

23. *Мирсалимов В. М.* Решение задачи о частичном контактировании берегов щели переменной ширины под действием температурного поля / В. М. Мирсалимов, А. Б. Мустафаев // Физико-хим. механика материалов. – 2015. – Т. 51, № 1. – С. 86–92.
24. *Mirsalimov V. M.* A contact problem on partial interaction of faces of a variable thickness slot under the influence of temperature field / V. M. Mirsalimov, A. B. Mustafayev // *Mechanika*. – 2015. – Vol. 21. – P. 19–22.
25. *Мир-Салим-заде М. В.* Периодическая контактная задача для стрингерной пластины / М. В. Мир-Салим-заде // Тяжелое машиностроение. – 2015. – № 6. – С. 37–42.
26. *Мир-Салим-заде М. В.* Закрытие щели, исходящей из контура кругового отверстия в стрингерной пластине / М. В. Мир-Салим-заде // Вестн. Чуваш. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния. – 2016. – № 1(27). – С. 78–89.
27. *Mirsalimov V. M.* Simulation of partial closure of a variable width slot with interfacial bonds in end zones in an isotropic medium / V. M. Mirsalimov // *Int. J. Damage Mech.* – 2016. – Vol. 25. – P. 266–279.
28. *Мир-Салим-заде М. В.* Частичный контакт берегов щели переменной ширины в подкрепленной стрингерами пластине / М. В. Мир-Салим-заде // Физико-хим. механика материалов. – 2016. – Т. 52, № 3. – С. 29–34.
29. *Мирсалимов В. М.* Закрытие криволинейной трещины в листовом элементе под действием температурного поля / В. М. Мирсалимов, А. Б. Мустафаев // Пробл. машиностроения. – 2016. – Т. 19, № 4. – С. 36–43.
30. *Мирсалимов В. М.* Контактная задача о взаимодействии берегов щели переменной ширины с концевыми зонами пластических деформаций / В. М. Мирсалимов // Вестн. Чуваш. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния. – 2016. – № 2(28). – С. 23–33.
31. *Mirsalimov V. M.* Inhibition of a curvilinear bridged crack by induced thermoelastic stress field / V. M. Mirsalimov, A. B. Mustafayev // *J. Thermal Stresses*. – 2016. – Vol. 39. – P. 1301–1319.
32. *Мустафаев А. Б.* Замедление роста щели переменной ширины под действием температурного поля / А. Б. Мустафаев // Прикл. механика и техн. физика. – 2017. – Т. 58, № 1. – С. 168–176.
33. *Mirsalimov V. M.* A contact problem for a plane weakened by a periodic system of variable width slots / V. M. Mirsalimov // *Mathematics and Mechanics Solids*. – 2017. – DOI: <https://doi.org/10.1177/1081286516680863>.
34. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мусхелишвили. – М.: Наука, 1966. – 707 с.

Поступила в редакцию 07.04.17

**О. Ф. Полищук**, канд. техн. наук  
**К. В. Аврамов**, д-р техн. наук  
**К. Б. Мягкохлеб**, канд. техн. наук

Институт проблем машиностроения  
 им. А. Н. Подгорного НАН  
 Украины, г. Харьков, e-mail:  
 polishchuk@ipmach.kharkov.ua,  
 kavramov@ipmach.kharkov.ua,  
 mkb@ipmach.kharkov.ua

**Ключові слова:** вимушені нелінійні коливання, стрижень, тріщина.

УДК 539.3

## ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ВЫНУЖДЕННЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ СТЕРЖНЕЙ С ПОПЕРЕЧНЫМИ ДЫШАЩИМИ ТРЕЩИНАМИ

*Експериментально досліджуються вимушені коливання стрижнів з поперечними тріщинами великої глибини, що дихають. Коливання стрижнів збуджуються кінематичним рухом закладення, що відтворюється за допомогою вібростенда. Результати аналізу коливань зображені на амплітудно-частотній характеристиці. Аналізуються Фур'є спектри періодичних коливань. Досліджуються області багатозначності коливань.*

### Введение

Наличие трещин является одной из наиболее распространенных причин разрушения конструкций. Для того чтобы избежать этих разрушений, проводятся исследования для разработки диагностических критериев появления трещин. Параметры нелинейных колебаний конструкций чрезвычайно чувствительны к образованию дышащих трещин, поэтому могут использоваться в качестве диагностических критериев при образовании трещин. Много усилий предпринято для исследования не-

