ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

doi: https://doi.org/10.15407/dopovidi2017.05.025
УДК 539.3

О.С. Богданова, А.А. Каминский, Е.Е. Курчаков

Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины, Киев
E-mail: dfm11@ukr.net, fract@inmech.kiev.ua

О зоне предразрушения возле фронта произвольной трещины в твердом теле

Представлено академиком НАН Украины В.Д. Кубенко

Предложена модель зоны предразрушения возле фронта произвольной трещины в твердом теле. На основе этой модели установлены конститутивные уравнения, связывающие контравариантные компоненты вектора напряжения с ковариантными компонентами вектора смещения. Сформулирован критерий локального разрушения.

Ключевые слова: *произвольная трещина, зона предразрушения, конститутивные уравнения, критерий локального разрушения.*

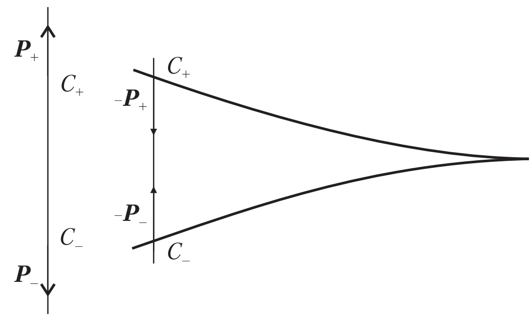
Многочисленные экспериментальные исследования показывают, что перед фронтом трещины образуется зона предразрушения (process zone), которая в дальнейшем перемещается вместе с трещиной [1]. Материал в зоне предразрушения находится в полуразрушенном состоянии. Свидетельством тому служат, к примеру, “трещины серебра” в полимерах и деструкция в металлах.

Одной из основных проблем описания процесса разрушения тела вследствие потери сцепления между его частями является то, что до настоящего времени окончательно не установлены закономерности деформирования материала в зоне предразрушения.

В современных исследованиях по механике разрушения наряду со стандартными характеристиками трещиностойкости (критический коэффициент интенсивности напряжений, критическое раскрытие трещины и др.) предлагается использовать также функциональные характеристики, устанавливающие связь между напряжениями и смещениями по границам зоны предразрушения (Traction-Separation Relationship (TSR)) [2]. Это вызывает необходимость теоретического обоснования такого подхода.

Уравнения, связывающие компоненты векторов напряжения и смещения на границах зоны предразрушения, необходимы для постановки краевых задач о равновесии (в том числе и предельного) твердого тела с трещиной [3].

За последнее время построению упомянутых уравнений было посвящено большое число работ [2]. Все они выполнены на основе различных предпосылок и гипотез. В этих работах строились, преимущественно, конститутивные уравнения для зоны предразрушения у фронта трещины нормального отрыва и поперечного сдвига. И хотя в них получено немало важных результатов, полностью проблема не решена.



а *б*

Рис. 1

Как представляется, компоненты вектора напряжения в точках на противоположных границах зоны предразрушения должны зависеть от расстояния между этими точками. Однако далеко не все конститутивные уравнения отвечают этому требованию.

Наиболее известны конститутивные уравнения, установленные в работе [4]. Аргументами в этих уравнениях выступают нормальная и приведенная тангенциальная (по отношению к трещине) компоненты вектора смещения относительно друг друга точек на противоположных границах зоны предразрушения. При этих аргументах фигурирует скалярный множитель, представляющий собой функцию квадратного корня из некоторого квадратичного инварианта, образованного из указанных компонент вектора смещения. Учитывая это, можно прийти к заключению, что конститутивные уравнения Твергарда—Хатчинсона [4] удовлетворяют высказанному выше требованию лишь частично, а именно, в случае трещины нормального отрыва.

В отличие от уравнений Твергарда—Хатчинсона [4], аргументами в уравнениях, установленных в работах [5, 6], выступают уже нормальная и тангенциальная компоненты вектора смещения, а скалярный множитель при них является функцией квадратного корня из второго инварианта, образованного из упомянутых компонент. Таким образом, согласно уравнениям Нидлемана—Бэнкс-Силса [5, 6], компоненты вектора напряжения в точках на противоположных границах зоны предразрушения зависят от расстояния между этими точками.

