

doi: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2017.08.003>

УДК 517.956.4

В.М. Лось¹, В.А. Михайлець², О.О. Мурач³

¹ НТУ України "Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського"

^{2,3} Інститут математики НАН України, Київ

E-mail: v_los@yahoo.com, mikhailets@imath.kiev.ua, murach@imath.kiev.ua

Регулярність розв'язків загальних параболічних задач у просторах Хермандера

Представлено членом-кореспондентом НАН України А.Н. Кочубеєм

Доведено теореми про глобальну і локальну регулярність узагальнених розв'язків загальних параболічних початково-крайових задач у просторах Хермандера.

Ключові слова: *параболічна початково-крайова задача, простір Хермандера, узагальнений розв'язок, локальна регулярність розв'язку.*

В теорії рівнянь з частинними похідними важливим є питання про регулярність розв'язків, що досліджуються. Як правило, відповідь на нього дають у вигляді достатніх умов належності розв'язків вибраним функціональним просторам. В основному використовують класичні простори Соболева та Гельдера—Зігмунда. Для них побудована теорія розв'язності загальних параболічних початково-крайових задач [1–7].

Широке і змістовне узагальнення просторів Соболева було запропоноване Л. Хермандером у [8]. Це простори $H^{\mu} := W_{2,\mu}$. Для них показником регулярності розподілів служить вагова функція μ , залежна від кількох частотних змінних.

Недавно В.А. Михайлець і О.О. Мурач [9] побудували теорію розв'язності загальних еліптичних диференціальних операторів і еліптичних крайових задач у гільбертових шкалах ізотропних просторів Хермандера. Зокрема, було отримано більш тонкі умови регулярності узагальнених розв'язків, ніж це можна зробити в межах просторів Соболева і Гельдера—Зігмунда.

У роботах [10–13] доведено теореми про ізоморфізми, які встановлюють оператори, породжені мішаними параболічними задачами в анізотропних гільбертових просторах Хермандера.

Метою цієї роботи є доведення теорем про глобальну і локальну регулярність узагальнених розв'язків загальних параболічних початково-крайових задач у просторах Хермандера.

© В.М. Лось, В.А. Михайлець, О.О. Мурач, 2017

ISSN 1025-6415. Допов. Нац. акад. наук Укр. 2017. № 8

1. Постановка задачі. Нехай довільно задані ціле число $n \geq 2$, дійсне число $\tau > 0$ і обмежена область $G \subset \mathbb{R}^n$ з нескінченно гладкою межею $\Gamma := \partial G$. Позначимо $\bar{\Omega} := G \times (0, \tau)$ — відкритий циліндр в \mathbb{R}^{n+1} , $S := \Gamma \times (0, \tau)$ — його бічна поверхня. Тоді $\bar{\Omega} := \bar{G} \times [0, \tau]$ і $S := \Gamma \times [0, \tau]$ є замикання Ω і S відповідно.

Розглянемо в циліндрі Ω таку параболічну початково-крайову задачу:

$$A(x, t, D_x, \partial_t) \equiv \sum_{|\alpha|+2b\beta \leq 2m} a^{\alpha, \beta}(x, t) D_x^\alpha \partial_t^\beta u(x, t) = f(x, t) \text{ для всіх } x \in G \text{ і } t \in (0, \tau); \quad (1)$$

$$B_j(x, t, D_x, \partial_t) \equiv \sum_{|\alpha|+2b\beta \leq m_j} b_j^{\alpha, \beta}(x, t) D_x^\alpha \partial_t^\beta u(x, t) = g_j(x, t) \text{ для всіх } x \in \Gamma, t \in (0, \tau) \\ \text{і } j \in \{1, \dots, m\}; \quad (2)$$

$$\partial_t^k u(x, t)|_{t=0} = h_k(x) \text{ для всіх } x \in G \text{ і } k \in \{0, \dots, \kappa - 1\}. \quad (3)$$

Тут b , m і всі m_j — довільно задані цілі числа такі, що $m \geq b \geq 1$, $\kappa := m/b \in \mathbb{Z}$ і $m_j \geq 0$. Число $2b$ називається параболічною вагою цієї задачі. Усі коефіцієнти лінійних диференціальних виразів $A := A(x, t, D_x, \partial_t)$ і $B_j := B_j(x, t, D_x, \partial_t)$, де $j \in \{1, \dots, m\}$, вважаємо нескінченно гладкими комплекснозначними функціями, заданими на $\bar{\Omega}$ і S відповідно.

