doi: https://doi.org/10.15407/dopovidi2017.08.017
УДК 512.544

М.М. Семко [1], Т.В. Величко [2]

[1] Університет державної фіскальної служби України, Ірпінь
[2] Дніпровський національний університет ім. Олеся Гончара
E-mail: dr.mykola.semko@gmail.com

Про будову груп, усі підгрупи яких, що мають нескінченний спеціальний ранг, є транзитивно нормальними

Представлено академіком НАН України А.М. Самойленком

Отримано опис періодичних розв'язних груп, підгрупи яких мають нескінченний спеціальний ранг, що є транзитивно нормальними. Описано структуру періодичної радикальної групи, в якій підгрупи нескінченного спеціального рангу транзитивно нормальні.

Ключові слова: *скінченний спеціальний ранг, розв'язна група, періодична група, локально нільпотентний радикал, локально нільпотентний резидуал, транзитивно нормальні підгрупи.*

Групи з деякими природними обмеженнями на важливі системи підгруп є одним із центральних об'єктів дослідження в теорії груп. Їх вивчення сприяло виникненню багатьох важливих понять, зокрема умов скінченності, локальної нільпотентності, локальної розв'язності, різноманітних рангів і т. ін. Розглядаючи специфічні обмежувальні властивості та конкретні системи підгруп, які мають ці властивості, ми отримуємо різноманітні цікаві класи груп. Існує величезний масив робіт, які присвячені цій тематиці. У даній роботі ми розглянемо вплив на структуру групи двох систем її підгруп. Це система підгруп, що мають скінченний спеціальний ранг, та система транзитивно нормальних підгруп.

Нагадаємо, що група G має *скінченний спеціальний ранг r*, якщо кожна скінченно породжена підгрупа G може бути породжена не більш ніж r елементами та існує скінченно породжена підгрупа H, яка має точно r породжуючих елементів [1]. Теорія груп скінченного спеціального рангу є однією з найбільш розвинених частин теорії нескінченних груп (див., наприклад, [2—4]). У роботі [5] М.Р. Діксон, М. Еванс та Х. Сміт почали розглядати групи, всі підгрупи яких, що мають нескінченний спеціальний ранг, мають і деяку фіксовану властивість P. Цей підхід отримав розвиток у статтях інших авторів для різноманітних природних властивостей P (див., наприклад, [4]). У даній роботі розпочато розгляд груп, усі підгрупи нескінченного спеціального рангу яких будуть транзитивно нормальними.

Будемо говорити, що підгрупа H групи G є *транзитивно нормальною,* якщо H є нормальною в кожній підгрупі $K \geqslant H$, в якій H є субнормальною [6]. У роботі [7] ці підгрупи були введені під іншою назвою. Більш конкретно, будемо говорити, що підгрупа H групи G

задовольняє *субнормалізаторну умову*, якщо для кожної такої підгрупи K, що H є нормальною в K, має місце включення $N_G(K) \leqslant N_G(H)$. Існує багато природних типів підгруп, які є транзитивно нормальними, зокрема пронормальні підгрупи та їх узагальнення (див. [8]).

Відомо, що відношення "бути нормальною підгрупою" не є транзитивним. Група G називається *T-групою*, якщо це відношення є транзитивним у групі G. Група G називається $\overline{T}$*-групою*, якщо кожна підгрупа G є T-групою. Неважко упевнитись у тому факті, що кожна підгрупа групи G буде транзитивно нормальною тоді і тільки тоді, коли G є $\overline{T}$-групою. Для подальшого нам буде потрібен вищенаведений опис локально скінченних груп, усі підгрупи яких є транзитивно нормальними.

Нагадаємо, що *локально нільпотентний резидуал* $G^{\mathbf{LN}}$ групи G — це перетин усіх таких нормальних підгруп H, що відповідні фактор-групи G/H є локально нільпотентні. Слід зазначити, що у випадку, коли група G є локально скінченною, фактор-група $G/G^{\mathbf{LN}}$ буде локально нільпотентною.

Нагадаємо також, що група G називається радикальною, якщо вона має зростаючий ряд підгруп, фактори якого локально нільпотентні.

Ще нагадаємо, що група G називається дедекіндовою, якщо кожна її підгрупа є нормальною. Будова дедекіндових груп була повністю описана в роботі [9].

Метою даної роботи є отримання опису періодичних радикальних груп, усі підгрупи нескінченного спеціального рангу яких є транзитивно нормальними. Головним результатом роботи є такі теореми.

Теорема A. *Нехай G — періодична радикальна група, що має нескінченний спеціальний ранг. Якщо кожна її підгрупа, що має нескінченний спеціальний ранг, є транзитивно нормальною, то G задовольняє такі умови:*

(i) локально нільпотентний резидуал L групи G є абелевою підгрупою, а сама група G є метабелевою;

(ii) кожна підгрупа L є G-інваріантною;

(iii) $2 \notin \Pi(L)$;

(iv) $\Pi(L) \cap \Pi(G/L) = \varnothing$;

(v) G/L є дедекіндовою групою, а фактор-група $G/C_G(L)$ є абелевою.

