

УДК 519.876.5

МЕТОД ФОРМУВАННЯ ОПТИМАЛЬНОГО «НАСИЧЕНОГО БЛОКУ» У ЗАДАЧІ ЛОКАЛІЗАЦІЇ РОЗВ'ЯЗКІВ ІНТЕРВАЛЬНОЇ СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРИЧНИХ РІВНЯНЬ

М.П. Дивак, І.С. Олійник

Тернопільський національний економічний університет

mdy@tneu.edu.ua, ois@tneu.edu.ua

Запропоновано новий метод формування набору базових рівнянь у задачі локалізації розв'язків інтервальної системи лінійних алгебричних рівнянь (ІСЛАР) на основі «насиченого блоку», який ґрунтується на розв'язуванні оптимізаційної задачі. За критерій обрано мінімізацію максимальної похибки прогнозування інтервальними моделями, параметри яких належать області локалізації розв'язків ІСЛАР. Досліджено властивості запропонованого методу. Показано його ефективність та переваги (з точки зору обчислювальної складності та збіжності), у порівнянні з методами формування набору базових рівнянь, що базуються на плануванні інтервальних експериментів.

Ключові слова: ідентифікація, інтервальний аналіз, локалізація розв'язків, еліпсоїдне оцінювання, «насичений блок» інтервальної системи лінійних алгебричних рівнянь.

A new method formation of the set of basic equations in the problem of localization the solutions of interval systems of linear algebraic equations (ISLAE) on the basis of the "saturated block", which is based on the solution of the optimization problem. The criterion chosen to minimize the maximum error of prediction interval models, whose parameters belong to the area of localization of solutions ISLAE. We investigated the properties of the proposed method. Shown its effectiveness and benefits (from the point of view of computational complexity and convergence), in comparison with the methods forming the set of basic equations based on the planning interval of the experiments..

Keywords: identification, interval analysis, localization solutions, ellipsoid estimation, "saturated block" of interval system of linear algebraic equations.

Предложен новый метод формирования набора базовых уравнений в задаче локализации решений интервальной системы линейных алгебраических уравнений (ИСЛАУ) на основе «насыщенного блока», который основывается на решении оптимизационной задачи. За критерий выбрано минимизацию максимальной погрешности прогнозирования интервальными моделями, параметры которых принадлежат области локализации решений ИСЛАУ. Исследованы свойства предложенного метода. Показаны его эффективность и преимущества (с точки зрения вычислительной сложности и сходимости), в сравнении с методами формирования набора базовых уравнений, базирующихся на планированию интервальных экспериментов.

Ключевые слова: идентификация, интервальное оценивание, локализация решений, эллипсоидное оценивание, «насыщенный блок» интервальной системы линейных алгебраических уравнений.

Вступ. Задачу ідентифікації параметрів моделей статичних систем на основі інтервальних даних переважно формулюють у вигляді задачі розв'язування інтервальної системи лінійних алгебричних рівнянь (ІСЛАР) [13,16]. Розв'язками цієї задачі є множина оцінок параметрів статичної системи, або її деяка наближена гарантована (зовнішня) локалізаційна оцінка [2,5-6,14]. Серед ряду існуючих методів локалізації ІСЛАР, виділяють метод, який передбачає вибір із ІСЛАР з m невідомими m – інтервальних рівнянь, тобто «насиченого блоку», які називають базовими. На основі вибраних базових рівнянь конструюють локалізаційну область розв'язків усієї ІСЛАР [3,5-6]. У роботі [3] наведено детальний алгоритм реалізації вище зазначеного методу і відзначено, що вибір «насиченого блоку» з ІСЛАР, який забезпечить оптимальні множинні оцінки параметрів статичної системи, є складною обчислювальною задачею з комбінаторною складністю [3,13].

Зважаючи на зазначене вище, завданням даної праці є теоретичне обґрунтування та розробка простішого методу формування такого «насиченого блоку» (набору з m базових рівнянь) з ІСЛАР, який би забезпечував високу точність параметрів інтервальної моделі та задовільні її прогностичні властивості.

1. Постановка задачі

Нехай залежність між «виходом» та «входами» для деякої статичної системи має вигляд алгебричного рівняння:

$$y_0 = \beta_1 \cdot \varphi_1(\vec{x}) + \dots + \beta_m \cdot \varphi_m(\vec{x}), \quad (1)$$

де y_0 - істинне невідоме значення «виходу» системи; $\vec{x} \in R^m$ - вектор вхідних змінних; $\vec{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_m)^T$ - вектор невідомих параметрів, $\vec{\varphi}^T(\vec{x}) = (\varphi_1(\vec{x}), \dots, \varphi_m(\vec{x}))^T$ - вектор відомих базисних функцій.