Для учета типа трещины (трещина нормального отрыва или трещина поперечного сдвига) авторами работ [5, 6] был введен в конститутивные уравнения специальный параметр. Однако не дано строгого обоснования тому, как это было сделано.

В настоящей статье, исходя из положений общего характера, установим конститутивные уравнения для зоны предразрушения у фронта трещины нормального отрыва, поперечного и продольного сдвигов. Сделаем это аналитически. Сформулируем также критерий локального разрушения.

Модель зоны предразрушения. Рассмотрим твердое тело с произвольной трещиной. При деформации данного тела у фронта трещины возникает зона предразрушения.

Прибегая к помощи метода сечения, переведем внутренние напряжения, действующие по границам зоны предразрушения, в категорию внешних напряжений.

Будем считать, что зона предразрушения представляет собой совокупность прямолинейных элементов, имеющих бесконечно малую площадь поперечного сечения.

Обособим перед фронтом трещины некоторую точку C, переходящую (в результате деформации тела) в точки C_+ и C_- на границах зоны предразрушения.

 ISSN 1025-6415. Dopov. Nac. acad. nauk Ukr. 2017. № 5

Теперь поступим следующим образом. Выделим прямолинейный элемент, присоединенный к границам зоны предразрушения в точках C_+ и C_-. Затем к выделенному элементу приложим векторы напряжений $\boldsymbol{P}_+$ и $\boldsymbol{P}_-$ (рис. 1, *а*), а к телу — векторы напряжений $-\boldsymbol{P}_+$ и $-\boldsymbol{P}_-$ (рис. 1, *б*). Каждые из этих векторов являются противоположными и лежат на прямой, проходящей через точки C_+ и C_-.

Предположим, что известны векторы $\overrightarrow{CC_+} \equiv \boldsymbol{u}^+$ и $\overrightarrow{CC_-} \equiv \boldsymbol{u}^-$, изображающие перемещения точек C_+ и C_- относительно точки C.

Образуем вектор $\boldsymbol{v}^{+-}$ $(\boldsymbol{v}^{+-} = \boldsymbol{u}^+ - \boldsymbol{u}^-)$, изображающий смещение точки C_+ относительно точки C_-, и вектор $\boldsymbol{v}^{-+}$ $(\boldsymbol{v}^{-+} = \boldsymbol{u}^- - \boldsymbol{u}^+)$, изображающий смещение точки C_- относительно точки C_+.

Сосредоточим внимание на выделенном элементе. Для описания состояния этого элемента можно выбрать какие-либо одни векторы напряжения и смещения — $\boldsymbol{P}_+$ и $\boldsymbol{v}^{+-}$ или $\boldsymbol{P}_-$ и $\boldsymbol{v}^{-+}$. Ради простоты выбранные векторы будем записывать как $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{v}$. Из сказанного выше следует, что векторы $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{v}$ коллинеарны. Более того, они равнонаправлены.

Конститутивные уравнения. Отнесем рассматриваемое тело к системе неортогональных криволинейных координат x^1, x^2, x^3, характеризуемой ковариантным метрическим тензором с компонентами $g_{\alpha\beta}$ и контравариантным метрическим тензором с компонентами $g^{\alpha\beta}$.

Пусть имеются взаимные базисы, представленные системами локальных базисных векторов $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ и $\boldsymbol{e}^1, \boldsymbol{e}^2, \boldsymbol{e}^3$.

Укажем, что

$$\boldsymbol{e}_\alpha \cdot \boldsymbol{e}_\beta = g_{\alpha\beta}; \quad \boldsymbol{e}^\alpha \cdot \boldsymbol{e}^\beta = g^{\alpha\beta}. \tag{1}$$

К тому же,

$$\boldsymbol{e}_\alpha \cdot \boldsymbol{e}^\beta = \delta_\alpha^\beta. \tag{2}$$

В формулах (2) фигурируют символы Кронекера δ_α^β:

$$\delta_\alpha^\beta = \begin{cases} 1 & (\alpha = \beta); \\ 0 & (\alpha \neq \beta). \end{cases} \tag{3}$$

В дальнейшем будем пользоваться правом замены немых индексов, не оговаривая это особо.