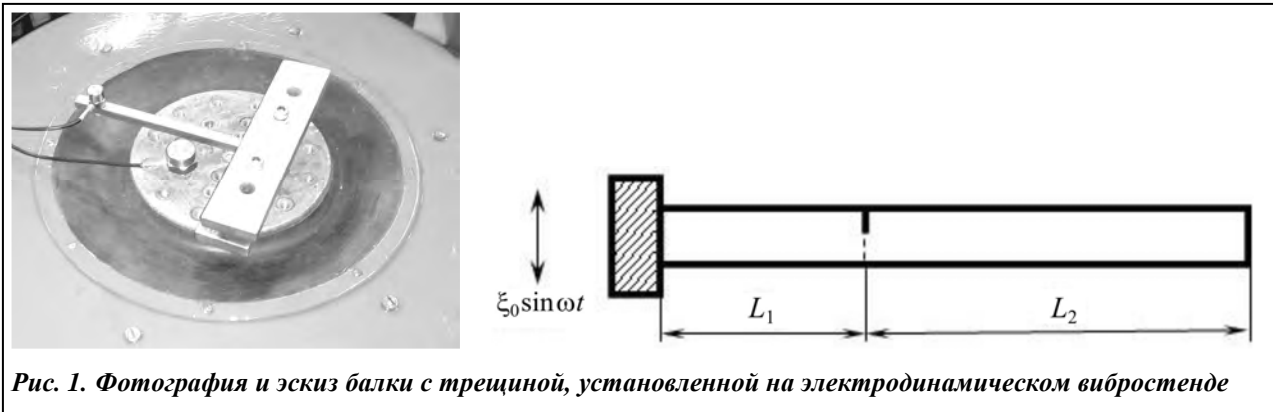
© О. Ф. Полищук, К. В. Аврамов, К. Б. Мягкохлеб, 2017

линейных колебаний стержней с дышащими трещинами. Свойства колебаний стержневых конструкций с трещинами подробно описываются в обзорной статье [1]. В статье [2] показывается, что с ростом трещины увеличивается коэффициент линейного демпфирования системы. В работе [3] исследуются спектральные плотности колебаний балки с дышащей трещиной. В статье [4] представлены амплитудно-частотные характеристики балки с трещиной. Подчеркнем, что областей многозначности колебаний не было обнаружено экспериментально. В статье [5] экспериментально показано, что декремент колебаний существенно зависит от глубины дышащей трещины. Утверждается, что величина декремента, в основном, обусловлена величиной упруго-пластической области. В работе [6] экспериментально установлено, что коэффициент трения зависит от глубины трещины. В статье [7] рассматриваются механизмы нелинейного поведения трещины при ее дышании. Для получения трещины в образце предлагается следующий подход [8]. Стержень крепится к платформе вибростенда. Он колеблется до тех пор, пока в нем не образуется трещина нужных размеров. В статье [9] экспериментально исследуются собственные частоты стержня с поперечной трещиной. В работе [10] трещина моделировалась механическим разрезом образца. В этой статье экспериментально исследуется влияние глубины трещины на собственные частоты колебаний конструкции. Для возбуждения колебаний балки с трещиной в работе [11] используется вибростенд. Анализуются спектральные плотности колебаний балки с трещиной. В статье [12] приводится обзор экспериментальных и теоретических работ по исследованию колебаний балок с трещинами.

В данной статье экспериментально исследуется влияние дышащих поперечных трещин на свойства нелинейных вынужденных изгибных колебаний стержней. Подчеркнем, что рассматриваются конструкции с глубокими трещинами. Для балок с глубокими трещинами получены амплитудно-частотные характеристики, в которых наблюдаются области гистерезиса колебаний. Исследуются спектры Фурье периодических нелинейных колебаний.

#### Методика проведения эксперимента

Целью настоящей статьи является исследование вынужденных изгибных колебаний стержней с поперечной дышащей трещиной. Изгибные колебания стержней возбуждаются кинематическим движением заделки. Такие движения обеспечиваются электродинамическим вибростендом. Фотография и эскиз балки на вибростенде представлены на рис. 1. Принципиальная схема электродинамического вибростенда, на котором крепится консольная балка, дана на рис. 2.