Використовуємо такі позначення: $D_x^\alpha := D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$, де $D_k := i\partial/\partial x_k$ і $\partial_t := \partial/\partial t$ для частинних похідних функцій, що залежать від $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ і $t \in \mathbb{R}$. Тут i — уявна одиниця, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ — мультиіндекс і $|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n$. У формулах (1) і (2) та їх аналогах підсумовування ведеться за цілими невід'ємними індексами $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ і β , які задовольняють умову, вказану під знаком суми. Як звичайно, $\xi^\alpha := \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_n^{\alpha_n}$ для $\xi := (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{C}^n$.

Нагадаємо [1, § 9, п. 1], що початково-крайова задача (1)–(3) називається параболічною в циліндрі Ω , якщо виконуються такі дві умови.

Умова 1. Для довільних $x \in \bar{G}$, $t \in [0, \tau]$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ і $p \in \mathbb{C}$, де $\text{Re } p \geq 0$, правильно

$$A(x, t, \xi, p) \equiv \sum_{|\alpha|+2b\beta=2m} a^{\alpha, \beta}(x, t) \xi^\alpha p^\beta \neq 0 \text{ за умови } |\xi| + |p| \neq 0.$$

Для формулювання умови 2 довільно виберемо точку $x \in \Gamma$, дійсне число $t \in [0, \tau]$, дотичний вектор $\xi \in \mathbb{R}^n$ до межі Γ у точці x та число $p \in \mathbb{C}$, де $\text{Re } p \geq 0$, такі, що $|\xi| + |p| \neq 0$. Нехай $\nu(x)$ є ортом внутрішньої нормалі до межі Γ у точці x . З умови 1 та нерівності $n \geq 2$ випливає, що многочлен $A(x, t, \xi + \zeta \nu(x), p)$ змінної $\zeta \in \mathbb{C}$ має точно m коренів $\zeta_j^+(x, t, \xi, p)$, $j = 1, \dots, m$, з додатною уявною частиною і m коренів з від'ємною уявною частиною (з урахуванням їх кратності).

Умова 2. При кожному такому виборі x , t , ξ та p многочлени

$$B_j(x, t, \xi + \zeta \nu(x), p) \equiv \sum_{|\alpha|+2b\beta=m_j} b_j^{\alpha, \beta}(x, t) (\xi + \zeta \nu(x))^\alpha p^\beta, \quad j = 1, \dots, m,$$

змінної $\zeta \in \mathbb{C}$ лінійно незалежні за модулем многочлена $\prod_{j=1}^m (\zeta - \zeta_j^+(x, t, \xi, p))$.

2. Простори Хермандера, пов'язані з задачею. Вони є окремим випадком гільбертових функціональних просторів $H^\mu := \mathbb{B}_{2, \mu}$, введених і досліджених Л. Хермандером у [8] (п. 2.2). Показником регулярності функцій (або розподілів), що утворюють простір $H^\mu(\mathbb{R}^k)$, де ціле

$k \geq 1$, є вимірною за Борелем функція $\mu: \mathbb{R}^k \rightarrow (0, \infty)$, яка задовольняє таку умову: існують додатні числа c та l такі, що $\mu(\xi)/\mu(\eta) \leq c(1+|\xi-\eta|)^l$ для довільних $\xi, \eta \in \mathbb{R}^k$.

За означенням, комплексний лінійний простір $H^\mu(\mathbb{R}^k)$ складається з усіх повільно зростаючих розподілів $w \in S'(\mathbb{R}^k)$, перетворення Фур'є \hat{w} яких є локально інтегровними за Лебегом функціями, що задовольняють умову

$$\|w\|_{H^\mu(\mathbb{R}^k)}^2 := \int_{\mathbb{R}^k} \mu^2(\xi) |\hat{w}(\xi)|^2 d\xi < \infty.$$

(У роботі всі функції та розподіли вважаються комплекснозначними.) Цей простір є гільбертовим відносно норми $\|w\|_{H^\mu(\mathbb{R}^k)}$.