Представимо результати спостережень за «входами» та «виходами» у вигляді матриці значень вхідних змінних X та вектором інтервалів значень для вихідної змінної $[\vec{Y}]$, тобто у такому вигляді:

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} \cdots x_{1n} \\ \vdots \\ x_{i1} \cdots x_{in} \\ \vdots \\ x_{N1} \cdots x_{Nn} \end{pmatrix}; [\vec{Y}] = \begin{pmatrix} [y_1^-; y_1^+] \\ \vdots \\ [y_i^-; y_i^+] \\ \vdots \\ [y_N^-; y_N^+] \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Припустимо також, що істинне невідоме значення виходу y_0 для кожного із N спостережень знаходиться в інтервалах:

$$y_i^- \leq y_{0i} \leq y_i^+, i = 1, \dots, N. \quad (3)$$

Спираючись на умови представлені виразами (1-3), для оцінювання вектора невідомих параметрів $\vec{\beta}$ отримуємо ІСЛАР:

$$\begin{cases} y_1^- \leq b_1 \varphi_1(\bar{x}_1) + \dots + b_m \varphi_m(\bar{x}_1) \leq y_1^+ \\ \vdots \\ y_i^- \leq b_1 \varphi_1(\bar{x}_i) + \dots + b_m \varphi_m(\bar{x}_i) \leq y_i^+ \\ \vdots \\ y_N^- \leq b_1 \varphi_1(\bar{x}_N) + \dots + b_m \varphi_m(\bar{x}_N) \leq y_N^+ \end{cases} \quad (4)$$

Розв'язком ІСЛАР (4) є множина Ω :

$$\Omega = \left\{ \vec{b} \in R^m \mid \vec{Y}^- \leq F \cdot \vec{b} \leq \vec{Y}^+ \right\}, \quad (5)$$

де $F = \{ \vec{\varphi}_j^T(\bar{x}_i), i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, m \}$ - відома матриця значень базисних функцій, $\vec{Y}^- = \{ y_i^-, i = 1, \dots, N \}$ та $\vec{Y}^+ = \{ y_i^+, i = 1, \dots, N \}$ - вектори, сформовані з верхніх та нижніх меж інтервалів $[y_i^-, y_i^+]$.

Із ІСЛАР (4), якщо вона є не виродженою, бачимо, що геометрично її область розв'язків є опуклим многогранником [3,16].

Обравши будь-який вектор $\vec{b} \in \Omega$, отримуємо математичну модель статичної системи у вигляді:

$$\hat{y}(\bar{x}) = \vec{\varphi}^T(\bar{x}) \cdot \vec{b} \quad (6)$$

Усі розв'язки з множини Ω породжують множину рівнозначних моделей, яку в інтервальному аналізі називають інтервальними моделями. При цьому всі інтервальні моделі статичної системи належать такій множині (коридору) [3,13,16]:

$$[\hat{y}(x)] = [\hat{y}^-(x); \hat{y}^+(x)], \quad (7)$$

де $\hat{y}^-(\bar{x}) = \min_{\vec{b} \in \Omega} (\vec{\varphi}^T(\bar{x}) \cdot \vec{b})$, $\hat{y}^+(\bar{x}) = \max_{\vec{b} \in \Omega} (\vec{\varphi}^T(\bar{x}) \cdot \vec{b})$ - нижня та верхня межі функціонального коридору, відповідно.

Зважаючи на спосіб представлення коридору інтервальних моделей, а також на вирази для представлення його нижньої та верхньої межі, можемо стверджувати, що властивості області розв'язків ІСЛАР чи їх локалізації безпосередньо визначають властивості функціонального коридору (7) інтервальних моделей. Зокрема, відомо, якщо використати локалізацію області розв'язків ІСЛАР (4) у вигляді «насиченого блоку», то вона матиме вигляд паралелотопа, який, як відомо, є геометричною фігурою з $2m$ вершинами і m -попарно паралельними гранями [2,5-6,14]. Такий спосіб локалізації області розв'язків ІСЛАР має ряд переваг у порівнянні з іншими. Зокрема, встановлено аналітичний зв'язок між зазначеною областю локалізації та її гарантованою оптимальною еліпсоїдною оцінкою [5-6,14]:

$$Q_m = \left\{ \vec{b} \in R^m \mid (\vec{b} - \vec{\bar{b}})^T \cdot F_m^T \cdot E^{-2} \cdot F_m \cdot (\vec{b} - \vec{\bar{b}}) = m \right\}, \quad (8)$$