На платформе электродинамического вибростенда модели ST 5000/300 установлен испытуемый стержень с квадратным поперечным сечением. Стержень изготовлен из конструкционной стали марки 3, имеет квадратное поперечное сечение 10×10 мм. Образец располагается горизонтально. Один конец стержня жестко защемлен на платформе вибростенда с помощью специального устройства, второй – свободен. На свободном конце стержня установлен пьезоэлектрический вибродатчик, с помощью которого измеряются виброускорения колебаний. В процессе эксперимента на платформе электродинамического вибростенда воспроизводилась вибрация с заданным значением виброускорения, которое контролировалось виброметром с использованием вибродатчика, установленного на платформе вибростенда. Значение виброускорения на платформе вибростенда поддержива-

лось постійним. Вибростенд воспроизводил моногармонические вибрации, частота колебаний которых задавалась дискретными значениями (квазистатически). Для изменения дискретного значения частоты в вибростенд включена система управления. Электрическая обмотка (рис. 2) постоянного электромагнита питается от источника постоянного тока, обмотка переменного тока - от генератора сигналов. Частота воспроизводимых моногармонических вибраций измеряется частотомером, входящим в систему управления.

Сначала в бездефектной балке необходимо получить дышащую трещину. Для этого балку без трещины (рис. 2) при помощи специального приспособления крепили к платформе электродинамического вибровозбудителя. Эта платформа совершала моногармонические движения и тем самым возбуждала колебания

стержня. В результате длительных вынужденных колебаний в балке возникла дышащая трещина. Затем балка с дышащей трещиной использовалась для экспериментального анализа нелинейных колебаний. Из большого числа таких балок с образовавшимися трещинами выбиралась балка с поперечной трещиной постоянной глубины.

При проведении первых измерений вынужденных колебаний на конце балки крепились два вибродатчика для измерения изгибных колебаний в двух перпендикулярных плоскостях. Как показали измерения, амплитуды изгибных колебаний в плоскости возбуждаемых колебаний (рис. 2) значительно больше колебаний в перпендикулярной плоскости. Поэтому можно считать, что колебания происходят только в этой плоскости.

В результате экспериментального анализа вынужденных колебаний строились амплитудно-частотные характеристики колебаний виброускорения конца консольного стержня с трещиной. Проводился анализ Фурье спектра периодических колебаний виброускорений и экспериментальный анализ амплитудно-частотных характеристик для различных геометрических размеров стержней.

Для исследования неоднозначности нелинейных колебаний проводилось два эксперимента. Сначала исследуемый частотный диапазон воспроизводился с квазистатическим увеличением частоты возбуждаемых колебаний. На каждой частоте записывались установившиеся вынужденные колебания. Полученные амплитуды колебаний на амплитудно-частотной характеристике обозначались через  $A_{inc}$ . Потом этот же частотный диапазон исследовался с квазистатическим уменьшением частоты возбуждаемых колебаний. Полученные движения обозначались через  $A_{dec}$ .

### Результаты анализа вынужденных колебаний

Модель исследуемого консольного стержня представлена на рис. 1. На расстоянии  $L_1$  от левого конца стержня расположена поперечная трещина глубиной  $d$ . Общая длина стержня  $L = L_1 + L_2$ . Глубина трещины 5 мм. Подчеркнем, что нами рассматривается балка с большой трещиной, которая занимает половину поперечного сечения конструкции. При проведении экспериментального анализа величина  $L_2$  была постоянной и равнялась 102 мм, а величина  $L_1$  принимала значение, равное 15 мм.