Нам знадобиться версія простору $H^\mu(\mathbb{R}^k)$ для довільної відкритої непорожньої множини $V \subset \mathbb{R}^k$. Лінійний простір $H^\mu(V)$ складається, за означенням, із звужень $u = w|_V$ усіх розподілів $w \in H^\mu(\mathbb{R}^k)$ на множину V . У цьому просторі задана норма за формулою

$$\|u\|_{H^\mu(V)} := \inf \{ \|w\|_{H^\mu(\mathbb{R}^k)}^2 : w \in H^\mu(\mathbb{R}^k), u = w|_V \}.$$

Простір $H^\mu(V)$ є гільбертовим відносно цієї норми.

Для зручності позначень прийнемо $\gamma := 1/(2b)$. Надалі будемо використовувати показники регулярності вигляду

$$\mu_{s, \varphi}(\xi', \xi_k) := \mu(\xi', \xi_k) := (1 + |\xi'|^2 + |\xi_k|^{2\gamma})^{s/2} \varphi((1 + |\xi'|^2 + |\xi_k|^{2\gamma})^{1/2}), \quad (4)$$

де $\xi' \in \mathbb{R}^{k-1}$ та $\xi_k \in \mathbb{R}$ — аргументи функції μ . Тут числовий параметр s є дійсним, а функціональний параметр φ пробігає клас M .

За означенням, клас M складається з усіх вимірних за Борелем функцій $\varphi: [1, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, які задовольняють такі дві умови:

а) обидві функції φ та $1/\varphi$ обмежені на кожному відрізку $[1, c]$, де $1 < c < \infty$;

б) функція φ повільно змінюється за Й. Карамата на нескінченності, тобто $\varphi(\lambda r)/\varphi(r) \rightarrow 1$ при $r \rightarrow \infty$ для кожного $\lambda > 0$.

Теорія повільно змінних функцій (на нескінченності) викладена, наприклад, у монографії [14]. Їх важливим прикладом є функції вигляду

$$\varphi(r) := (\ln r)^{q_1} (\ln \ln r)^{q_2} \dots \underbrace{(\ln \dots \ln r)^{q_k}}_{k \text{ разів}} \text{ при } r \gg 1,$$

де параметри $k \in \mathbb{N}$ та $q_1, q_2, \dots, q_k \in \mathbb{R}$ є довільними.

Нехай $s \in \mathbb{R}$ і $\varphi \in M$. Розв'язки u початково-крайової задачі (1)–(3) та праві частини f рівняння (1) будемо розглядати в анізотропних гільбертових функціональних просторах Хермандера $H^{s, s\gamma; \varphi}(\Omega) := H^\mu(\Omega)$ де показник μ визначений формулою (4), у якій $k := n+1$.

Якщо $\varphi(r) \equiv 1$, то $H^{s, s\gamma; \varphi}(\Omega)$ стає анізотропним гільбертовим простором Соболева порядку $(s, s\gamma)$; позначимо його через $H^{s, s\gamma}(\Omega)$. Тут s — показник регулярності розподілу $u = u(x, t)$ за просторовою змінною $x \in \Omega$, а $s\gamma$ — показник регулярності за часовою змінною $t \in (0, \tau)$. У загальному випадку, коли $\varphi \in M$ є довільною, правильні неперервні і щільні вкладення

$$H^{s_1, s_1\gamma}(\Omega) \subset H^{s, s\gamma; \varphi}(\Omega) \subset H^{s_0, s_0\gamma}(\Omega) \text{ при } s_0 < s < s_1. \quad (5)$$

Нам знадобляться також анізотропні простори Хермандера, задані на бічній поверхні $S = \Gamma \times (0, \tau)$ циліндра Ω . До них будуть належати праві частини g_j крайових умов (2). Означимо ці простори, використовуючи спеціальні локальні карти на S (див. [15, п.1]). Нехай $s > 0$ і $\varphi \in M$. Попередньо, для відкритої смуги $\Pi := \mathbb{R}^{n-1} \times (0, \tau)$ розглянемо гільбертові простори $H^{s, s\gamma; \varphi}(\Pi) := H^\mu(\Pi)$, де показник μ визначений формулою (4), у якій $k := n$. Довільно виберемо скінченний атлас із C^∞ -структури на замкненому многовиді Γ . Нехай цей атлас утворений локальними картами $\theta_j : \mathbb{R}^{n-1} \leftrightarrow \Gamma_j$, де $j = 1, \dots, \lambda$. Тут відкриті множини $\Gamma_1, \dots, \Gamma_\lambda$ складають покриття многовиду Γ . Крім цього, довольню виберемо функції $\chi_j \in C^\infty(\Gamma)$, $j = 1, \dots, \lambda$, такі, що $\text{supp } \chi_j \subset \Gamma_j$ і $\sum_{j=1}^{\lambda} \chi_j = 1$ на Γ .

