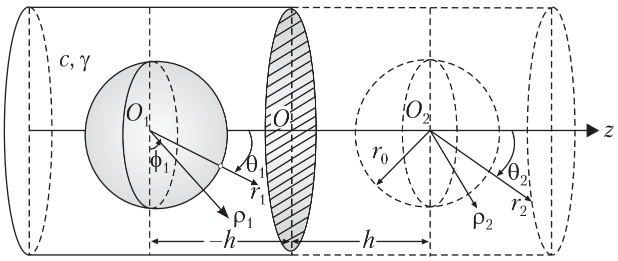

Схема задачи

1. Формулировка задачи. Рассматривается сосуд в виде полубесконечной круговой цилиндрической полости радиуса ρ_0, отнесенной к круговым цилиндрическим координатам ρ, z с началом O в центре торцевого сечения (рис.). На оси z цилиндра в точке O_1 расположено сферическое тело радиуса r_0, совершающее периодические движения, которые обусловливают появление в жидкости гидроакустического поля давления.

Для формулировки задачи введем следующие безразмерные обозначения:

$$\bar{r} = \frac{r}{\rho_0}; \quad \bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0}; \quad \bar{z} = \frac{z}{\rho_0}; \quad \bar{t} = \frac{ct}{\rho_0}; \quad \bar{\omega} = \frac{\omega\rho_0}{c}; \quad \bar{U} = \frac{U}{c}; \quad \bar{p} = \frac{p}{\gamma c^2}. \tag{1}$$

Здесь γ, c — плотность среды и скорость звука; U — скорость движения; ω — частота; p — давление; t — время. Ниже черточка над обозначениями будет опущена. Множитель $e^{-i\omega t}$ будет также всюду опущен. Задача состоит в построении решения уравнения Гельмгольца относительно потенциала возмущений Ф [4]

$$\Delta\Phi + \omega^2\Phi = 0. \tag{2}$$

при соответствующих граничных условиях на боковой поверхности цилиндра и сферы, и на торце цилиндра. Так, если на сфере задано осесимметричное осциллирующее давление, то условие при $r_1 = r_0$ будет

$$p(\theta) = -\omega\Phi\big|_{r_1=r_0} = \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{p}_m P_m(\cos\theta). \tag{3}$$

где $P_m(\cos\theta)$ — полином Лежандра [5].

На жесткой поверхности цилиндра имеет место условие непротекания

$$U_\rho\big|_{\rho=1} = \frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\bigg|_{\rho=1} = 0. \tag{4}$$

На поверхности торцевой стенки $(z = 0)$ в общем случае имеем

$$\alpha p + \beta U_r\big|_{z=0} = 0(0). \tag{5}$$

Если $\beta = 0$, имеем свободную границу, если $\alpha = 0$, имеем жесткую стенку.

2. Общее решение. Задача решается рассмотрением системы двух одинаковых сферических тел, расположенных в полости на расстоянии $\pm h$ от отражающей плоскости $z = 0$: тело 1 — реальное, тело 2 — искусственно вводимое синфазно возмущаемое тело для реализации необходимых граничных условий в плоскости $z = 0$. Цилиндрический потенциал (ограниченный при $\rho = 0$) запишем в виде

$$\Phi_{cyl}(\rho, z) = \int_{-\infty}^{\infty} B(\xi) J_0(\sqrt{\omega^2 - \xi^2}\rho) e^{i\xi z} d\xi. \tag{6}$$

Здесь J_0 — цилиндрическая функция Бесселя нулевого индекса [5]; $B(\xi)$ — неизвестная плотность.

Вводятся системы сферических координат, связанных с каждым телом: (r_1, θ_1) и (r_2, θ_2). Общее решение в сферических координатах состоит из суммы двух потенциальных функций и с учетом условий излучения при $r_1, r_2 \to \infty$ может быть записано в виде

$$\Phi_{sph} = \Phi_{sph}^{(1)}(r_1, \theta_1) + \Phi_{sph}^{(2)}(r_2, \theta_2),$$
$$\Phi_{sph}^{(j)}(r_j, \theta_j) = \sum_{m=0}^{\infty} X_m^{(j)} h_m(\omega r_j) P_m(\cos\theta_j), \quad j = 1, 2 \tag{7}$$