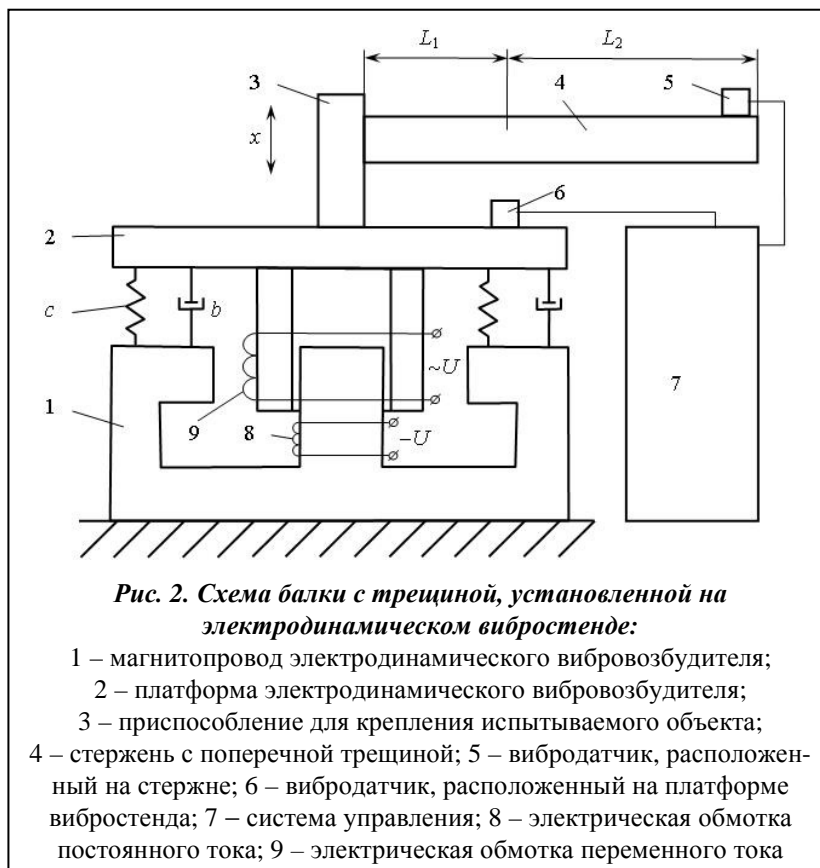


Рис. 2. Схема балки с трещиной, установленной на электродинамическом вибростенде:

- 1 – магнитопровод электродинамического вибровозбудителя;
- 2 – платформа электродинамического вибровозбудителя;
- 3 – приспособление для крепления испытываемого объекта;
- 4 – стержень с поперечной трещиной; 5 – вибродатчик, расположенный на стержне; 6 – вибродатчик, расположенный на платформе вибростенда; 7 – система управления; 8 – электрическая обмотка постоянного тока; 9 – электрическая обмотка переменного тока

При исследовании вынужденных колебаний стержня они возбуждались поперечным кинематическим движением заделки по гармоническому закону  $y = y_0 \sin \Omega t$ . Амплитуда виброускорения  $A$  на платформе вибростенда при исследовании колебаний в некотором частотном диапазоне поддерживалась постоянной. Она рассчитывается по формуле  $A = y_0 \Omega^2$ . Эта величина  $A$  остается постоянной в процессе эксперимента. Она принималась равной  $20 \text{ м/с}^2$ . Итак, если частота колебаний вибростенда повышалась, амплитуда его колебаний  $y_0$  уменьшалась.

Амплитудно-частотная характеристика вынужденных колебаний стержня представлена на рис. 3. Все исследуемые колебания были периодическими. На рис. 3 по оси ординат показывается максимальное значение виброускорения свободного конца балки за период колебания, а по оси абсцисс – частота возбуждения колебаний.

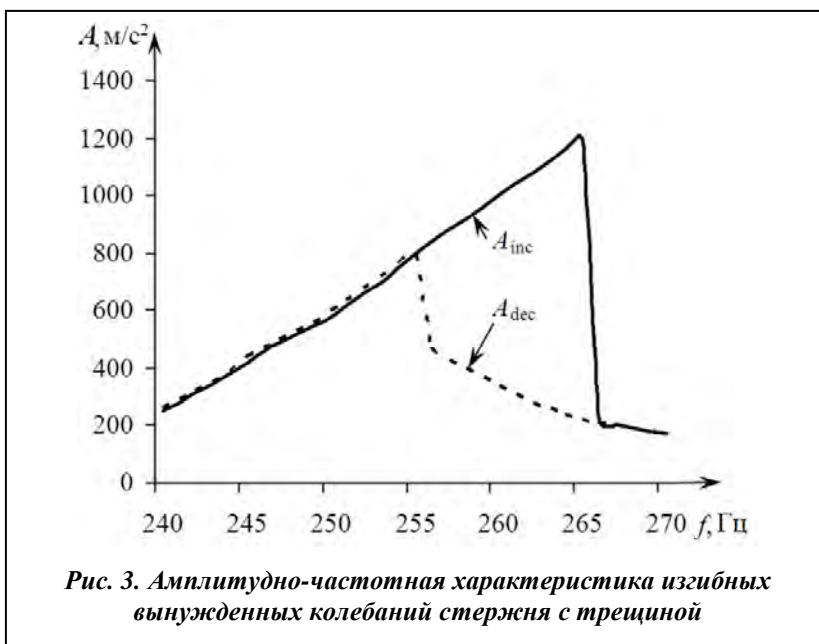


Рис. 3. Амплитудно-частотная характеристика изгибных вынужденных колебаний стержня с трещиной

В точке максимальных амплитуд виброускорений амплитуда колебаний составляет  $4,27 \cdot 10^{-4} \text{ м}$ . Такая величина значительно меньше стороны поперечного сечения квадратного стержня. Поэтому геометрическая нелинейность не наблюдается в конструкции и нелинейное динамическое поведение стержня определяется только процессами дыхания трещины.