За означенням, лінійний простір $H^{s, s\gamma; \varphi}(S)$ складається з усіх функцій $v \in L_2(S)$ на многовиді S таких, що для кожного номера $j \in \{1, \dots, \lambda\}$ функція

$$v_j(y, t) := \chi_j(\theta_j(y))v(\theta_j(y), t)$$

аргументів $y \in \mathbb{R}^{n-1}$ і $t \in (0, \tau)$ належить до $H^{s, s\gamma; \varphi}(\Pi)$.

У просторі $H^{s, s\gamma; \varphi}(S)$ задана норма за формулою

$$\|v\|_{H^{s, s\gamma; \varphi}(S)} := \left(\sum_{j=1}^{\lambda} \|v_j\|_{H^{s, s\gamma; \varphi}(\Pi)}^2 \right)^{1/2}.$$

Цей простір є гільбертовим відносно введеної норми і не залежить з точністю до еквівалентності норм від вибору локальних карт і розбиття одиниці на Γ [15] (теорема 1).

Введемо простори, до яких належать праві частини h_k початкових умов (3). Це ізотропні гільбертові простори Хермандера $H^{s; \varphi}(G) := H^\mu(G)$ з показником $\mu(\xi) := (1 + |\xi|^2)^{s/2} \times \varphi((1 + |\xi|^2)^{1/2})$ аргументу $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Нарешті, для формулювання основного результату введемо необхідні локальні аналогії просторів $H^{s, s\gamma; \varphi}(\Omega)$, $H^{s, s\gamma; \varphi}(S)$ і $H^{s; \varphi}(G)$.

Нехай U є відкритою множиною в \mathbb{R}^{n+1} такою, що $U \cap \Gamma = \emptyset$. Нехай $\omega := U \cap \Omega \neq \emptyset$, $\pi_1 := U \cap \partial\Omega$, $\pi_2 := U \cap S$ і $\pi_3 := U \cap G$. Позначимо через $H_{\text{loc}}^{s, s\gamma; \varphi}(\omega, \pi_1)$ лінійний простір усіх розподілів u в області Ω таких, що $\chi u \in H^{s, s\gamma; \varphi}(\Omega)$ для кожної функції $\chi \in C^\infty(\bar{\Omega})$ із $\text{supp } \chi \subset \omega \cup \pi_1$. Подібно до цього, позначимо через $H_{\text{loc}}^{s, \gamma; \varphi}(\pi_2)$ лінійний простір усіх розподілів v на S таких, що $\chi v \in H^{s, s\gamma; \varphi}(S)$ для кожної функції $\chi \in C^\infty(\bar{S})$ із $\text{supp } \chi \subset \pi_2$. Нарешті, позначимо через $H_{\text{loc}}^{s; \varphi}(\pi_3)$ лінійний простір усіх розподілів w на G таких, що $\chi w \in H^{s; \varphi}(G)$ для кожної функції $\chi \in C^\infty(\bar{G})$ із $\text{supp } \chi \subset \pi_3$.

Якщо $\varphi \equiv 1$, то означені вище простори стають соболевськими просторами (анізотропними на Ω і S або ізотропними на G). У цьому випадку будемо опускати індекс φ у позначеннях цих просторів.

3. Основні результати роботи тісно пов'язані з теоремою про ізоморфізми, які встановлює оператор, відповідний задачі (1)–(3) у введених вище просторах Хермандера. Сформулюємо цю теорему [13, теорема 2].

Нехай σ_0 є найменше ціле число таке, що $\sigma_0 \geq 2m$, $\sigma_0 \geq m_j + 1$ для всіх $j \in \{1, \dots, m\}$. Відмітимо, якщо $m_j \leq 2m - 1$ для всіх $j \in \{1, \dots, m\}$, то $\sigma_0 = 2m$.