де $F_m = \{\vec{\varphi}^T(\vec{x}_i), i=1, \dots, m\}$ – матриця значень базових функцій обраного «насиченого блоку»; $\vec{\bar{b}} = F_m^{-1} \cdot 0,5 \cdot ((y_1^+ + y_1^-), \dots, (y_m^+ + y_m^-))^T$ – вектор, який задає центр еліпсоїда; $E = \text{diag}\{0,5 \cdot (y_1^+ - y_1^-, \dots, y_i^+ - y_i^-, \dots, y_m^+ - y_m^-)\}$ – діагональна матриця інтервальних похибок для вибраних базових рівнянь. В результаті отримуємо оптимальну локалізацію коридору інтервальних моделей (7) (в загальному випадку) з кусковими функціональними межами - у вигляді коридору з межами, які представлено достатньо гладкими функціями [3,5-6,14]:

$$[\hat{y}(\vec{x})]_{\vec{b} \in Q_m} = [\vec{\varphi}^T(\vec{x}) \cdot \vec{\bar{b}} - \frac{1}{2} \cdot \Delta_{\hat{y}(\vec{x})} \Big|_{\vec{b} \in Q_m}; \vec{\varphi}^T(\vec{x}) \cdot \vec{\bar{b}} + \frac{1}{2} \cdot \Delta_{\hat{y}(\vec{x})} \Big|_{\vec{b} \in Q_m}], \quad (9)$$

У виразі (9) за $\Delta_{\hat{y}(\vec{x})} \Big|_{\vec{b} \in Q_m}$ позначено функцію похибки прогнозування (ширина коридору), яку обчислюють за формулою [3,13,16]:

$$\Delta_{\hat{y}(\vec{x})} \Big|_{\vec{b} \in Q_m} = \sqrt{\vec{\varphi}^T(\vec{x}) \cdot (F_m^T \cdot E^{-2} \cdot F_m)^{-1} \cdot \vec{\varphi}(\vec{x})}, \quad (10)$$

Зважаючи на зазначене вище, є доцільним локалізація розв'язків ІСЛАР із застосуванням певним чином сформованого з її рівнянь «насиченого блоку». Одна із обчислювальних реалізацій такого методу, наведена у працях [3,7-8,11]. Для отримання локалізаційної області розв'язків ІСЛАР, необхідно здійснити п'ять основних ітерацій.

1. Вибір із ІСЛАР (4) m базових рівнянь («насиченого блоку»), що утворюють сумісну систему. Розв'язком такої системи є область Ω_m , яка має вигляд паралелограма, з вершинами [3]:

$$\vec{b}_s = F_m^{-1} \cdot \vec{Y}_s \quad (11)$$

де \vec{Y}_s - вектор, складений з межових значень інтервалів $[y_i^-, y_i^+], i=1, \dots, N$.

Задача формування набору базових рівнянь у цій послідовності обчислень, побудована по аналогії із задачею планування I_D -оптимального експерименту на дискретній множині значень вектора $\vec{x}_i, i=1, \dots, N$ [3,9-10]:

$$\left(\prod_{i=1}^m (y_i^+ - y_i^-)^2 \right) \cdot \det(F_m \cdot F_m^T)^{-1} \xrightarrow{F_m} \min, \vec{x}_i, i=1, \dots, N \quad (12)$$

де $F_m = \{\vec{\varphi}^T(\vec{x}_i), i=1, \dots, m\}$, $\vec{x}_i, i=1, \dots, N$ - стовпчик матриці X .

2. Обчислення деяких скалярних характеристик $L_s(k)$ ($L'_s(k)$) для усіх вершин області локалізації на підставі формул [3]:

$$L_s(k) = y_{k+1}^- - \vec{\varphi}^T(\vec{x}_{k+1}) \cdot \vec{b}_s(k), \quad (13)$$

$$L'_s(k) = \vec{\varphi}^T(\vec{x}_{k+1}) \cdot \vec{b}_s(k) - y_{k+1}^+ = -L_s(k) - \Delta_{k+1}, \quad (14)$$

де \vec{x}_{k+1} – вектор значень вхідних змінних $k+1$ -го рівняння в ІСЛАР (4), яке не увійшло до вибраного «насиченого блоку»; y_{k+1}^- , y_{k+1}^+ – нижня та верхня межі інтервалу для значень вихідної змінної в $k+1$ рівнянні ІСЛАР (4); $\Delta_{k+1} = y_{k+1}^+ - y_{k+1}^-$.