Первая собственная частота колебаний бездефектного стержня была получена экспериментально. Она равняется  $350 \text{ Гц}$ . Как следует из амплитудно-частотной характеристики (рис. 3), вследствие нелинейного дыхания трещины частотный

диапазон резонансных колебаний существенно снижается. Такое существенное снижение частотного диапазона объясняется значительной глубиной поперечной трещины. При квазистатическом увеличении частоты возбуждения в диапазоне (рис. 3) и при квазистатическом уменьшении частот возбуждения наблюдается гистерезис установившихся периодических колебаний, другими словами, многозначность установившихся колебаний. Эта многозначность имеет место в частотном диапазоне  $255 \div 266 \text{ Гц}$ .

Перед исследованием колебаний балки с трещиной, представленных на рис. 3, проводился анализ линейных вынужденных колебаний, то есть исследовались колебания бездефектной балки. Нами была получена амплитудно-частотная характеристика, описывающая линейные колебания конструкции.

Подчеркнем, что резонансные колебания (рис. 3) являются полигармоническими. Так, вынужденные колебания с большими амплитудами при частоте возбуждения колебаний  $266 \text{ Гц}$  имеют четыре гармоники ряда Фурье. Амплитуды гармоник виброускорений,  $(\text{м/с}^2)$   $A_1 = 1100$ ,  $A_2 = 132$ ,  $A_3 = 92$ ,  $A_4 = 32$ .

Далее нами исследовалось влияние амплитуды виброускорения кинематического возбуждения на установившиеся периодические колебания в области исследуемого резонанса (рис. 3). Эксперименты проводились с тремя значениями виброускорений платформы,  $(\text{м/с}^2)$   $A = 10$ ;  $20$ ;  $30$ .

Результаты экспериментального анализа установившихся колебаний конца консольного стержня представлены на рис. 4. По оси ординат показаны максимальные значения виброускорения, а по оси абсцисс – частота кинематического возбуждения. Кривые обозначены  $A_{\text{inc}}$  и  $A_{\text{dec}}$ , что указывает способ получения кривой при квазистатическом увеличении или уменьшении частоты возбуждения

колебаний. Около кривой показана величина виброускорения кинематического возбуждения заделки. Кривая, полученная при виброускорении кинематического возбуждения заделки, равном  $20 \text{ м/с}^2$ , представлена на рис. 3.

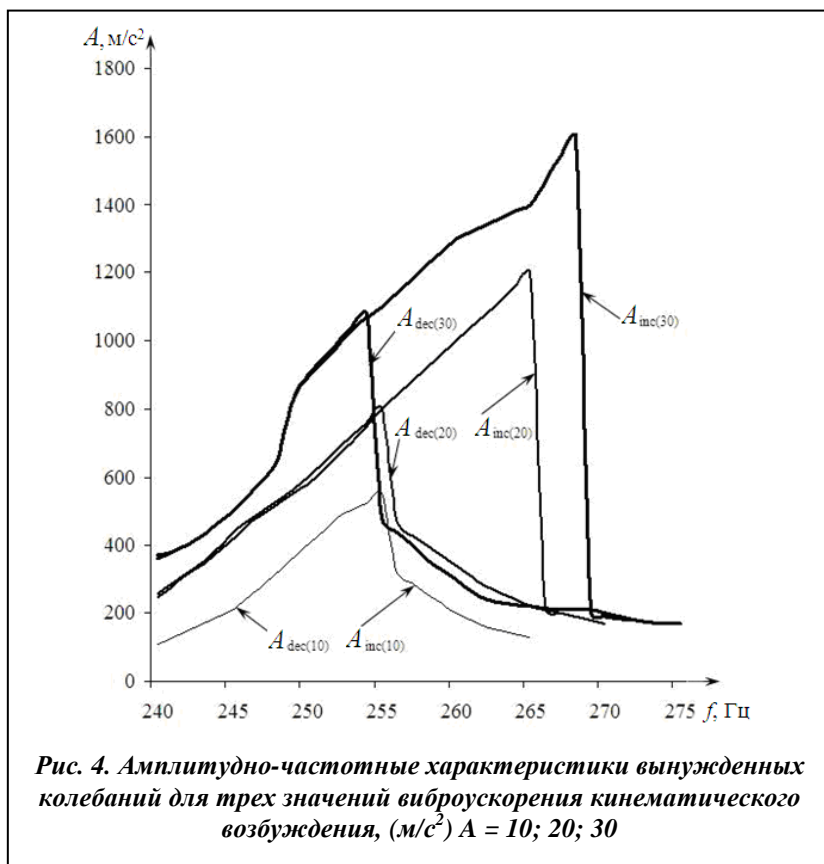


Рис. 4. Амплитудно-частотные характеристики вынужденных колебаний для трех значений виброускорения кинематического возбуждения, ( $\text{м/с}^2$ )  $A = 10; 20; 30$