Здесь h_m — сферическая функция Ханкеля; $X_m^{(i)}$ — искомая неизвестная. Представим общий потенциал возмущенного движения в виде суперпозиции потенциалов, порожденных наличием цилиндрической и сферических поверхностей

$$\Phi = \Phi_{cyl} + \Phi_{sph}. \tag{8}$$

Для удовлетворения граничным условиям потенциал Φ необходимо представить в координатах каждого тела. С этой целью перепишем сферическое решение в цилиндрических координатах используя соотношение [1]

$$h_n(\omega r_{1,2}) P_n(\cos\theta_{1,2}) = \frac{i^{-n}}{2\omega} \int_{-\infty}^{\infty} P_n\left(\frac{\xi}{\omega}\right) H_0(\sqrt{\omega^2 - \xi^2}\rho)\, e^{i\xi(z \pm h)} d\xi \tag{9}$$

Получим

$$\Phi_{sph} = \int_{-\infty}^{\infty} A(\xi) H_0(\sqrt{\omega^2 - \xi^2}\rho)\, e^{i\xi z} d\xi,$$
$$A(\xi) = \frac{1}{2\omega} \sum_{m=0}^{\infty} i^{-m} [X_m^{(1)} e^{-i\xi h} + X_m^{(2)} e^{i\xi h}] P_m\left(\frac{\xi}{\omega}\right). \tag{10}$$

Используя известное соотношение [4]

$$e^{i\xi z} J_0(\sqrt{\omega^2 - \xi^2}\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) P_n\left(\frac{\xi}{\omega}\right) j_n(\omega r) P_n(\cos\theta), \tag{11}$$

цилиндрическое решение (6) можно записать в сферических координатах каждой сферы

$$\Phi_{cyl} = \sum_{m=0}^{\infty} B_m^{(1)} j_m(\omega r_1) P_m(\cos\theta_1); \quad B_m^{(1)} = i^m (2m+1) \int_{-\infty}^{\infty} B(\xi) P_m\left(\frac{\xi}{\omega}\right) e^{-i\xi h} d\xi;$$
$$\Phi_{cyl} = \sum_{m=0}^{\infty} B_m^{(2)} j_m(\omega r_2) P_m(\cos\theta_2); \quad B_m^{(2)} = i^m (2m+1) \int_{-\infty}^{\infty} B(\xi) P_m\left(\frac{\xi}{\omega}\right) e^{i\xi h} d\xi. \tag{12}$$

Здесь j_m — сферическая функция Бесселя. Потенциал $\Phi_{sph}^{(1)}(r_1, \theta_1)$ может быть переписан в координатах (r_2, θ_2) и наоборот при помощи теорем сложения сферических функций [7]

$$h_m(\omega r_1) P_m(\cos\theta_1) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_{0n0m}^{(1)}(2h\omega) j_n(\omega r_2) P_n(\cos\theta_2),$$
$$h_m(\omega r_2) P_m(\cos\theta_2) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_{0n0m}^{(2)}(2h\omega) j_n(\omega r_1) P_n(\cos\theta_1). \tag{13}$$

В формулах (13) введены обозначения

$$Q_{0n0m}^{(1)}(2h\omega)=\frac{2i^{n-m}}{N_{0n}}\sum_{l=|n-m|}^{n+m} i^l b_l^{(m0n0)} h_l(2h\omega);$$

$$Q_{0n0m}^{(2)}(2h\omega)=\frac{2i^{n-m}}{N_{0n}}\sum_{l=|n-m|}^{n+m} (-1)^l i^l b_l^{(m0n0)} h_l(2h\omega); \tag{14}$$

$$N_{0n}=\frac{2}{2n+1},\quad b_l^{(m0n0)}=(m,n,0,0\,|\,l,0)^2.$$

Здесь $(m, n, 0{,}0|m, n, l{,}0)$ — коэффициенты Клебша—Гордана [8].

