http://dx.doi.org/10.15407/dopovidi2016.08.012
УДК 517.5

Н. С. Семочко, І. Е. Чижиков

Львівський національний університет ім. Івана Франка
E-mail: semochkons@ukr.net, chyzhykov@yahoo.com

Зростання розв'язків дробових диференціальних рівнянь

(Представлено членом-кореспондентом НАН України А. Н. Кочубеєм)

Доведено існування та єдиність розв'язку деякого дробового диференціального рівняння. За допомогою метода Вімана–Валірона знайдено порядок зростання розв'язку.

Ключові слова: дробова похідна, диференціальне рівняння, ціла функція, метод Вімана–Валірона.

Дробові диференціальні рівняння широко використовують у фізиці для моделювання явищ аномальної релаксації та дифузії. Проте вивчення даних рівнянь знаходиться на початковій стадії розвитку. Систематичний розвиток аналітичної теорії дробових диференціальних рівнянь розпочався тільки недавно в працях Кілбаса, Ріверо, Трухільо, Кочубея [1–3].

Відомо [4–6], що кожний нетривіальний розв'язок рівняння

$$f^{(q)}(z) + a(z)f(z) = 0, \qquad q \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

де $a(z)$ — поліном степеня m, є цілою функцією порядку $\rho[f] = 1 + m/q$,

$$\rho[f] = \limsup_{r\to\infty} \frac{\ln\ln M(r,f)}{\ln r}, \qquad M(r,f) = \max\{|f(z)|\colon |z| = r\}.$$

З іншого боку, для нецілих значень $q \in (0,1)$ рівняння (1) з $a(t) = A(t^q)$, де A — поліном степеня m, допускає розв'язок вигляду $f(t) = v(t^q)$, $t \geqslant 0$, де v — ціла функція з $\rho[v] \leqslant (1+m)/q$ [3].

Розглянемо дробове диференціальне рівняння у формі

$$\frac{\widetilde{D}^q(r^q f(z))}{z} + a(z)f(z) = 0, \qquad z \in \mathbb{C}, \qquad |z| = r, \tag{2}$$

де коефіцієнт $a(z)$ є цілою функцією, $q > 0$ і

$$\widetilde{D}^q f(z) = D^q f(z) - \Gamma(q+1)f(0), \tag{3}$$

а D^q — дробова похідна Рімана–Ліувілля за змінною r. Зокрема, $D^1(rf(z)) = (zf(z))'$, $\Gamma(q)$ — гамма-функція Ейлера. У даній роботі ми доводимо існування та єдиність розв'язку рівняння (2) з початковою умовою $f(0) = f_0$ і оцінюємо зростання цих розв'язків, використовуючи узагальнений нами метод Вімана–Валірона для дробових похідних.

1. Дробова похідна Рімана–Ліувілля. Нехай $f \in L(0, a)$, $a > 0$.

$$I^q f(x) = \frac{1}{\Gamma(q)} \int\limits_0^x \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{1-q}}$$

є дробовим інтегралом Рімана–Ліувілля порядку $q > 0$ для f. Якщо, крім того, $q \in (n-1, n]$, $n \in \mathbb{N}$, а функція $(I^{n-q} f(x))^{(n-1)}$ має майже скрізь на $(0, a)$ похідну, то дробова похідна Рімана–Ліувілля порядку $q > 0$ для f визначається таким чином:

$$D^q f(x) = \frac{d^n}{dx^n}\{I^{n-q} f(x)\}, \qquad q \in (n-1, n], \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Зокрема, якщо $0 < q < 1$, то

$$D^q f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-q)} \frac{d}{dx} \int\limits_0^x \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^q}.$$

Дробова похідна має таку властивість [7]:

$$D^q x^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-q)} x^{\beta-q-1}, \qquad q, \beta > 0. \tag{4}$$

Тому дробова похідна для цілої функції f, яку можна зобразити у вигляді ряду

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \qquad z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}, \tag{5}$$

визначається таким чином:

$$|z|^q D^q f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-q)} z^n.$$

Зауваження 1. Аналог оператора $D^q(r^q f(re^{i\theta}))$ можна знайти у [8, роз. 9]. Наше означення забезпечує рівність $\widetilde{D}^q(r^q f(re^{i\varphi}))\,|_{r=0}= 0$. Наявність множника r^q дозволяє зберегти аналітичність.