Пов'яжемо із задачею (1), (2), (3) лінійне відображення

$$u \mapsto \Lambda u := (Au, B_1 u, \dots, B_m u, u|_{\bar{G}}, \dots, (\partial_t^{k-1} u)|_{\bar{G}}), \quad u \in C^\infty(\bar{\Omega}). \quad (6)$$

Твердження 1. *Нехай довільно задані параметри: числовий $s > \sigma_0$ і функціональний $\varphi \in \mathbf{M}$. Тоді відображення (6) однозначно продовжується (за неперервністю) до ізоморфізму*

$$\Lambda : H^{s, s/(2b); \varphi}(\Omega) \leftrightarrow Q^{s-2m, (s-2m)/(2b); \varphi}. \quad (7)$$

Тут через $Q^{s-2m, (s-2m)/(2b); \varphi}$ позначено гільбертів простір правих частин задачі, який означається таким чином. Якщо $s \notin \{\sigma_0 + r - 1/2 : r \in \mathbf{N}\}$, то $Q^{s-2m, (s-2m)/(2b); \varphi}$ це підпростір гільбертового простору

$$\begin{aligned} H^{s-2m, (s-2m)/(2b); \varphi} := & H^{s-2m, (s-2m)/(2b); \varphi}(\Omega) \oplus \\ \oplus \bigoplus_{j=1}^m & H^{s-m_j-1/2, (s-m_j-1/2)/(2b); \varphi}(S) \oplus \bigoplus_{k=0}^{k-1} H^{s-2bk-b; \varphi}(G), \end{aligned}$$

утворений усіма вектор-функціями

$$F := (f, g_1, \dots, g_m, h_0, \dots, h_{k-1}) \in H^{s-2m, (s-2m)/(2b); \varphi},$$

що задовольняють природні умови узгодження правих частин задачі (1)–(3) (див., наприклад, [1, п. 11] або [12, п. 4]). Якщо $s \in \{\sigma_0 + r - 1/2 : r \in \mathbf{N}\}$, то означаємо гільбертів простір $Q^{s-2m, (s-2m)/(2b); \varphi}$ за допомогою інтерполяції:

$$Q^{s-2m, (s-2m)/(2b); \varphi} := [Q^{s-2m-\varepsilon, (s-2m-\varepsilon)/(2b); \varphi}, Q^{s-2m+\varepsilon, (s-2m+\varepsilon)/(2b); \varphi}]_{1/2}. \quad (8)$$

Тут число $\varepsilon \in (0, 1/2)$ вибрано довільно, а права частина рівності є результатом інтерполяції зазначеної пари гільбертових просторів з числовим параметром $1/2$. Означений у такий спосіб простір не залежить з точністю до еквівалентності норм від вибору числа ε .

Якщо $\varphi \equiv 1$, то оператор (7) діє у соболевських просторах. Для них твердження 1 було доведено М.В. Житарашу [4, теорема 9.1]. Його результат охоплює граничний випадок $s = \sigma_0$. З цього результату випливає, що для кожної вектор-функції

$$(f, g_1, \dots, g_m, h_0, \dots, h_{k-1}) \in Q^{\sigma_0-2m, (\sigma_0-2m)/(2b)} \quad (9)$$

задача (1)–(3) має єдиний розв'язок $u \in H^{\sigma_0, \sigma_0/(2b)}(\Omega)$. Таку функцію u називаємо узагальненим розв'язком цієї задачі із правою частиною (9).

Сформулюємо основні результати роботи.

Теорема 1. *Припустимо, що функція $u \in H^{\sigma_0, \sigma_0/(2b)}(\Omega)$ є узагальненим розв'язком параболічної задачі (1)–(3), праві частини якої задовольняють умову*

$$(f, g_1, \dots, g_m, h_0, \dots, h_{k-1}) \in Q^{\sigma_0-2m, (\sigma_0-2m)/(2b); \varphi}$$

для деяких дійсного числа $\sigma > \sigma_0$ і функції $\varphi \in \mathbf{M}$. Тоді $u \in H^{\sigma, \sigma/(2b); \varphi}(\Omega)$.