Полный потенциал в сферических и цилиндрических координатах соответственно будет иметь вид

$$\Phi(r_j,\theta_j)=\sum_{m=0}^{\infty}\left[X_m^{(j)} h_m(\omega r_1)+\sum_{k=0}^{\infty} X_k^{(j)} Q_{0m0k}^{(j)}(2h\omega)\, j_m(\omega r_1)+B_m^{(j)} j_m(\omega r_1)\right] P_m(\cos\theta_j),$$

$$j=1,2; \tag{15}$$

$$\Phi(\rho,z)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[B(\xi)J_0(\sqrt{\omega^2-\xi^2}\rho)+A(\xi)H_0(\sqrt{\omega^2-\xi^2}\rho)\right]e^{i\xi z}d\xi;$$

$$A(\xi)=\frac{1}{2\omega}\sum_{m=0}^{\infty} i^{-m}(X_m^{(1)}e^{-i\xi h}+X_m^{(2)}e^{i\xi h})P_m\left(\frac{\xi}{\omega}\right). \tag{16}$$

3. Удовлетворение граничным условиям. Из граничного условия на поверхности цилиндра (4) и выражения для потенциала (16) имеем:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[B(\xi)J_1(\sqrt{\omega^1-\xi^2})+A(\xi)H_1(\sqrt{\omega^2-\xi^2})\right]\sqrt{\omega^2-\xi^2}e^{i\xi z}d\xi=0,$$

отсюда вследствие единственности преобразования Фурье находим

$$B(\xi)J_1(\sqrt{\omega^2-\xi^2})+A(\xi)H_1(\sqrt{\omega^2-\xi^2})=0.$$

С учетом выражения для $A(\xi)$ в формуле (10) получаем

$$B(\xi)=-\frac{1}{2\omega}\frac{H_1(\sqrt{\omega^2-\xi^2})}{J_1(\sqrt{\omega^2-\xi^2})}\sum_{m=0}^{\infty} i^{-m}(X_m^{(1)}e^{-i\xi h}+X_m^{(2)}e^{i\xi h})P_m\left(\frac{\xi}{\omega}\right). \tag{17}$$

Из соотношения (17), используя (12), будем иметь

$$B_m^{(1)}=-\frac{1}{2\omega}\sum_{f=0}^{\infty}(2m+1)i^{m-f}(X_f^{(1)}q_{fm}^{(1)}+X_f^{(2)}q_{fm});$$

$$B_m^{(2)}=-\frac{1}{2\omega}\sum_{f=0}^{\infty}(2m+1)i^{m-f}(X_f^{(1)}q_{fm}+X_f^{(2)}q_{fm}^{(2)});$$

$$q_{fm} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H_1(\sqrt{\omega^2-\xi^2})}{J_1(\sqrt{\omega^2-\xi^2})} P_f\left(\frac{\xi}{\omega}\right) P_m\left(\frac{\xi}{\omega}\right) d\xi;$$

$$q_{fm}^{(2),(1)} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H_1(\sqrt{\omega^2-\xi^2})}{J_1(\sqrt{\omega^2-\xi^2})} P_f\left(\frac{\xi}{\omega}\right) P_m\left(\frac{\xi}{\omega}\right) e^{\pm i2\xi h} d\xi. \tag{18}$$

причем $q_{fm} = 0$, если сумма индексов $m + n$ нечетная.

4. Разрешающая система. На поверхности сферы согласно (3) задано давление, то есть $-i\omega\Phi\big|_{r_j=r_0} = p, \quad j = 1, 2$, откуда с учетом (16) следует

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left[\begin{array}{l} X_m^{(j)} h_m(\omega r_0) + \\ +\dfrac{1}{2\omega} \sum\limits_{f=0}^{\infty} \left[\begin{array}{l} X_f^{(k)} (2\omega Q_{0m0f}^{(k)}(2h) - (2m+1) i^{m-f} q_{fm}) - \\ -(2m+1) i^{m-f} q_{fm}^{(j)} X_f^{(j)} \end{array} \right] j_m(\omega r_0) \end{array} \right] \times$$

$$\times P_m(\cos\theta_j) = \frac{i}{\omega} \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{p}_m P_m(\cos\theta_j).$$

Используя свойство ортогональности полиномов Лежандра, получим бесконечные системы алгебраических уравнений относительно искомых коэффициентов $X_m^{(1)}, X_m^{(2)}$

$$X_m^{(j)} h_m(\omega r_0) + \frac{j_m(\omega r_0)}{2\omega} \sum_{f=0}^{\infty} \left[\begin{array}{l} X_f^{(k)} (2\omega Q_{0m0f}^{(k)}(2h) - (2m+1) i^{m-f} q_{fm}) - \\ -(2m+1) i^{m-f} q_{fm}^{(j)} X_f^{(j)} \end{array} \right] =$$

$$= \frac{i}{\omega} \tilde{p}_m; \quad m = 0, 1, 2, \ldots\infty, \; j = 1, 2; \quad k = 2, 1, \tag{19}$$