2. Узагальнення методу Вімана–Валірона для дробових похідних. Введемо основні поняття теорії Вімана–Валірона [9, 10]. Для цілої функції f вигляду (5) при $r \in \in [0, +\infty)$ означимо максимальний член $\mu(r, f) = \max\{|a_n| r^n \colon n \geqslant 0\}$ і центральний індекс $\nu(r, f) = \max\{n \geqslant 0 \colon |a_n| r^n = \mu(r, f)\}$ ряду (5).

Нехай $(\alpha_n)_{n=0}^{\infty}$ — послідовність додатних чисел таких, що α_{n+1}/α_n спадає із зростанням n, а послідовність чисел (ϱ_n), зростаючих із зростанням n, визначимо таким чином:

$$0 < \varrho_0 < \frac{\alpha_0}{\alpha_1}, \qquad \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} < \varrho_n < \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}}, \qquad n \geqslant 1.$$

Будемо казати, що значення r є нормальним (для послідовностей (a_n), (α_n) і (ϱ_n)), якщо для деякого ν виконується

$$|a_n| r^n \leqslant |a_\nu| r^\nu \frac{\alpha_n \varrho_\nu^n}{\alpha_\nu \varrho_\nu^\nu}, \qquad n \geqslant 0.$$

Через V позначимо клас додатних неперервних неспадних функцій v на $[0,+\infty)$ таких, що $x^2/(v(x)\ln v(x))$ зростає до $+\infty$ при $x\in[x_0;+\infty)$, $x_0>0$, і $\int\limits_0^{+\infty} dx/v(x)<+\infty$. Наприклад, функція $v(x)=x\ln^{\gamma+1}x$, $x\geqslant e$, $\gamma\in(0,1)$, належить до класу V.

Теорема 1 [11]. *Нехай $v\in V$ і $\varkappa(t)=4\sqrt{v(t)\ln v(t)}$. Припустимо, що f є цілою функцією, значення r є нормальним і достатньо великим, $|z_0|=r$, і виконуються нерівності*

$$|f(z_0)|\geqslant \eta M(r,f),\qquad v^{-2}(\nu(r,f))\leqslant\eta\leqslant 1,$$

$$r\biggl(1-\frac{1}{40\varkappa(\nu)}\biggr)<\varrho<r\biggl(1+\frac{1}{40\varkappa(\nu)}\biggr),\qquad \nu=\nu(r,f).$$

Тоді, якщо $q>0$, для $|z|=\varrho$ маємо

$$\biggl(\frac{\varrho}{\nu}\biggr)^q D^q f(z)=f(z)+O\biggl(\frac{\varkappa(\nu)}{\nu}\biggr)M(\varrho,f). \tag{6}$$

Зокрема, якщо $\ln\varrho-\ln r=o(1/\varkappa(\nu))$, то

$$M(\varrho,D^q f(z))=\biggl(\frac{\nu}{\varrho}\biggr)^q\biggl\{1+O\biggl(\frac{\varkappa(\nu)}{\nu}\biggr)\biggr\}M(\varrho,f)=(1+o(1))\biggl(\frac{\nu}{r}\biggr)^q M(r,f), \tag{7}$$

коли $r\to+\infty$ поза множиною скінченної логарифмічної міри E, тобто $\int\limits_{E\cap[1,+\infty)} dx/x<<+\infty$.

Зауваження 2. $D^q(\varrho^q f(z))$ має таку саму асимптотичну оцінку, як $\varrho^q D^q f(z)$, тобто в умовах теореми 1 для $|z|=\varrho$ маємо

$$D^q(\varrho^q f(z))=\nu^q\biggl(f(z)+O\biggl(\frac{\varkappa(\nu)}{\nu}M(\varrho,f)\biggr)\biggr), \tag{8}$$

коли $r\to+\infty$ поза множиною скінченної логарифмічної міри.

Зауваження 3. Теорема 1 узагальнює на дробові похідні теорему 12 з [10].

3. Оцінка зростання розв'язків дробових диференціальних рівнянь.