3. Обчислення значень $\delta_i^-(k+1)$ та $\delta_i^+(k+1)$, відповідно, за формулами [3]:

$$\delta_i^-(k+1) = \begin{cases} \min_{s=1, \dots, 2^{m-1}} \{L_s(k) / |\vec{\varphi}^T(\vec{x}_{k+1}) \cdot \vec{f}_i|\}, \text{ якщо } (L_s(k) > 0, s=1, \dots, 2^{m-1}) \\ \wedge (\vec{\varphi}^T(\vec{x}_{k+1}) \cdot \vec{f}_i \neq 0) \wedge (\exists L_s(k) < 0, s=1, \dots, 2^m) \\ 0, \text{ якщо } L_s(k) \leq 0 \end{cases} \quad (15)$$

$$\delta_i^+(k+1) = \begin{cases} \min_{s=1, \dots, 2^{m-1}} \{L'_s(k) / |\vec{\varphi}^T(\vec{x}_{k+1}) \cdot \vec{f}_i|\}, \text{ якщо } (L'_s(k) > 0, s=1, \dots, 2^{m-1}) \\ \wedge (\vec{\varphi}^T(\vec{x}_{k+1}) \cdot \vec{f}_i \neq 0) \wedge (\exists L'_s(k) < 0, s=1, \dots, 2^m) \\ 0, \text{ якщо } L'_s(k) \leq 0 \end{cases} \quad (16)$$

4. Обчислення меж інтервалу $[y_i^-(k+1); y_i^+(k+1)]$ значень вихідної змінної в інтервальних рівняннях «насиченого блоку» на $k+1$ -й ($k=1, \dots, N-m$) ітерації за формулою [3]:

$$y_i^-(k+1) = y_i^-(k) + \delta_i^-(k+1), \quad y_i^+(k+1) = y_i^+(k) - \delta_i^+(k+1), \quad i=1, \dots, m. \quad (17)$$

5. Якщо $k \leq N-m$, то перехід на крок 2. У протилежному випадку завершення процедури.

Як бачимо із наведеного алгоритму, на кожній $k+1$ -й ітерації послідовності із п'яти кроків, здійснюємо редукцію інтервальних рівнянь ІСЛАР, залишаючи тільки модифіковані за формулою (17) інтервальні рівняння «насиченого блоку».

Наведена за допомогою формул (11, 13-17) послідовність обчислень для локалізації розв'язків ІСЛАР на основі виділення її «насиченого блоку» в цілому не є складною з обчислювальної точки зору і може бути реалізована у вигляді паралельної схеми [4,12]. Разом з тим, в розглянутому методі локалізації області розв'язків ІСЛАР, достатньо складним є перший крок формування «насиченого блоку» із розв'язування оптимізаційної задачі (12). Задача, сформульована виразом (12) є оптимізаційною задачею з нелінійною функцією мети, яка навіть для задач невеликої розмірності ІСЛАР буде містити велику кіль-

кість локальних мінімумів. Більше того, за обчислювальною складністю така задача суттєво перевищує складність обчислень за формулами (13-17).

З іншого боку, довільний вибір «насиченого блоку» (базових рівнянь для локалізації) призводить до втрати змісту в цілому процедури локалізації. За цих умов, застосування для розв'язування прикладних задач методу локалізації області розв'язків ІСЛАР з виділенням «насиченого блоку» можливе тільки у випадку заміни процедури оптимізації за виразом (12) деякою простішою процедурою з одночасним забезпеченням умов високої точності інтервальної моделі.

2. Метод формування «насиченого блоку» у задачі локалізації розв'язків ІСЛАР

Таким чином, метод локалізації розв'язків ІСЛАР з виділенням «насиченого блоку» повинен забезпечувати високу точність інтервальної моделі, тобто задовільні її прогностичні властивості.

Одними з найважливіших прогностичних властивостей інтервальної моделі є максимальна та мінімальна на області вхідних змінних $\vec{x} \in \chi$ похибка прогнозування, відповідно:

$$\Delta_{\max} = \max_{\vec{x} \in \chi} (\hat{y}^+(\vec{x}) - \hat{y}^-(\vec{x})), \quad (18)$$

$$\Delta_{\min} = \min_{\vec{x} \in \chi} (\hat{y}^+(\vec{x}) - \hat{y}^-(\vec{x})). \quad (19)$$

У випадку використання «насиченого блоку», для оцінки параметрів інтервальної моделі, її мінімальна похибка прогнозування на області вхідних змінних $\vec{x} \in \chi$ досягається в одній із точок заданого набору вхідних змінних $\vec{x}_j, j=1, \dots, m$ [3,7,11]:

$$\Delta_{\min} = \min_{\vec{x}_j, j=1, \dots, m} \{ \hat{y}^+(\vec{x}_j) - \hat{y}^-(\vec{x}_j) \} = \min_{j=1, \dots, m} \{ 2\Delta_j \} \quad (20)$$

$$\vec{x}^{\min} = \arg \min_{\vec{x}_j, j=1, \dots, m} \{ \hat{y}^+(\vec{x}_j) - \hat{y}^-(\vec{x}_j) \} \quad (21)$$

Процедури обчислення максимальної похибки прогнозування інтервальними моделями, є набагато складнішими, навіть у випадку оцінки її параметрів на основі «насиченого блоку» ІСЛАР [2-3,11]. Розглянемо їх особливості.