Теорема 2. *Нехай $u \in H^{\sigma_0, \sigma_0/(2b)}(\Omega)$ є узагальненим розв'язком параболічної задачі (1)–(3) з правими частинами (9). Припустимо, що для деяких $\sigma > \sigma_0$ і $\varphi \in \mathbf{M}$ виконуються включення*

$$f \in H_{\text{loc}}^{\sigma-2m, (\sigma-2m)/(2b); \varphi}(\omega, \pi_1) \quad (10)$$

$$g_j \in H_{\text{loc}}^{\sigma-m_j-1/2, (\sigma-m_j-1/2)/(2b); \varphi}(\pi_2) \text{ для всіх } j \in \{1, \dots, m\}, \quad (11)$$

$$h_k \in H_{\text{loc}}^{\sigma-2bk-b; \varphi}(\pi_3) \text{ для всіх } k \in \{0, \dots, \kappa-1\}, \quad (12)$$

Тоді $u \in H_{\text{loc}}^{\sigma, \sigma/(2b); \varphi}(\omega, \pi_1)$.

У випадку, коли $\pi_1 = \emptyset$, теорема 2 стверджує, що гладкість розв'язку підвищується в околах внутрішніх точок замкненої області $\bar{\Omega}$. Якщо $\pi_3 = \emptyset$, то ця теорема є наслідком теореми 4.2 з [11]. Якщо $\pi_1 = \partial\Omega \setminus \Gamma$, $\pi_2 = S$, $\pi_3 = G$, то, згідно з теоремою 2, підвищення гладкості розв'язку відбувається на множині $\bar{\Omega} \setminus \Gamma$.

4. Обґрунтування результатів. Теорема 1 є прямим наслідком твердження 1. Теорема 2 виводиться із теореми 1. Наведемо схему доведення теореми 2. Спочатку покажемо, що з умов (10)–(12) цієї теореми випливає правильність імплікації

$$u \in H_{\text{loc}}^{\sigma-\lambda, (\sigma-\lambda)/(2b); \varphi}(\omega, \pi_1) \Rightarrow u \in H_{\text{loc}}^{\sigma-\lambda+1, (\sigma-\lambda+1)/(2b); \varphi}(\omega, \pi_1) \quad (13)$$

для кожного цілого $\lambda \geq 1$ такого, що $\sigma - \lambda + 1 > \sigma_0$.

Виберемо довільну функцію $\chi \in C^\infty(\bar{\Omega})$ з $\text{supp } \chi \subset \omega \cup \pi_1$. Для χ існує функція $\eta \in C^\infty(\bar{\Omega})$ така, що $\text{supp } \eta \subset \omega \cup \pi_1$ і $\eta = 1$ в околі $\text{supp } \chi$. Переставляючи кожний з диференціальних операторів A , B_j і ∂_t^k з оператором множення на χ , можемо записати

$$\begin{aligned} \Lambda(\chi u) &= \Lambda(\chi \eta u) = \chi \Lambda(\eta u) + \Lambda'(\eta u) = \\ &= \chi \Lambda u + \Lambda'(\eta u) = \chi(f, g_1, \dots, g_m, h_0, \dots, h_{\kappa-1}) + \Lambda'(\eta u). \end{aligned} \quad (14)$$

Тут $\Lambda' := (A', B'_1, \dots, B'_m, C'_0, \dots, C'_{\kappa-1})$ – диференціальний оператор, кожна компонента якого має нижчий (принаймні на одиницю) порядок, ніж відповідний їй оператор A , B_j і ∂_t^k . Тому виконується імплікація

$$u \in H_{\text{loc}}^{\sigma-\lambda, (\sigma-\lambda)/(2b); \varphi}(\omega, \pi_1) \Rightarrow \Lambda'(\eta u) \in H^{\sigma-\lambda+1-2m, (\sigma-\lambda+1-2m)/(2b); \varphi}.$$

На підставі (10)–(12) маємо включення $\chi(f, g_1, \dots, g_m, h_0, \dots, h_{\kappa-1}) \in H^{\sigma-2m, (\sigma-2m)/(2b); \varphi}$. Тому, скориставшись (14), отримаємо імплікацію

$$u \in H_{\text{loc}}^{\sigma-\lambda, (\sigma-\lambda)/(2b); \varphi}(\omega, \pi_1) \Rightarrow \Lambda(\chi u) \in H^{\sigma-\lambda+1-2m, (\sigma-\lambda+1-2m)/(2b); \varphi}. \quad (15)$$

Далі можна показати, що для довільного $s > \sigma_0$ з включення $\Lambda(\chi u) \in H^{s-2m, (s-2m)/(2b); \varphi}$ і зробленого вибору функції χ випливає включення

$$\Lambda(\chi u) \in Q^{s-2m, (s-2m)/(2b); \varphi}. \quad (16)$$

Для цього потрібно врахувати, що, оскільки $\text{dist}(\text{supp } \chi, \Gamma) > 0$, то $\chi = 0$ в деякому околі Γ . Тобто $\Lambda(\chi u) = 0$ в цьому околі Γ .