предыдущих экспериментах  $L_1 = 15 \text{ мм}$ ,  $L_2 = 166 \text{ мм}$ . Колебания заделки были моногармоническими с постоянным виброускорением  $20 \text{ м/с}^2$ . Амплитудно-частотная характеристика периодических колебаний конца консольного стержня с трещиной показана на рис. 5. Первая собственная частота изгибных колебаний этого стержня без трещины, полученная экспериментально, составляет  $202 \text{ Гц}$ . Существенное уменьшение резонансных частот (рис. 5) связано с дышанием трещины большой глубины.

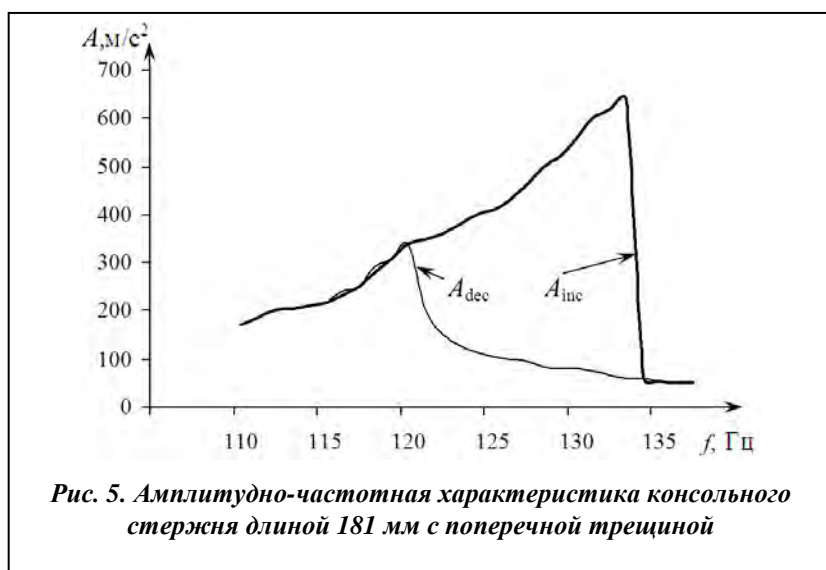


Рис. 5. Амплитудно-частотная характеристика консольного стержня длиной  $181 \text{ мм}$  с поперечной трещиной

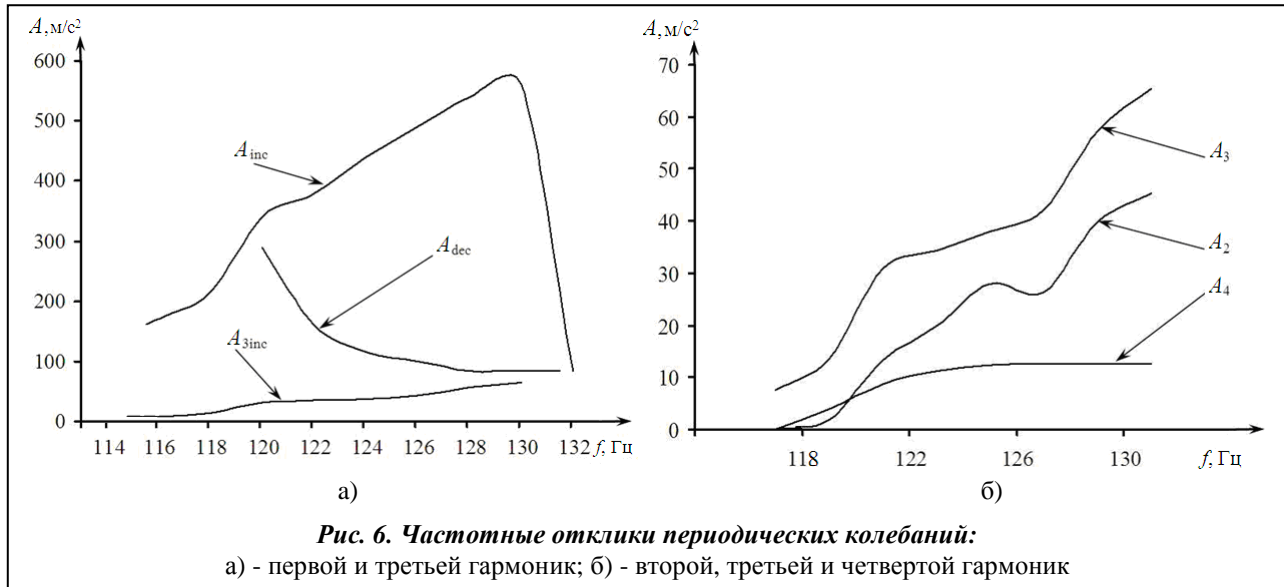
Подчеркнем, что колебания, возбуждаемые кинематическим движением заделки с виброускорением  $A = 10 \text{ м/с}^2$ , не имеют области гистерезиса, так как амплитудно-частотные характеристики при квазистатическом увеличении и уменьшении частоты возбуждения совпадают. При виброускорениях  $A = 20 \text{ м/с}^2$  и  $A = 30 \text{ м/с}^2$  наблюдается гистерезис нелинейных колебаний. Необходимо отметить, что при увеличении виброускорения кинематического возбуждения заделки частотный диапазон, в котором наблюдается гистерезис, тоже увеличивается. При  $A = 20 \text{ м/с}^2$  и  $A = 30 \text{ м/с}^2$  частотные диапазоны гистерезиса колебаний таковы:  $256 \div 265$  и  $256 \div 269 \text{ Гц}$ .