Выразим вектор $\boldsymbol{P}$ через его контравариантные компоненты:

$$\boldsymbol{P} = P^\gamma \boldsymbol{e}_\gamma. \tag{4}$$

Для модуля $|\boldsymbol{P}| \equiv P$ вектора $\boldsymbol{P}$ имеем

$$P = \sqrt{\boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{P}}. \tag{5}$$

Согласно формуле (4) и первым из формул (1), скалярное произведение

$$\boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{P} = g_{\alpha\beta} P^\alpha P^\beta. \tag{6}$$

Выразим вектор $\boldsymbol{v}$ через его ковариантные компоненты:

$$\boldsymbol{v} = v_\gamma \boldsymbol{e}^\gamma. \tag{7}$$

Для модуля $|\boldsymbol{v}| \equiv v$ вектора $\boldsymbol{v}$ имеем

$$v = \sqrt{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}}. \tag{8}$$

Согласно формуле (7) и вторым из формул (1), скалярное произведение $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}$ будет

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v} = g^{\alpha\beta} v_\alpha v_\beta . \tag{9}$$

Установим уравнения, связывающие контравариантные компоненты вектора $\boldsymbol{P}$ с ковариантными компонентами вектора $\boldsymbol{v}$.

Напомним, что векторы $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{v}$ коллинеарны, т. е.

$$\boldsymbol{P} = I\boldsymbol{v}, \tag{10}$$

где I — переменный множитель.

Умножая обе части соотношения (10) на $\boldsymbol{e}^\alpha$, получим

$$\boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{e}^\alpha = I\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}^\alpha . \tag{11}$$

В соответствии с формулой (4), формулами (2) и условиями (3) скалярные произведения

$$\boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{e}^\alpha = P^\alpha . \tag{12}$$

Согласно формуле (7) и второй из формул (1), скалярные произведения

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}^\alpha = g^{\alpha\beta} v_\beta . \tag{13}$$

С учетом формул (12) и (13) соотношения (11) примут вид

$$P^\alpha = I g^{\alpha\beta} v_\beta . \tag{14}$$

Представим множитель I через модули P и v.

Свертывая соотношения (14) с компонентами v_α , установим

$$P^\alpha v_\alpha = I g^{\alpha\beta} v_\alpha v_\beta \tag{15}$$

Из свертки $P^\alpha v_\alpha$ следует исключить компоненты v_α . Для этого потребуются соотношения, обратные соотношениям (14).

Опираясь на соотношения (14), выведем

$$g_{\alpha\gamma} P^\gamma = I g_{\alpha\gamma} g^{\gamma\beta} v_\beta . \tag{16}$$

Заметим, что согласно первым из формул (1), а также формулам (2) и условиям (3),

$$\boldsymbol{e}_\alpha = g_{\alpha\gamma} \boldsymbol{e}^\gamma . \tag{17}$$

Умножая левые и правым части формул (17) на $\boldsymbol{e}^\beta$, в соответствии со второй из формул (1) получим

$$\boldsymbol{e}_\alpha \cdot \boldsymbol{e}^\beta = g_{\alpha\gamma} g^{\gamma\beta} . \tag{18}$$

С учетом формул (18) формулы (2) примут вид

$$g_{\alpha\gamma} g^{\gamma\beta} = \delta_a^\beta . \tag{19}$$

Привлекая формулы (19) и учитывая условия (3), запишем соотношения (16) в виде

$$g_{\alpha\gamma} P^\gamma = I v_\alpha$$

или

$$g_{\alpha\beta} P^\beta = I v_\alpha . \tag{20}$$

Из соотношений (20) вытекает

$$v_\alpha = \frac{g_{\alpha\beta} P^\beta}{I}. \tag{21}$$

В силу соотношений (21) свертка

$$P^\alpha v_\alpha = \frac{g_{\alpha\beta} P^\alpha P^\beta}{I}. \tag{22}$$

Используя формулу (22), преобразуем формулу (15) к виду

$$g_{\alpha\beta} P^\alpha P^\beta = I^2 g^{\alpha\beta} v_\alpha v_\beta. \tag{23}$$

Так как векторы $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{v}$ не только коллинеарны, но и равнонаправлены, то множитель I должен быть положительным.