Теорема B. *Нехай G — періодична радикальна група, що має нескінченний спеціальний ранг. Якщо кожна її підгрупа, що має нескінченний спеціальний ранг, є транзитивно нормальною, то і кожна підгрупа групи G буде транзитивно нормальною.*

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Мальцев А. И. О группах конечного ранга. *Матем. сб.* 1948. **22**, № 2. С. 351—352.
2. Dixon M.R., Kurdachenko L.A., Subbotin I.Ya. On various rank conditions in infinite groups. *Algebra Discrete Math.* 2007. **4**. P. 23—44.
3. Dixon M.R. Certain rank conditions on groups. *Noti di Matematica*. 2008. **2**. P. 151—175.
4. Dixon M.R., Kurdachenko L.A., Pypka A.A., Subbotin I.Ya. Groups satisfying certain rank conditions. *Algebra Discrete Math.* 2016. **4**. P. 23—44.
5. Dixon M.R., Evans M.J., Smith H. Locally (soluble-by-finite) groups with all proper insoluble subgroups of finite rank. *Arch. Math.* (Basel). 1997. **68**. P. 100—109.
6. Kurdachenko L. A., Subbotin I. Ya. Transitivity of normality and pronormal subgroups. *Combinatorial group theory, discrete groups, and number theory.* Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2006. P. 201–212. (Contemporary Mathematics, vol. 421).

7. Мысовских В.И. Субнормализаторы и свойства вложения подгрупп конечных групп. *Зап. научн. сем. ПОМИ*. 1999. **265**. С. 258—280.
8. Kirichenko V.V., Kurdachenko L.A., Subbotin I.Ya. Some related to pronormality subgroup families and the properties of a group. *Algebra Discrete Math*. 2011. **1**. P. 75—108.
9. Baer R. Situation der Untergruppen und Struktur der Gruppe. *S.-B. Heidelberg Akad*. 1933. **2**. P. 12—17.

Надійшло до редакції 24.04.2017

REFERENCES

1. Maltsev, A. I. (1948). On groups of finite rank. Mat. Sbornik, 22, pp. 351-352 (in Russian).
2. Dixon, M. R., Kurdachenko, L. A. & Subbotin, I. Ya. (2007). On various rank conditions in infinite groups. Algebra Discrete Math., 4, pp. 23-44.
3. Dixon, M. R. (2008). Certain rank conditions on groups. Noti di Matematica, 2, pp. 151-175.
4. Dixon, M. R., Kurdachenko, L. A., Pypka, A. A. & Subbotin, I. Ya. (2016). Groups satisfying certain rank conditions. Algebra Discrete Math., 4, pp. 23-44.
5. Dixon, M. R., Evans, M. J. & Smith, H. (1997). Locally (soluble-by-finite) groups with all proper insoluble subgroups of finite rank. Arch. Math. (Basel), 68, pp. 100-109.
6. Kurdachenko, L. A. & Subbotin, I. Ya. (2006). Transitivity of normality and pronormal subgroups. In Combinatorial group theory, discrete groups, and number theory. Contemporary Mathematics, Vol. 421 (pp. 201-212). Providence, RI: Amer. Math. Soc.
7. Mysovskikh, V. I. (1999). Subnormalizers and properties of embedding of subgroups in finite groups. Zap. Nauchn. Sem. POMI, 265, pp. 258-280 (in Russian).
8. Kirichenko, V. V., Kurdachenko, L. A. & Subbotin, I. Ya. (2011). Some related to pronormality subgroup families and the properties of a group. Algebra Discrete Math., 1, pp. 75-108.
9. Baer, R. (1933). Situation der Untergruppen und Struktur der Gruppe. S.-B. Heidelberg Akad., 2, pp. 12-17.

Received 24.04.2017

Н.Н. Семко[1], *Т.В. Величко*[2]

[1] Университет государственной фискальной службы Украины, Ирпень
[2] Днепровский национальный университет им. Олеся Гончара
E-mail: dr.mykola.semko@gmail.com

О СТРОЕНИИ ГРУПП, ВСЕ ПОДГРУППЫ КОТОРЫХ, ИМЕЮЩИЕ
БЕСКОНЕЧНЫЙ СПЕЦИАЛЬНЫЙ РАНГ, ТРАНЗИТИВНО НОРМАЛЬНЫЕ

Получено описание периодических разрешимых групп, подгруппы которых имеют бесконечный специальный ранг, являются транзитивно нормальными. Описана структура периодической радикальной группы, у которой подгруппы бесконечного специального ранга транзитивно нормальны.

Ключевые слова: *конечный специальный ранг, разрешимая группа, периодическая группа, локально нильпотентный радикал, локально нильпотентный резидуал, транзитивно нормальные подгруппы.*

N.N. Semko[1], *T.V. Velichko*[2]

[1] University of State Fiscal Service of Ukraine, Irpin
[2] Oles Honchar Dnipro National University
E-mail: dr.mykola.semko@gmail.com

ON THE GROUPS, WHOSE ALL SUBGROUPS
WITH INFINITE SPECIAL RANK ARE TRANSITIVELY NORMAL

The periodic soluble groups, whose subgroups with infinite special rank are transitively normal, and the structure of a periodic radical group, whose subgroups with infinite special rank are transitively normal, are described.

Keywords: *finite special rank, soluble group, periodic group, locally nilpotent radical, locally nilpotent residual, transitively normal subgroups.*