У праці [3] наведено вирази для обчислення значення похибки в будь-якій точці для зазначеного випадку:

$$\Delta_{y(\vec{x})} = 2 \cdot \sum_{j=1}^m |\alpha_j(\vec{x}) \cdot \Delta_j|, \vec{x} \in \chi \quad (22)$$

$$\vec{\alpha}^T(\vec{x}) = \vec{\varphi}^T(\vec{x}) \cdot F_m^{-1} \quad (23)$$

де $\alpha_j(\vec{x})$ - j -та компонента вектора $\vec{\alpha}(\vec{x})$, яка у загальному випадку залежить від вибору точки на області експерименту; $\Delta_j = 0,5 \cdot (y_j^+ - y_j^-)$ - інтервальні похибки у точках \vec{x}_j спостережень.

Спираючись на формули (22), (23), сформулюємо умову вибору «насиченого блоку» із мінімізації максимальної похибки прогнозування на області значень вхідних змінних $\vec{x} \in \chi$:

$$\max_{\vec{x} \in \chi} \left\{ 2 \cdot \sum_{j=1}^m |\alpha_j(\vec{x}) \cdot \Delta_j| \right\} \xrightarrow{F_m} \min, \vec{\alpha}^T(\vec{x}) = \vec{\varphi}^T(\vec{x}) \cdot F_m^{-1}. \quad (24)$$

Вираз (24) забезпечує мінімізацію максимальної похибки прогнозування інтервальної моделі серед усіх можливих «насичених блоків», вибраних із ІСЛАР. Очевидно, що цей вираз може бути використаний в методі локалізації області розв'язків ІСЛАР, реалізацію якого представлено виразами (11)-(17), взамін виразу (12).

Разом з тим, оптимізаційна процедура (24) не набагато простіша за процедуру (12), тому потребує подальшого спрощення.

Проведемо це спрощення із використанням аналогії з теорії планування послідовних побудови планування послідовних I_G -оптимальних планів інтервального експерименту, які мінімізують максимальну похибку прогнозування інтервальних моделей [1,9-10,17-18]. В нашому випадку суть полягає: у плануванні деякої серії експериментів з незначною кількістю спостережень (наприклад, насиченого експерименту); отримання коридору інтервальних моделей; аналіз прогностичних властивостей цих моделей і на цій основі планування наступного одного спостереження [3,17-18].

Зважаючи на вимоги забезпечення оптимальних прогностичних властивостей інтервальної моделі (мінімізації максимальної похибки прогнозування) на області вхідних змінних, доцільно зазначений підхід використати для вибору «насиченого блоку» ІСЛАР, з метою спрощення процедури (24).

Зауважимо, що в процедурі I_G -оптимального планування на першій ітерації «насичений блок» обрають за I_G -критерієм, вираз для якого представлений (24). У нашому випадку така ітерація втрачає сенс по причині високої обчислювальної складності. Тому, на першому кроці методу локалізації ІСЛАР з виділенням «насиченого блоку», цей блок ІСЛАР будемо обирати довільним чином.

Отже, нехай структура математичної моделі статичної системи визначена виразом (1) з невідомими параметрами, задано інтервальні дані (2) та сформовано ІСЛАР у вигляді (4).

Виберемо з ІСЛАР довільним чином «насичений блок», обчислимо його область розв'язків побудуємо коридор прогнозування інтервальними моделями:

$$[\hat{y}(\bar{x})] = [\bar{\varphi}^T(\bar{x}) \cdot \bar{b} - \frac{1}{2} \cdot \Delta_{\bar{y}(\bar{x})}; \bar{\varphi}^T(\bar{x}) \cdot \bar{b} + \frac{1}{2} \cdot \Delta_{\bar{y}(\bar{x})}], \quad (25)$$

де $\Delta_{\bar{y}(\bar{x})}$ визначено виразами (22), (23).