Учитывая формулы (6), (5) и (9), (8), на основании формулы (23) найдем

$$I = \frac{P}{v}. \tag{24}$$

Подставляя в соотношения (14) формулу (24), установим

$$P^\alpha = \frac{P}{v} g^{\alpha\beta} v_\beta. \tag{25}$$

Следовательно, пришли к искомым уравнениям.

Заметим, что искомые уравнения могут быть установлены и более простым способом.

Пусть имеется орт $\boldsymbol{i}$, равнонаправленный с вектором $\boldsymbol{P}$. Стало быть, вектор $\boldsymbol{P}$ можно записать так:

$$\boldsymbol{P} = P\boldsymbol{i}. \tag{26}$$

Умножая обе части формулы (26) на $\boldsymbol{e}^\alpha$, получим

$$\boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{e}^\alpha = P\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{e}^\alpha. \tag{27}$$

Поскольку векторы $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{v}$ равнонаправлены, то для орта $\boldsymbol{i}$ будем иметь:

$$\boldsymbol{i} = \frac{\boldsymbol{v}}{v}. \tag{28}$$

В силу формулы (28) и формул (13) скалярные произведения $\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{e}^\alpha$ будут

$$\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{e}^\alpha = \frac{g^{\alpha\beta} v_\beta}{v}. \tag{29}$$

Подстановка в формулы (27) формул (12) и (29) дает

$$P^\alpha = P \frac{g^{\alpha\beta} v_\beta}{v}. \tag{30}$$

Как видим, уравнения (30) идентичны уравнениям (25).

Связь контравариантных компонент вектора $\boldsymbol{P}$ с ковариантными компонентами вектора $\boldsymbol{v}$ по уравнениям (30) будет определенной, если известна функциональная зависимость модуля P от модуля v (рис. 2).

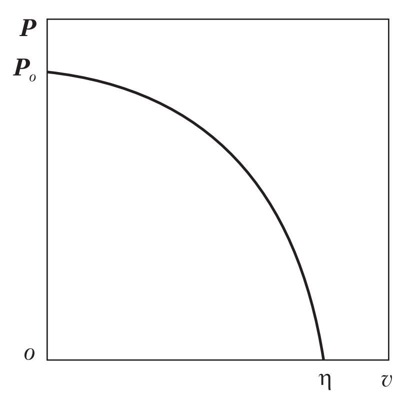


Рис. 2

Следуя работе [7], положим, что эта зависимость выражается формулой

$$P = P_o f(v), \tag{31}$$

где $f(v)$ — функция, убывающая в промежутке (o, η).

Конечно, значение $v = \eta$ модуля v должно зависеть от ориентации выделенного элемента относительно трещины.

Потребуем, чтобы функция $f(v)$ удовлетворяла таким условиям:

$$\begin{aligned} &f(v)\Big|_{v=o} = 1; \qquad \frac{d}{dv} f(v)\Bigg|_{v=o} = 0; \\ &f(v)\Big|_{v=\eta} = 0; \qquad \frac{d}{dv} f(v)\Bigg|_{v=\eta} = m. \end{aligned} \tag{32}$$

Для многих приложений функция $f(v)$ может быть аппроксимирована многочленом вида

$$f(v) = 1 + b_{k_1} v^{k_1} + b_{k_2} v^{k_2}, \tag{33}$$

где k_1, k_2 — целые числа $(1 < k_1 < k_2)$.

Очевидно, что первому и второму из условий (32) формула (33) удовлетворяет тождественно. Ввиду этого, коэффициенты b_{k_1} и b_{k_2} надлежит найти, учтя третье и четвертое из условий (32).

Дифференцируя формулу (33), установим

$$\frac{d}{dv} f(v) = k_1 b_{k_1} v^{k_1 - 1} + k_2 b_{k_2} v^{k_2 - 1}. \tag{34}$$

Учитывая третье и четвертое из условий (32), по формулам (33) и (34) найдем

$$b_{k_1} = \frac{k_2 + m\eta}{(k_1 - k_2)\eta^{k_1}}; \quad b_{k_2} = \frac{k_1 + m\eta}{(k_2 - k_1)\eta^{k_2}}. \tag{35}$$

Согласно формуле (33), формула (31) будет

$$P = P_o (1 + b_{k_1} v^{k_1} + b_{k_2} v^{k_2}). \tag{36}$$

Воспользовавшись уравнениями (30), а также формулой (36) и формулами (35), можно вычислить контравариантные компоненты вектора $\boldsymbol{P}$. А зная их, не составит труда получить контравариантные компоненты вектора $-\boldsymbol{P}$.