Если при $z = 0$ имеем свободную границу ($\beta = 0$ в формуле (5)), то из (7) и (8) следует равенство

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left[X_m^{(1)} h_m(\omega r_1) P_m(\cos\theta_1) + X_m^{(2)} h_m(\omega r2) P_m(\cos\theta_2) \right]_{z=0} = 0.$$

Учитывая, что в плоскости $z = 0$ имеют место равенства $r_1 = r_2, \theta_2 = \pi - \theta_1$, и $P_m(-x) = (-1)^m P_m(x)$, из (19) получим

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left[X_m^{(1)} + (-1)^m X_m^{(2)} \right] h_m(\omega r_1) P_m(\cos\theta_1) = 0,$$

откуда вытекает соотношение между коэффициентами

$$X_m^{(1)} = (-1)^{m+1} X_m^{(2)}. \tag{20}$$

Аналогично в случае жесткой границы (в формуле (5) $\alpha = 0$)

$$X_m^{(1)} = (-1)^m X_m^{(2)}. \tag{21}$$

Если ниже ограничиться случаем, когда в плоскости $z=0$ имеет место жесткая граница, то есть выполняется соотношение (21), то из (19) окончательно получаем

$$X_m^{(1)} h_m(\omega r_0) + (2m+1)\frac{j_m(\omega r_0)}{2\omega} \times$$

$$\times \sum_{f=0}^{\infty} \begin{bmatrix} (-1)^f \dfrac{2\omega}{2m+1} Q_{0m0f}^{(2)}(2h) - \\ -i^{m-f}((-1)^f q_{fm} + q_{fm}^{(1)}) \end{bmatrix} X_f^{(1)} = \frac{i}{\omega}\tilde{p}_m; \quad m = 0, 1, 2, \ldots \infty. \tag{22}$$

Система (22) — бесконечная система алгебраических уравнения для определения неизвестных коэффициентов $X_m^{(1)}$. Системы такого типа обычно являются системами нормального типа [7] и они могут быть решены методом усечения. Если из системы (22) определить коэффициенты $X_m^{(1)}$, а из соотношения (21) — коэффициенты $X_m^{(2)}$, то при помощи формул (15) — (18) можно записать искомый потенциал Ф в сферических или цилиндрических координатах и вычислить параметры акустического поля как функцию частоты и пространственных координат.

Таким образом, развитый в данной публикации подход позволяет исследовать особенности волновых процессов в гидроакустических системах рассмотренного типа.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Кубенко В.Д. Задача дифракции стационарных волн на совокупности цилиндрических и сферических тел в жидкости. *Прикл. механика*. 1987. **23**, №6. С. 111—117.
2. Кубенко В.Д., Дзюба В.В.Поле давления в акустическом пространстве, содержащем жесткое цилиндрическое тело и колеблющуюся по заданному закону сферу. *Прикл. механика*. 2000. **36**, №12. С. 108—120.
3. Кубенко В.Д., Кузьма А.В. Влияние ограниченности столба жидкости при исследовании осесимметричных колебаний твердого сферического тела в жидкости. *Прикл. механика*. 1999. **35**, №12. С. 11—18.
4. Морс Ф.М., Фешбах Г. Методы теоретической физики в 2-х т. Т 1. Москва: ИЛ, 1960. 896 с.
5. Справочник по специальным функциям (Под ред. М. Абрамовица и И.Ф. Стигана). Москва: Наука, 1979. 830 с.
6. Ерофеенко В.Т. Связь между основными решениями в цилиндрических и сферических координатах уравнений Гельмгольца и Лапласа. *Изв. АН БССР. Сер. физ.–мат. наук*. 1972. № 4. С. 42—46.
7. Иванов Е.А. Дифракция электромагнитных волн на двух телах. Минск: Наука и техника, 1958. 583 с.
8. Гельфанд И.М., Минлос Р.А., Шапиро З.Я. Представления группы вращений и группы Лоренца. Москва: Физматгиз, 1958. 368 с.