Далее проводилась еще одна серия экспериментов для стержня большей длины. Размеры поперечного сечения и глубина трещины были такими же, как и в

Периодические колебания (рис. 5) являются полигармоническими. В ряде Фурье этих колебаний присутствуют гармоники вплоть до четвертой. Нами проводился анализ амплитуд гармоник ряда Фурье колебаний конца консольного стержня с трещиной при помощи анализатора спектров. Таким образом, была исследована качественная картина спектрального состава.

Результаты спектрального анализа колебаний показаны на рис. 6. На рис. 6, а изображены величины первой и третьей гармоник ряда Фурье. Подчеркнем, что первая и третья гармоника

показаны для случая квазистатического увеличения частоты возбуждения колебаний. Срыв колебаний на левом рисунке указывается только для первой гармоники ряда Фурье. После срыва исследуются колебания при квазистатическом уменьшении частоты возбуждения колебаний. Первая гармоника таких колебаний также показана на рис. 6, а. Амплитуды вторых, третьих и четвертых гармоник периодических колебаний представлены на рис. 6, б.



## Выводы

Экспериментально исследованы вынужденные изгибные колебания балок с одной поперечной трещиной. Колебания балки возбуждались кинематическим движением заделки. Рассмотрены глубокие трещины, которые занимают половину поперечного сечения балки. Экспериментальному анализу подвергались области первых основных резонансов колебаний конструкций. В этих областях исследованы частотные диапазоны многозначности установившихся периодических колебаний. Резонансные установившиеся колебания конца стержня являются полигармоническими. В спектре ряда Фурье таких колебаний содержится четыре ненулевых гармоники.

Экспериментально исследованы изгибные резонансные колебания вертикально расположенного консольного стержня. Колебания стержня возбуждаются моногармоническим вертикальным движением заделки. Исследованы резонансные полигармонические колебания конца стержня. Подчеркнем, что многозначности установившихся периодических колебаний не обнаружено.

## Литература

1. Bovsunovsky, A. Non-linearities in the vibrations of elastic structures with a closing crack: A state of the art review / A. Bovsunovsky, C. Surace // *Mech. Systems and Signal Proc.* – 2015. – № 10. – P. 129–148.
2. Bovsunovskii, A. P. Application of non-linear resonances for the diagnostics of closing cracks in rod like elements / A. P. Bovsunovskii, O. A. Bovsunovskii // *Strength Mater.* – 2010. – № 42 (3). – P. 331–343.
3. Andreaus, U. Experimental damage detection of cracked beams by using non-linear characteristics of forced response / U. Andreaus, P. Baragatti // *Mech. Systems and Signal Proc.* – 2012. – № 31. – P. 382–404.
4. Andreaus, U. Fatigue crack growth, free vibrations, and breathing crack detection of aluminium alloy and steel beams / U. Andreaus, P. Baragatti // *J. Strain Analysis.* – 2009. – Vol. 44. – P. 595–608.
5. Bovsunovsky, A. P. The mechanisms of energy dissipation in the non-propagating fatigue cracks in metallic materials / A. P. Bovsunovsky // *Eng. Fracture Mech.* – 2004. – Vol. 71. – P. 2271–2281.
6. Zhang, W. Closure effects on fatigue crack detection / W. Zhang, R. Testa // *J. Eng. Mech.* – 1999. – № 125(10). – P. 1125–1132.
7. Free-vibration behavior of a cracked cantilever beam and crack detection / F. Ledonard, J. Lanteigne. S. Lalonde, Y. Turcotte // *Mech. Systems and Signal Proc.* – 2001. – № 15(3). – P. 529–548.
8. Chondros, T. G. The continuous crack flexibility model for crack identification / T. G. Chondros // *Fatigue Fracture Eng. Material Structure.* – 2001. – Vol. 24. – P. 643–650.