Построим зависимость значения $v = \eta$ модуля v от ориентации выделенного элемента относительно трещины.

Пусть имеются попарно перпендикулярные орты $\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2, \boldsymbol{i}_3$, приведенные к общему началу.

Будем подразумевать, что орты $\boldsymbol{i}_1$ и $\boldsymbol{i}_2$ перпендикулярны фронту трещины, а орт $\boldsymbol{i}_3$ совпадает с касательной к фронту трещины.

Углы между вектором $\boldsymbol{v}$ и ортами $\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2, \boldsymbol{i}_3$ обозначим так:

$$\boldsymbol{v}^\wedge \boldsymbol{i}_1 \equiv \vartheta_1, \quad \boldsymbol{v}^\wedge \boldsymbol{i}_2 \equiv \vartheta_2, \quad \boldsymbol{v}^\wedge \boldsymbol{i}_3 \equiv \vartheta_3.$$

Введем направляющие косинусы вектора $\boldsymbol{v}$:

$$\cos\vartheta_1, \quad \cos\vartheta_2, \quad \cos\vartheta_3.$$

ISSN 1025-6415. Dopov. Nac. acad. nauk Ukr. 2017. № 5

Заметим, что они связаны между собой:

$$\cos^2 \vartheta_1 + \cos^2 \vartheta_2 + \cos^2 \vartheta_3 = 1. \tag{37}$$

Предположим, что зависимость η от направляющих косинусов вектора $\boldsymbol{v}$ может быть представлена в виде

$$\eta = \sum_{p=1}^{3} \Gamma_p \cos^2 \vartheta_p + \sum_{p=1}^{3}\sum_{q=1}^{3} \Gamma_{pq} \cos^2 \vartheta_p \cos^2 \vartheta_q . \tag{38}$$

причем

$$\Gamma_{pq} = 0 \ \ (p = q); \qquad \Gamma_{pq} = \Gamma_{qp} \ \ (p \neq q). \tag{39}$$

В случае трещины нормального отрыва и поперечного сдвига, в котором $\vartheta_3 = \dfrac{\pi}{2}$, согласно равенствам (39) формула (38) будет

$$\eta = \Gamma_1 \cos^2 \vartheta_1 + \Gamma_2 \cos^2 \vartheta_2 + 2\Gamma_{12} \cos^2 \vartheta_1 \cos^2 \vartheta_2 . \tag{40}$$

При $\vartheta_3 = \dfrac{\pi}{2}$ в силу формулы (37) имеем

$$\cos^2 \vartheta_2 = 1 - \cos^2 \vartheta_1 . \tag{41}$$

С учетом формулы (41) формула (40) примет вид

$$\eta = \Gamma_2 + [\Gamma_1 - \Gamma_2 + 2\Gamma_{12}(1 - \cos^2 \vartheta_1)] \cos^2 \vartheta_1 . \tag{42}$$

Коснемся вопроса определения коэффициентов Γ_1, Γ_2 и Γ_{12}.

Примем

$$\eta\big|_{\vartheta_1 = \vartheta_1^{(1,0)},\ \vartheta_1^{(0,2)},\ \vartheta_1^{(1,2)}} = \eta^{(1,0)}, \eta^{(0,2)}, \eta^{(1,2)}. \tag{43}$$

Используя формулу (42), в соответствии с условиями (43) установим:

$$\eta^{(1,0)} = \Gamma_2 + [\Gamma_1 - \Gamma_2 + 2\Gamma_{12}(1 - \cos^2 \vartheta_1^{(1,0)})] \cos^2 \vartheta_1^{(1,0)};$$

$$\eta^{(0,2)} = \Gamma_2 + [\Gamma_1 - \Gamma_2 + 2\Gamma_{12}(1 - \cos^2 \vartheta_1^{(0,2)})] \cos^2 \vartheta_1^{(0,2)};$$

$$\eta^{(1,2)} = \Gamma_2 + [\Gamma_1 - \Gamma_2 + 2\Gamma_{12}(1 - \cos^2 \vartheta_1^{(1,2)})] \cos^2 \vartheta_1^{(1,2)}. \tag{44}$$