Тепер з імплікації (15), включення (16) та теореми 1 випливає, що

$$\begin{aligned} u \in H_{\text{loc}}^{\sigma-\lambda, (\sigma-\lambda)/(2b); \varphi}(\omega, \pi_1) &\Rightarrow \Lambda(\chi u) \in Q^{\sigma-\lambda+1-2m, (\sigma-\lambda+1-2m)/(2b); \varphi} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \chi u \in H^{\sigma-\lambda+1, (\sigma-\lambda+1)/(2b); \varphi}(\Omega). \end{aligned}$$

Відмітимо, що тут теорема 1 застосовна, оскільки $\chi u \in H^{\sigma_0, \sigma_0/(2b)}(\Omega)$ за умовою теореми 2 і $\sigma - \lambda + 1 > \sigma_0$. Тим самим імплікація (13) доведена, якщо зважити на зроблений вибір функції χ . Тепер з (13) індукцією випливає твердження теореми 2 (див., наприклад, доведення теореми 4.2 з [11]).

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Агранович М.С., Вишик М.И. Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида. *Успехи мат. наук.* 1964. **19**, № 3. С. 53–161.
2. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. Москва: Наука, 1967. 736 с.
3. Lions J.-L., Magenes E. Non-homogeneous boundary-value problems and applications. Vol. 2. Berlin: Springer, 1972. xi+242 p.
4. Житарашу Н.В. Теоремы о полном наборе изоморфизмов в L_2 -теории обобщенных решений граничных задач для одного параболического по И.Г. Петровскому уравнения. *Матем. сб.* 1985. **128(170)**, № 4. С. 451–473.
5. Ивасишен С.Д. Матрицы Грина параболических граничных задач. Киев: Выща шк., 1990. 200 с.
6. Eidel'man S.D. Parabolic equations. *Partial differential equations, VI*. Berlin: Springer, 1994. P. 205–316. (Encyclopedia Mathematics Sciences; Vol. 63).
7. Eidel'man S.D., Zhitarashu N.V. Parabolic boundary value problems. Basel: Birkhäuser, 1998. xii+298 p.
8. Хермандер Л. Линейные дифференциальные операторы с частными производными. Москва: Мир, 1965. 380 с.
9. Mikhailets V.A., Murach A.A. Hörmander spaces, interpolation, and elliptic problems. Berlin: De Gruyter, 2014. xiv+297 p.
10. Los V., Murach A.A. Parabolic problems and interpolation with a function parameter. *Methods Funct. Anal. Topology*. 2013. **19**, № 2. P. 146–160.
11. Los V., Mikhailets V.A., Murach A.A. An isomorphism theorem for parabolic problems in Hörmander spaces and its applications. *Commun. Pur. Appl. Anal.* 2017. **16**, № 1. P. 69–97. doi: <https://doi.org/10.3934/cpaa.2017003>
12. Los V., Murach A. Isomorphism theorems for some parabolic initial-boundary value problems in Hörmander spaces. *Open Mathematics*. 2017. **15**. P. 57–76. doi: <https://doi.org/10.1515/math-2017-0008>
13. Лось В.Н., Мурач А.А. Параболические смешанные задачи в пространствах обобщенной гладкости. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2014. № 6. С. 23–31. doi: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2014.06.023>
14. Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. Москва: Наука, 1985. 144 с.
15. Los V.M. Anisotropic Hörmander spaces on the lateral surface of a cylinder. *J. Math. Sci.* 2016. **217**, № 4. P. 456–467. doi: <https://doi.org/10.1007/s10958-016-2985-9>