Тепер, згідно аналогії з процедурою послідовного I_G -оптимального планування, спираючись на формули (22), (23), серед $\bar{x}_i, i=1, \dots, N$ точок експерименту, для яких складена ІСЛАР (4), обчислимо вектор \bar{x}^{\max} , для якого є максимальне похибка прогнозування:

$$\bar{x}^{\max} = \arg \max_{\bar{x}_i=1, \dots, N} \left\{ 2 \cdot \sum_{j=1}^m |\alpha_j(\bar{x}_i) \cdot \Delta_j|, \bar{x}_i, i=1, \dots, N \right\}, \bar{\alpha}^T(\bar{x}_i) = \bar{\varphi}^T(\bar{x}_i) \cdot F_m^{-1} \quad (26)$$

Зауважимо, що процедура (26) є простою, оскільки виконується на скінченній множині точок $\bar{x}_i, i=1, \dots, N$. Отриманий за виразом (26) вектор, є вектором значень вхідних змінних, який визначає певне інтервальне рівняння в ІСЛАР (4). Згідно з процедурою послідовного I_G -оптимального планування саме у цій точці необхідно провести наступне вимірювання.

Спираючись на формулу (21) для визначення вектора значень вхідних змінних, де забезпечується мінімальна на області експерименту похибка прогнозування, можемо стверджувати, що якби вектор \bar{x}^{\max} співпадав з вектором значень вхідних змінних одного із інтервальних рівнянь «насиченого блоку» ІСЛАР, то він би задавав точку з мінімальним значенням похибки прогнозування. Звідси, доцільно замінити в поточному «насиченому блоці» одне з інтервальних рівнянь на інтервальне рівняння ІСЛАР з вектором значень вхідних змінних \bar{x}^{\max} , визначеного за формулою (26). Таким чином, по аналогії з процедурою послідовного I_G -оптимального планування «імітуємо» процедуру додаткового вимірювання у точці \bar{x}^{\max} з максимальною похибкою прогнозування інтервальної моделі, отримуючи вимірювання з мінімальною інтервальною похибкою за формулою (20). Проте, на відміну від процедури I_G -оптимального послідовного планування експерименту, зазначену точку обираємо на дискретній множині точок $\bar{x}_i, i=1, \dots, N$. Позначимо нижню і верхню межу для отриманого інтервалу за $[\hat{y}_{\min}^-; \hat{y}_{\min}^+]$.

Зазначену процедуру проведемо для кожного інтервального рівняння «насиченого блоку». Отримаємо p нових «насичених блоків». Зокрема:

у випадку заміни першого інтервального рівняння

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{y}_{\min}^- \leq b_1 \varphi_1(\bar{x}^{\max}) + \dots + b_m \varphi_m(\bar{x}^{\max}) \leq \hat{y}_{\min}^+ \\ \vdots \\ y_p^- \leq b_1 \varphi_1(\bar{x}_p) + \dots + b_m \varphi_m(\bar{x}_p) \leq y_p^+ \\ \vdots \\ y_m^- \leq b_1 \varphi_1(\bar{x}_m) + \dots + b_m \varphi_m(\bar{x}_m) \leq y_m^+ \end{array} \right. ; \quad (27)$$

- у випадку заміни p -го рівняння

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1^- \leq b_1 \varphi_1(\bar{x}_1) + \dots + b_m \varphi_m(\bar{x}_1) \leq y_1^+ \\ \vdots \\ \hat{y}_{\min}^- \leq b_1 \varphi_1(\bar{x}^{\max}) + \dots + b_m \varphi_m(\bar{x}^{\max}) \leq \hat{y}_{\min}^+ \\ \vdots \\ y_m^- \leq b_1 \varphi_1(\bar{x}_m) + \dots + b_m \varphi_m(\bar{x}_m) \leq y_m^+ \end{array} \right. ; \quad (28)$$

- у випадку заміни m -го рівняння:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1^- \leq b_1 \varphi_1(\bar{x}_1) + \dots + b_m \varphi_m(\bar{x}_1) \leq y_1^+ \\ \vdots \\ y_p^- \leq b_1 \varphi_1(\bar{x}_p) + \dots + b_m \varphi_m(\bar{x}_p) \leq y_p^+ \\ \vdots \\ y_{m-1}^- \leq b_1 \varphi_1(\bar{x}_{m-1}) + \dots + b_m \varphi_m(\bar{x}_{m-1}) \leq y_{m-1}^+ \\ \hat{y}_{\min}^- \leq b_1 \varphi_1(\bar{x}^{\max}) + \dots + b_m \varphi_m(\bar{x}^{\max}) \leq \hat{y}_{\min}^+ \end{array} \right. . \quad (29)$$

В результаті, для кожного з m «насичених блоків» отримаємо m значень максимальних похибок для відповідних інтервальних моделей:

$$\Delta_{\max}^p = \max_{x_i, i=1, \dots, N} \left\{ 2 \cdot \sum_{j=1}^m |\alpha_{jp}(\bar{x}_i) \cdot \Delta_j| \right\}, \bar{\alpha}_p^T(\bar{x}_i) = \bar{\varphi}^T(x_i) \cdot F_m^{-1}(p), p = 1, \dots, m, \quad (30)$$

де p - індекс, який в даному випадку означає номер «насиченого блоку», $F_m(p)$ - матриця значень базових функцій для p -го блоку, $\alpha_{jp}(\bar{x}_i)$ - i -та компонента вектора $\bar{\alpha}$, обчислена для p -го «насиченого блоку».