Остановимся на частном случае. Полагая, что $\vartheta_1^{(1,0)} = 0$, $\vartheta_1^{(0,2)} = \dfrac{\pi}{2}$, $\vartheta_1^{(1,2)} = \dfrac{\pi}{4}$ на основании формул (44) получим:

$$\eta^{(1,0)} = \Gamma_1; \quad \eta^{(0,2)} = \Gamma_2; \quad \eta^{(1,2)} = \frac{1}{2}(\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_{12}).$$

Отсюда имеем

$$\Gamma_1 = \eta^{(1,0)}; \quad \Gamma_2 = \eta^{(0,2)}; \quad \Gamma_{12} = 2\eta^{(1,2)} - \eta^{(1,0)} - \eta^{(0,2)}.$$

Величины $\eta^{(1,0)}$, $\eta^{(0,2)}$ и $\eta^{(1,2)}$ подлежат определению в опытах.

Критерий локального разрушения. Сформулируем критерий локального разрушения, но сначала определим энергию J, идущую на деформацию выделенного элемента.

Элементарная энергия такова:

$$dJ = P^{\alpha} dv_{\alpha} . \tag{45}$$

Используя уравнения (30), запишем формулу (45) в виде

$$dJ = P\frac{g^{\alpha\beta} d\, v_\alpha v_\beta}{v}. \tag{46}$$

Учитывая формулы (9) и (8), представим формулу (46) так:

$$dJ = Pdv. \tag{47}$$

Интегрируя, на основании формулы (47) получим

$$J = \int Pdv. \tag{48}$$

Привлекая формулу (36) и находя неопределенный интеграл в правой части формулы (48), а также определяя из начального условия постоянную интегрирования (энергия J должна быть равна нулю, если модуль v равен нулю), будем иметь

$$J = P_o\left(1 + \frac{b_{k_1}}{k_1+1} v^{k_1} + \frac{b_{k_2}}{k_2+1} v^{k_2}\right) v\,. \tag{49}$$

Примем

$$J\big|_{v=\eta} = \omega. \tag{50}$$

Подставляя в формулу (49) формулы (35) и учитывая условие (50), найдем

$$\omega = P_o\frac{(k_1 k_2 - m\eta)\,\eta}{(k_1+1)(k_2+1)}\,.$$

В момент разрушения выделенного элемента модуль P вектора напряжения оказывается равным нулю. Это происходит тогда, когда модуль v вектора смещения принимает значение $v = \eta$. Таким образом, имеем критерий локального разрушения: $v = \eta$.

Отметим, что к моменту разрушения выделенного элемента энергия J, затраченная на его деформацию, становится равной ω.

Итак, предложена модель зоны предразрушения, образующейся у фронта произвольной трещины в твердом теле. В рамках этой модели зона предразрушения представлена как совокупность прямолинейных элементов с бесконечно малой площадью поперечного сечения. С учетом этого установлены конститутивные уравнения, связывающие между собой геометрические компоненты вектора напряжения в точках на противоположных границах зоны предразрушения и геометрические компоненты вектора смещения относительно друг друга данных точек. Конкретизирована скалярная функция модуля вектора смещения, содержащаяся в установленных уравнениях. Построена зависимость одного из параметров этой функции от пространственной ориентации вектора смещения. Сформулирован критерий локального разрушения. Приведена физическая интерпретация указанного критерия.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Kaminsky A.A. Mechanics of the Delayed Fracture of Viscoelastic Bodies with Cracks: Theory and Experiment (Review). *Int. Appl. Mech.* 2014. **50**, № 5. P. 485—548.
2. Park K., Paulino G.H. Cohesive Zone Models: A Critical Review of Traction-Separation Relationships Across Fracture Surfaces. *Appl. Mech. Reviews.* 2011. **64**, № 11. P. 1—20.
3. Kaminsky A.A., Kurchakov E.E. Influence of Tension Along a Mode I Crack in an Elastic Body on the Formation of a Nonlinear Zone. *Int. Appl. Mech.* 2015. **51**, № 2. P. 130—148.