Теорема 2. *Нехай $q>0$. Рівняння (2) з початковою умовою $f(0)=f_0$ має єдиний цілий розв'язок.*

Доведення теореми. Ми шукатимемо цілий розв'язок рівняння (2) у вигляді $f(z)==\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n z^n$. Усі коефіцієнти f_n, $n\geqslant 1$, можуть бути визначені через коефіцієнти a_k розкладу в ряд Тейлора функції $a(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k z^k$ і з рівняння (2) — коефіцієнт f_0. Справді, з (4) отримуємо

$$\widetilde{D}^q(r^q f(z))=\widetilde{D}^q\biggl(\sum_{n=0}^{\infty} f_n r^{n+q}e^{in\theta}\biggr)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n\frac{\Gamma(n+q+1)}{\Gamma(n+1)}z^n-\Gamma(1+q)f(0).$$

Після підстановки попередньої рівності в рівняння (2) одержимо

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_{n+1}\frac{\Gamma(n+q+2)}{\Gamma(n+2)}z^n=-\sum_{k=0}^{\infty}a_k z^k\sum_{n=0}^{\infty}f_n z^n. \tag{9}$$

Прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях у (9), запишемо

$$
\begin{aligned}
&f_1 = -\frac{\Gamma(2)}{\Gamma(2+q)} a_0 f_0;\\
&f_2 = -\frac{\Gamma(3)}{\Gamma(3+q)} (f_0 a_1 + f_1 a_0);\\
&\ldots\\
&f_j = -\frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1+q)} \sum_{k=0}^{j-1} f_k a_{j-k}.
\end{aligned} \tag{10}
$$

Отже, розв'язком рівняння (2) є функція $f(z)$ з коефіцієнтами, визначеними формулами (10). Структура формул (10) показує, що всі коефіцієнти f_n є поліномами від a_j, $j \in \{0, \ldots, n-1\}$, та f_0 і, отже, визначені єдиним чином. Залишилося показати, що функція $f(z)$ з коефіцієнтами (10) є цілою.

Оскільки функція $a(z)$ є цілою, то для будь-якого ε існує k_0 таке, що для всіх $k > k_0$ виконується $\sqrt[k]{|a_k|} < \varepsilon$ і, отже, $|a_k| < \varepsilon^k$. Звідси випливає, що існує стала M_1 така, що для будь-якого $k \in \mathbb{Z}_+$

$$
|a_k| < M_1 \varepsilon^k. \tag{11}
$$

Згідно з асимптотичною оцінкою гамма-функцій, а саме

$$
\frac{\Gamma(t+a)}{\Gamma(t+b)} = t^{a-b}\left(1 + O\left(\frac{1}{t}\right)\right), \qquad t \to +\infty, \qquad b, a \in \mathbf{R},
$$

існує стала M_2 така, що для всіх $j \in \mathbb{N}$

$$
\frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1+q)} \leqslant \frac{M_2}{j^q}. \tag{12}
$$

Позначимо $\alpha_n := M_1 M_2 / n^q$, $n \in \mathbb{Z}_+$ і $|f_0| = C_0$. Методом математичної індукції доведемо тепер, що справедливою є така оцінка для коефіцієнтів f_j:

$$
|f_j| \leqslant C_0 \alpha_j \prod_{n=1}^{j-1} (\varepsilon + \alpha_n), \qquad j \in \mathbb{N}. \tag{13}
$$

Справді, враховуючи нерівності (11) і (12), для $j = 1$ маємо

$$
|f_1| = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(2+q)} a_0 f_0 \leqslant \frac{M_2}{1^q} C_0 M_1 = C_0 \alpha_1.
$$

Припустимо, що для деякого $j \in \mathbb{N}$ виконується нерівність (13). Тоді

$$
|f_{j+1}| = \left| -\frac{\Gamma(j+2)}{\Gamma(j+2+q)} (a_0 f_j + a_1 f_{j-1} + \ldots + a_{j-1} f_1 + a_j f_0) \right| \leqslant \frac{M_2}{(j+1)^q} \times
$$

$$
\times \left(M_1 C_0 \alpha_j \prod_{n=1}^{j-1} (\varepsilon + \alpha_n) + M_1 C_0 \varepsilon \alpha_{j-1} \prod_{n=1}^{j-2} (\varepsilon + \alpha_n) + \ldots + M_1 C_0 \varepsilon^{j-1} \alpha_1 + M_1 C_0 \varepsilon^j \right) =
$$

$$= C_0\alpha_{j+1}\left(\alpha_j\prod_{n=1}^{j-1}(\varepsilon+\alpha_n)+\varepsilon\alpha_{j-1}\prod_{n=1}^{j-2}(\varepsilon+\alpha_n)+\ldots+\varepsilon^{j-1}\alpha_1+\varepsilon^j\right)=$$

$$= C_0\alpha_{j+1}\prod_{n=1}^{j}(\varepsilon+\alpha_n).$$

Останню рівність нескладно перевірити за індукцією.