Поступило в редакцию 22.03.2017

REFERENCES

1. Kubenko, V. D. (1987). Diffraction of Steady Waves at a Set of Spherical and Cylindrical Bodies in an Acoustic Medium. Internat. Appl. Mech., 23, No. 6, pp. 605-620.
2. Kubenko, V. D. & Dzyuba, V. V. (2000). A Pressure Field in an Acoustic Medium Containing a Cylindrical Solid and a Sphere Oscillating in a Predetermined Manner. Internat. Appl. Mech., 36, No. 12, pp. 1636-1650.
3. Kubenko, V. D. & Kuz'ma, A. V. (1999). Influence of the Boundary of a Column of Incompressible Liquid in Investigating Axisymmetric Oscillations of a Solid Sphere in a Cavity. Internat. Appl. Mech., 35, No. 12, pp. 1199-2007.
4. Morse, P. M., Feshbach, H. (1953). Methods of Theoretical Physics in 2 Vol. Part 1. NY: McGraw-Hill.
5. Handbook of Mathematical Functions (Ed. M. Abramovitz and I.A. Stegun). (1964). NY: Nat. Bureau of Standards.

6. Erofeenko, V. T. (1972). Relations between main solutions of Helmholtz and Laplace equations in spherical and cylindrical coordinates, Proc. Natl. Acad. Sci. Belorussian SSR 4, pp. 42-46 (in Russian).
7. Ivanov, E. A. (1958). Diffraction of electro-magnetic waves at two bodies. Minsk: Nauka i technika (in Russian).
8. Gelfand, I. M., Minlos, R. A., Cummins, G. (translater). (2012). Representations of the Rotation and Lorentz Groups and Their Applications. Martino Fine Books.

Received 22.03.2017

В.Д. Кубенко

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ
E-mail: vdk@inmech.kiev.ua

ПРО ВИЗНАЧЕННЯ ХВИЛЬОВОГО ПОТЕНЦІАЛУ ВІБРУЮЧОЇ СФЕРИЧНОЇ ЧАСТИНКИ В НАПІВНЕСКІНЧЕННОМУ ЦИЛІНДРІ З РІДИНОЮ

Розглядається напівнескінченна кругова циліндрична порожнина, заповнена ідеальною стисливою рідиною. Порожнина містить сферичне тіло, поверхня якого збуджується з заданою частотою. Необхідно побудувати хвильовий потенціал для розгляданої області з метою визначення впливу торця циліндра на характер полів тиску і швидкості в системі. Формулюється відповідна крайова задача для рівняння Гельмгольца. Загальний розв'язок задачі будується у вигляді суперпозиції потенціалів, записаних з використанням циліндричних і сферичних хвильових функцій. Залучається до розгляду також «уявна» сфера, за допомогою якої реалізується умова в торцевому перетині циліндра. Для задоволення граничним умовам застосовуються перерозклад сферичних хвильових функцій по циліндричних і навпаки, а також теореми додавання сферичних функцій. У результаті розв'язок задачі зводиться до нескінченної системи алгебраїчних рівнянь, яку пропонується розв'язувати методом усікання.

Ключові слова: *напівнескінченний циліндр, стислива рідина, вібруюча сферична частинка.*

V.D. Kubenko

S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine, Kiev
E-mail: vdk@inmech.kiev.ua

ON THE DETERMINATION OF THE WAVE POTENTIAL OF A VIBRATING SPHERICAL PARTICLE IN A HALF-INFINITE CYLINDER WITH LIQUID

The semiinfinite circular cylindrical cavity filled with ideal compressible fluid and containing a spherical body, whose surface is energized with the set frequency is observed. It is required to build a wave potential for the observed area for the purpose of definition of the influence of the end face of the cylinder on the fields of pressure and velocity in the system. The matching boundary problem for the equation of Helmgoltz is formulated. The general solution is built in the form of a superposition of the potentials written with the use of cylindrical and spherical wave functions. “The imaginary” sphere, with which the condition in the face cross-section of the cylinder is realized, is introduced. Redecomposition of spherical wave functions is applied to satisfy the boundary conditions on cylindrical ones and on the contrary, and the theorems of addition of spherical functions are used. As a result, the problem is reduced to the solution of an infinite system of algebraic equations, which can be solved by the truncation method.

Keywords: *semiinfinite cylinder, compressible liquid, vibrating spherical particle.*