4. Tvergaard V., Hutchinson J.W. The Influence of Plasticity on Mixed Mode Interface Toughness. *J. Mech. Phys. Solids*. 1993. **41**, № 6. P. 1119—1135.
5. Needleman A. A continuum Model for Void Nucleation by Inclusion Debonding. *J. Appl. Mech*. 1987. **54**, № 3. P. 525—531.
6. Banks-Sills L., Travitzky N., Ashkenazi D., Eliasi R. A Methodology for Measuring Interface Fracture Properties of Composite Materials. *Int. J. Fract*. 1999. **99**, № 3. P. 143—160.
7. Wittmann F.H., Rokugo K., Bruehwiler E., Mihashi H., Simonin P. Fracture Energy and Strain Softening of Concrete as Determined by Means of Compact Tension Specimens. *Mater. Struct*. 1988. **21**, № 1. P. 21—32.

Поступило в редакцию 28.10.2016

REFERENCES

1. Kaminsky, A. A. (2014). Mechanics of the Delayed Fracture of Viscoelastic Bodies with Cracks: Theory and Experiment (Review). Int. Appl. Mech., 50, Iss. 5, pp. 485-548. doi: https://doi.org/10.1007/s10778-014-0652-8.
2. Park, K. & Paulino, G. H. (2011). Cohesive Zone Models: A Critical Review of Traction-Separation Relationships Across Fracture Surfaces. Appl. Mech. Reviews, 64, No. 11, pp. 1-20.
3. Kaminsky, A. A. & Kurchakov, E. E. (2015). Influence of Tension Along a Mode I Crack in an Elastic Body on the Formation of a Nonlinear Zone. Int. Appl. Mech., 51, Iss. 2, pp. 130-148. doi: https://doi.org/10.1007/s10778-015-0679-5
4. Tvergaard, V. & Hutchinson, J.W. (1993). The Influence of Plasticity on Mixed Mode Interface Toughness. J. Mech. Phys. Solids, 41, No. 6, pp. 1119-1135.
5. Needleman, A. (1987). A continuum Model for Void Nucleation by Inclusion Debonding. J. Appl. Mech., 54, No. 3, pp. 525-531.
6. Banks-Sills, L., Travitzky, N., Ashkenazi, D. & Eliasi R. (1999). A Methodology for Measuring Interface Fracture Properties of Composite Materials. Int. J. Fract., 99, No. 3, pp. 143-160.
7. Wittmann, F. H., Rokugo, K., Bruehwiler, E., Mihashi, H. & Simonin, P. (1988). Fracture Energy and Strain Softening of Concrete as Determined by Means of Compact Tension Specimens. Mater. Struct., 21, No. 1, pp. 21-32.

Received 28.10.2016

О.С. Богданова, А.О. Камінський, Є.Є. Курчаков

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ
E-mail: dfm11@ukr.net, fract@inmech.kiev.ua

ПРО ЗОНУ ПЕРЕДРУЙНУВАННЯ БІЛЯ ФРОНТУ
ДОВІЛЬНОЇ ТРІЩИНИ В ТВЕРДОМУ ТІЛІ

Запропоновано модель зони передруйнування біля фронту довільної тріщини в твердому тілі. На основі цієї моделі встановлено конститутивні рівняння, що зв'язують контраваріантні компоненти вектора напруження із коваріантними компонентами вектора зміщення. Сформульовано критерій локального руйнування.

Ключові слова: *довільна тріщина, зона передруйнування, конститутивні рівняння, критерій локального руйнування.*

O.S. Bogdanova, A.A. Kaminsky, E.E. Kurchakov

S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine, Kiev
E-mail: dfm11@ukr.net, fract@inmech.kiev.ua

ON THE FRACTURE PROCESS ZONE NEAR
THE FRONT OF AN ARBITRARY CRACK IN A SOLID

The model of the fracture process zone near the front of an arbitrary crack in a solid is proposed. Within the framework of this model, the constitutive equations relating the contravariant components of a stress vector with the covariant components of a displacement vector are derived. The local fracture criterion is formulated.

Keywords: *arbitrary crack, fracture process zone, constitutive equations, local fracture criterion.*