Очевидно, що для вибору «оптимального насиченого блоку» на цьому кроці взамін складної обчислювальної процедури (24) достатньо вибрати з m «насичених блоків» той, який забезпечує найменше значення послідовності (30), тобто:

$$F_m^{opt} = \arg \min_{p=1, \dots, m} \left\{ \Delta_{\max}^p, p = 1, \dots, m \right\}, \quad (31)$$

Застосовуючи процедуру (26), отримуємо \bar{x}^{\max} - точку, в якій досягається максимальна похибка прогнозу для інтервальної моделі, область параметрів

якої обчислено із обраного у вищеописаний спосіб «насиченого блоку». Далі ітерації продовжуються до тих пір, поки не буде отримано такий «насичений блок», заміна рівнянь якого не призводить до зменшення максимальної похибки прогнозування інтервальними моделями.

Алгоритм реалізації методу зобразимо у вигляді такої послідовності кроків:

Крок 1. Довільний вибір «насиченого блоку» із ІСЛАР (4).

Крок 2. Обчислення вектору \vec{x}^{\max} для із розв'язування задачі (26).

Крок 3. Ітерація поетапної заміни кожного із m інтервальних рівнянь насиченого блоку на інтервальне рівняння ІСЛАР з вектором значень вхідних змінних \vec{x}^{\max} , формування набору (27)-(29) насичених блоків та обчислення максимальних похибок (22) інтервальних моделей, області параметрів яких обчислено із послідовності насичених блоків, відповідно.

Крок 4. Вибір оптимального «насиченого блоку» за критерієм (31).

Перехід на крок 2. Зауважимо, що при переході на 2 крок для отриманого «насиченого блоку» відомими будуть як область розв'язків, так і значення максимальної похибки інтервальної моделі, побудованої для цього блоку.

Послідовність кроків реалізуємо до тих пір, поки на останньому кроці буде отримано «насичений блок», будь-яка заміна інтервальних рівнянь якого не призводить до зменшення максимальної похибки прогнозування для побудованих інтервальних моделей.

Таким чином, запропонований метод здійснює напрямлений, а не повний, перебір «насичених блоків», складених із загальної ІСЛАР із N інтервальних рівнянь. Варто зазначити, що у випадку відсутності такого направленого перебору кількість «насичених блоків», які необхідно проаналізувати (за допомогою складної обчислювальної процедури) визначається за комбінаторно. Наприклад, для випадку ІСЛАР із 30 рівнянь з 5 невідомими необхідно перебрати 142506 «насичених блоків»!

Разом з тим, запропонований метод потребує теоретичного обґрунтування, в сенсі доведення ефективності процедури направленого перебору. Таке обґрунтування можна здійснити на основі аналізу функції мети, заданої виразом (26).

3. Аналіз функції мети в ітераційній процедурі вибору «насиченого блоку»

Очевидно, що складність ітераційної процедури (26) безпосередньо визначається властивостями функції мети, тому доцільним є аналіз її властивостей. Для цього зробимо таку заміну у виразі (26):

$$F_m^{-1} = \psi(N_1, N_2, \dots, N_m),$$

де N_i - номер i -го рівняння, вибраного із ІСЛАР (4).

В результаті функція мети набуде вигляду:

$$\Delta_{\max}(N_1, \dots, N_m) = \max_{\bar{x}_i=1, \dots, N} \left\{ 2 \cdot \sum_{j=1}^m |\alpha_j(\bar{x}_i) \cdot \Delta_j| \right\}, \bar{\alpha}^T(x_i) = \bar{\varphi}^T(\bar{x}_i) \cdot \psi(N_1, N_2, \dots, N_m) \quad (32)$$

Тепер необхідно відобразити властивості цієї функції, в залежності від обраного набору рівнянь в «насиченому блоці». Очевидно, що в загальному випадку зробити такий аналіз практично неможливо, але на конкретних прикладах можна показати загальні властивості цієї функції. Зокрема, в оптимізаційних задачах важливо виявити якого виду є функція мети (наприклад, унімодальна чи багатоекстремальна; непервна чи дискретна і т.д.).