Отже, нерівність (13) доведено повністю. З цієї нерівності одержимо

$$\ln|f_j| \leqslant \ln C_0 + \ln\alpha_j + \sum_{n=1}^{j-1}\left(\ln\varepsilon + \ln\left(1+\frac{\alpha_n}{\varepsilon}\right)\right) = \ln C_0 + O(\ln j) + (j-1)\varepsilon + \sum_{n=1}^{j-1}\frac{\alpha_n}{\varepsilon} =$$

$$= j\ln\varepsilon + O(\ln j) + O(j^{1-q}) = (1+o(1))j\ln\varepsilon.$$

Звідси для $j \geqslant j_0$ маємо $\ln|f_j|/j < 2\ln\varepsilon$. З довільності ε одержимо, що $\ln|f_j|/j \to -\infty$ $(j\to\infty)$, а це еквівалентно тому, що $\sqrt[j]{|f_j|}\to 0$ при $j\to+\infty$.

Отже, функція $f(z)$ з коефіцієнтами (10) є цілою і теорема доведена.

Теорема 3. *Нехай $a(z)$ є поліномом степеня $m \geqslant 0$. Тоді всі нетривіальні розв'язки f рівняння* (2) *мають порядок зростання $\varrho[f] = (m+1)/q$.*

Для доведення цієї теореми нам потрібні такі твердження.

Лема 1 (лема 1.1.2 [10]). *Нехай $g\colon (0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $h\colon (0,+\infty)\to\mathbb{R}$ — монотонні зростаючі функції такі, що $g(r)\leqslant h(r)$ поза винятковою множиною E скінченної логарифмічної міри. Тоді для будь-якого $\alpha > 0$ існує $r_0 > 0$ таке, що $g(r)\leqslant h(r^{\alpha})$ виконуються для всіх $r > r_0$.*

Лема 2 (теорема 3.1 [10]). *Якщо f є цілою функцією порядку ϱ, то*

$$\varrho[f] = \limsup_{r\to+\infty}\frac{\ln^+\nu(r,f)}{\ln r} = \limsup_{r\to+\infty}\frac{\ln^+\ln^+\mu(r,f)}{\ln r}.$$

Доведення теореми. Запишемо рівняння (2) у вигляді

$$\widetilde{D}^q(r^q f(z)) + za(z)f(z) = 0. \tag{14}$$

Нехай $f(z)$ є нетривіальним розв'язком (2) і $\nu(r)$ — центральним індексом f. Згідно з теоремою 1 і зауваженням 2, нехай $E\subset\mathbb{R}_+$ є множиною скінченної логарифмічної міри такою, що

$$D^q(r^q f(z)) = \nu(r)^q(1+o(1))f(z) \tag{15}$$

виконується для $r=|z|\notin E$, де z вибране так, щоб $f(z)=M(r,f)$. Підставивши рівність (15) у рівняння (14), одержимо

$$\nu(r)^q + (a_0z + a_1z^2 + \ldots + a_mz^{m+1})(1+o(1)) = 0. \tag{16}$$

Звідси

$$\nu(r)^q = |\nu(r)|^q = |a_0z + a_1z^2 + \ldots + a_mz^{m+1}|\,|1+o(1)| \geqslant \frac{1}{4}|a_m|r^{m+1},$$

$$r\to+\infty, \qquad r\notin E.$$

Отже, беручи до уваги лему 2,

$$\frac{\ln^+ \nu(r)}{\ln r} \geqslant \frac{m+1}{q} + o(1)$$

і

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{\ln^+ \nu(r)}{\ln r} = \varrho[f] \geqslant \frac{m+1}{q}.$$

З іншого боку, з (16) маємо для деякого $K > 0$

$$\nu(r)^q \leqslant K^2 r^{m+1},$$

поза множиною скінченної логарифмічної міри. Для $\alpha > 1$ з леми 1 випливає, що

$$\nu(r) \leqslant K r^{\alpha \frac{m+1}{q}}$$

для всіх r досить великих. Таким чином,

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{\ln^+ \nu(r)}{\ln r} \leqslant \alpha \frac{m+1}{q}.$$