Надійшло до редакції 11.04.2017

REFERENCES

1. Agranovich, M. S. & Vishik, M. I. (1964). Elliptic problems with parameters and parabolic problems of the general form. *Usp. Mat. Nauk*, 19, No. 3, pp. 53-161 (in Russian).
2. Ladyzhenskaya, O. A., Solonnikov, V. A. & Ural'tseva, N. N. (1967). Linear and Quasilinear Equations of the Parabolic Type. Moscow: Nauka (in Russian).
3. Lions, J.-L. & Magenes, E. (1972). Non-homogeneous boundary-value problems and applications. Vol. 2. Berlin: Springer.
4. Zhitarashu, N. V. (1985). Theorems on complete collection of isomorphisms in the L_2 -theory of generalized solutions for one equation parabolic in Petrovskii's sense. *Mat. Sb.*, 128(170), No. 4, pp. 451-473 (in Russian).
5. Ivasyshen, S. D. (1990). Green Matrices of Parabolic Boundary-Value Problems. Kiev: Vyscha Shkola (in Russian).

6. Eidel'man, S. D. (1994). Parabolic equations. In Partial differential equations, VI, Encyclopedia Mathematics Sciences, Vol. 63 (pp. 205-316). Berlin: Springer.
7. Eidel'man, S. D. & Zhitarashu, N. V. (1998). Parabolic boundary value problems. Basel: Birkhäuser.
8. Hörmander, L. (1963). Linear partial differential operators. Berlin: Springer.
9. Mikhailets, V. A. & Murach, A. A. (2014). Hörmander spaces, interpolation, and elliptic problems. Berlin: De Gruyter.
10. Los, V. & Murach, A. A. (2013). Parabolic problems and interpolation with a function parameter. Methods Funct. Anal. Topology, 19, No. 2, pp. 146-160.
11. Los, V., Mikhailets, V. A. & Murach, A. A. (2017). An isomorphism theorem for parabolic problems in Hörmander spaces and its applications. Commun. Pur. Appl. Anal., 16, No. 1, pp. 69-97. doi: <https://doi.org/10.3934/cpaa.2017003>
12. Los, V. & Murach, A. (2017). Isomorphism theorems for some parabolic initial-boundary value problems in Hörmander spaces. Open Mathematics, 15, pp. 57-76. doi: <https://doi.org/10.1515/math-2017-0008>
13. Los, V. M. & Murach, A. A. (2014). Parabolic mixed problems in spaces of generalized smoothness. Dopov. Nac. akad. nauk. Ukr., No. 6, pp. 23-31 (in Russian). doi: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2014.06.023>
14. Seneta, E. (1976). Regularly Varying Functions. Lecture Notes in Mathematics, vol. 508. Berlin: Springer.
15. Los, V. M. (2016). Anisotropic Hörmander spaces on the lateral surface of a cylinder. J. Math. Sci., 217, No. 4, pp. 456-467. doi: <https://doi.org/10.1007/s10958-016-2985-9>

Received 11.04.2017

В.Н. Лось¹, В.А. Михайлец², А.А. Мурач³

¹ НТУ Украины “Киевский политехнический институт им. Игоря Сикорского”

^{2,3} Институт математики НАН Украины, Киев

E-mail: v_los@yahoo.com, mikhailets@imath.kiev.ua, murach@imath.kiev.ua

РЕГУЛЯРНОСТЬ РЕШЕНИЙ ОБЩИХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ЗАДАЧ В ПРОСТРАНСТВАХ ХЕРМАНДЕРА

Доказаны теоремы о глобальной и локальной регулярности обобщенных решений общих параболических начально-краевых задач в пространствах Хермандера.

Ключевые слова: параболическая начально-краевая задача, пространство Хермандера, обобщенное решение, локальная регулярность решения.

V.M. Los¹, V.A. Mikhailets², A.A. Murach³

¹ NTU of Ukraine “Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute”

^{2,3} Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, Kiev

E-mail: v_los@yahoo.com, mikhailets@imath.kiev.ua, murach@imath.kiev.ua

REGULARITY OF SOLUTIONS TO GENERAL PARABOLIC PROBLEMS IN HÖRMANDER SPACES

We prove theorems on global and local regularities of generalized solutions to general parabolic initial-boundary-value problems in Hörmander spaces.

Keywords: parabolic initial-boundary-value problem, Hörmander space, generalized solution, local regularity of a solution.