9. *Montalvao E Silva J. M.* Experimental dynamic analysis of cracked free-free beams / J. M. Montalvao E Silva, A. J. M. Araujo Gomes // *Experimental Mech.* – 1990. – Vol. 30. – P. 20–25.
10. *Gudmundson, P.* The dynamic of slender structures with cross-sectional crack / P. Gudmundson // *J. Mech. and Physics of Solids.* – 1983. – № 4 (31). – P. 329–345.
11. *Peng, Z. K.* Crack detection using nonlinear output frequency response functions / Z. K. Peng, Z. Q. Lang, S. A. Billings // *J. Sound and Vibration.* – 2007. – Vol. 301. – P. 777–788.
12. *Dimarogonas, A. D.* Vibration of cracked structures: a state of the art review / A. D. Dimarogonas // *Eng. Fracture Mech.* – 1996. – № 5 (55). – P. 831–857.

*Поступила в редакцію 23.03.17*

**S. A Morhun, PhD**

National university of shipbuilding named after admiral Makarov, Nikolaev

**Ключові слова:** тривимірні скінченні елементи, вал, втулка, поля переміщень та температур, зазор, натяг.

УДК 539.3

## IMPROVING THE MATHEMATICAL MODELS APPLIED FOR THE SOLUTION OF SOLID ASSEMBLY CONSTRUCTIONS THERMOELASTICITY PROBLEM

*Викладено методику побудови уточненої скінченно-елементної математичної моделі збірних конструкцій типу «вал» – «втулка», що мають значне розповсюдження в енергомашинобудуванні. З використанням розроблених тривимірних скінченних елементів розв'язано контактну термопружну задачу для даного типу з'єднань. Отримано поле розподілу переміщень на торцевих контактуючих поверхнях валу та втулки, а також поле розподілу температур в з'єднанні.*

### Introduction

The working process of attached solid constructions like shaft and sleeve subassemblies that are used in modern turbines is steadily influenced by various mechanical and thermal effects of high intense. This fact causes a connection between changes of the matched solid bodies mechanical contact and a heat flow through their surfaces. Especially important this correlation is for details of gas turbine engines due to their extremely hard working process.

It should be noticed that the main conditions of contact conjugation between the details in such types of subassemblies always change sharply for every type of mechanism's working state [1]. Firstly, the shaft and sleeve subassemblies are fitted with a gap or negative allowances before the start of working process. This means that each pair of contacting surfaces has its own definite conjugation conditions. But during the working process the conjugation conditions can rapidly change. Therefore we can observe the changes of heat flow parameters on the shaft and sleeve contacting surfaces [2]. So a mathematical model used for such subassemblies thermoelasticity problem solution needs to take into consideration all these changes on the details contacting surfaces that also cause the variations of temperature and displacement fields on the aforementioned surfaces.

There are two main approaches that are used for the solution of contact problems for deformable solids by a finite elements method (FEM). The main idea of the first approach is to use the contact layer of definite thermal conductivity, that is located among the solid bodies contacting surfaces. The finite elements model of the contact layer is based on finite elements similar to the elements of the solid bodies. But the thermo conductivity features of the layer elements are different from the features of solid bodies' elements [1]. This approach is rather useful, but its application to the thermoelasticity problems solution of real assemblies and subassemblies is inconvenient, because it's extremely hard to calculate the layer's deformation caused by the thermal gradient on the contacting surfaces. The second main approach is to use the definite function, that distinctly determines the dependences between the heat flux and displacements of finite elements nodes located on the contacting surfaces [3–6]. The foregoing problems solution could be obtained

© S. A Morhun, 2017