Оскільки $\alpha > 1$ є довільним, отримаємо

$$\varrho[f] \leqslant \frac{m+1}{q}.$$

Цитована література

1. *Kilbas A. A., Rivero M., Rodriguez-Germá L., Trujillo J. J.* α-Analytic solutions of some linear fractional differential equations with variable coefficients // Appl. Math. Comput. – 2007. – **187** – P. 239–249.
2. *Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J.* Theory and Applications of Fractional Differential Equations. – Amsterdam: Elsevier, 2006. – 540 p.
3. *Kochubei A. N.* Fractional differential equations: α-entire solutions, regular and irregular singularities // Fract. Calc. Appl. Anal. – 2009. – **12**, No 2. – P. 135–158.
4. *Wittich H.* Neuere Untersuchungen über eindeutige analytische Funktionen. – 2nd ed. – Berlin: Springer, 1968. – 166 p.
5. *Chyzhykov I., Gundersen G. G., Heittokangas J.* Linear differential equations and logarithmic derivative estimates // Proc. London Math. Soc. – 2003. – **86**, Iss. 3. – P. 735–754.
6. *Laine I.* Nevanlinna Theory and Complex Differential Equations. – Berlin: Walter de Gruyter, 1993. – 342 p.
7. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.
8. *Джрбашян М. М.*. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. – Москва: Наука, 1966. – 671 с.
9. *Sheremeta M. M.* Analytic functions of bounded l-index. – Lviv: VNTL Publ., 1999. – 142 p. – (Mathematical Studies: Monograph Series; Vol. 6).
10. *Hayman W. K.* The local growth of power series: a survey of the Wiman–Valiron method // Canad. Math. Bull. – 1974. – **17**, No 3. – P. 317–358.
11. *Chyzhykov I. E., Semochko N.S.* Generalization of the Wiman–Valiron method for fractional derivatives // Int. J. Appl. Math. – 2016. – **29**, No 2. – P. 19–30.

References

1. *Kilbas A. A., Rivero M., Rodriguez-Germá L., Trujillo J. J.* Appl. Math. Comput., 2007, **187**: 239–249.
2. *Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J.* Theory and Applications of Fractional Differential Equations, Amsterdam: Elsevier, 2006.
3. *Kochubei A. N.* Fract. Calc. Appl. Anal., 2009, **12**, No 2: 135–158.
4. *Wittich H.* Neuere Untersuchungen über eindeutige analytische Funktionen, 2nd ed., Berlin: Springer, 1968.
5. *Chyzhykov I., Gundersen G. G., Heittokangas J.* Proc. London Math. Soc., 2003, **86**, Iss. 3: 735–754.
6. *Laine I.* Nevanlinna Theory and Complex Differential Equations, Berlin: Walter de Gruyter, 1993.
7. *Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I.* Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications, New York: Gordon and Brach, 1993.
8. *Djrbashian M. M.* Integral transformations and representations of functions in a complex domain, Moscow: Nauka, 1966 (in Russian).
9. *Sheremeta M. M.* Analytic functions of bounded l-index, Mathematical Studies: Monograph Series, Vol. 6, Lviv: VNTL, 1999.
10. *Hayman W. K.* Canad. Math. Bull., 1974, **17**, No 3: 317–358.
11. *Chyzhykov I. E., Semochko N.S.* Int. J. Appl. Math., 2016, **29**, No 2: 19–30.

Надійшло до редакції 20.11.2015

Н. С. Семочко, И. Э. Чижиков

Львовский национальный университет им. Ивана Франко

E-mail: semochkons@ukr.net, chyzhykov@yahoo.com

Рост решений дробных дифференциальных уравнений

Доказано существование и единственность решения некоторого дробного дифференциального уравнения. С помощью метода Вимана–Валирона найден порядок роста решения.

Ключевые слова: дробная производная, дифференциальное уравнение, целая функция, метод Вимана–Валирона.

N. S. Semochko, I. E. Chyzhykov

Ivan Franko National University of Lviv

E-mail: semochkons@ukr.net, chyzhykov@yahoo.com

Growth of solutions of fractional differential equations

We prove the existence and uniqueness of a solution of some fractional differential equation. With the aid of the Wiman–Valiron method, the order of growth for the solution is found as well.

Keywords: fractional derivative, differential equation, entire function, Wiman–Valiron method.