Як видно з виразу (32), функція мети в задачі вибору «насиченого блоку» однозначно є дискретною, оскільки її значення визначається конкретним набором інтервальних рівнянь. Очевидним є також факт, що ця функція не є унімодальною. Зазначену властивість проілюструємо на прикладі.

Запишемо для цього прикладу загальний вигляд рівняння для побудови інтервальної моделі:

$$y(x) = b_0 \cdot x + b_1 \cdot \ln(x), \quad (33)$$

Параметри моделі визначатимемо із набору «експериментальних» даних, наведених у таблиці 1.

Таблиця 1.

Таблиця зімітованих «експериментальних» даних

i	x_i	y_i^-	y_i^+
1	14	36,976	45,215
2	25	59,424	72,642
3	25	59,502	72,721
4	24	57,471	70,249
5	24	57,566	70,344
6	29	67,288	82,255
7	9	26,13	31,927
8	11	30,551	37,349
9	18	45,325	55,415
10	21	51,43	62,874
11	10	28,459	34,762
12	29	67,277	82,244
13	30	69,207	84,608
14	14	37,082	45,321
15	7	21,377	26,123
16	2	6,652	8,146

17	24	57,491	70,269
18	15	39,098	47,806
19	15	39,243	47,951
20	24	57,505	70,283

Тоді інтервальна система для знаходження коефіцієнтів моделі матиме такий вигляд:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 36,976 \leq 14b_0 + 2,639b_1 \leq 45,215 \\
 59,424 \leq 25b_0 + 3,219b_1 \leq 72,642 \\
 59,502 \leq 25b_0 + 3,219b_1 \leq 72,721 \\
 57,471 \leq 24b_0 + 3,178b_1 \leq 70,249 \\
 57,566 \leq 24b_0 + 3,178b_1 \leq 70,344 \\
 67,288 \leq 29b_0 + 3,367b_1 \leq 82,255 \\
 26,13 \leq 9b_0 + 2,197b_1 \leq 31,927 \\
 30,551 \leq 11b_0 + 2,398b_1 \leq 37,349 \\
 45,325 \leq 18b_0 + 2,89b_1 \leq 55,415 \\
 51,43 \leq 21b_0 + 3,044b_1 \leq 62,874 \\
 28,459 \leq 10b_0 + 2,302b_1 \leq 34,762 \\
 67,277 \leq 29b_0 + 3,367b_1 \leq 82,244 \\
 69,207 \leq 30b_0 + 3,401b_1 \leq 84,608 \\
 37,082 \leq 14b_0 + 2,639b_1 \leq 45,321 \\
 21,377 \leq 7b_0 + 1,946b_1 \leq 26,123 \\
 6,652 \leq 2b_0 + 0,693b_1 \leq 8,146 \\
 57,491 \leq 24b_0 + 3,178b_1 \leq 70,269 \\
 39,098 \leq 15b_0 + 2,708b_1 \leq 47,806 \\
 39,243 \leq 15b_0 + 2,708b_1 \leq 47,951 \\
 57,505 \leq 24b_0 + 3,178b_1 \leq 70,283
 \end{array} \right. \quad (34)$$

Пронумеруємо рівняння у системі (34). Відповідно, інтервальне рівняння $36,976 \leq 14b_0 + 2,639b_1 \leq 45,215$ - отримає номер 1, а інтервальне рівняння $57,505 \leq 24b_0 + 3,178b_1 \leq 70,283$ матиме номер 20.

Згідно виразу (32) обчислимо значення функції мети і занесемо їх у таблицю 2. У таблиці 2, N_1 означає номер першого рівняння у «насиченому блоці», N_2 - номер другого рівняння.

Таблиця 2.

Значення функції мети (32)

		Номер другого рівняння «насиченого блоку» N_2																				
Номер першого рівняння «насиченого блоку» N_1	i/j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
	1		31,74	31,74	37	37	17,78	146,9	224,11	124,83	61,94	175,52	17,78	15,4	∞	116,13	158,49	37	568,66	568,66	37	
	2			∞	176,9	176,9	45,22	27,79	28,9	39,82	56,87	28,28	45,22	37,47	31,74	27,19	36,1	176,89	33,12	33,12	176,89	
	3				176,9	176,9	45,22	27,79	28,9	39,82	56,87	28,28	45,22	37,47	31,74	27,19	36,1	176,89	33,12	33,12	176,89	
	4					∞	35,02	31,29	32,88	49,63	81,81	31,99	35,02	30,28	37	30,41	41,51	∞	39,06	39,06	∞	
	5						35,02	31,29	32,88	49,63	81,81	31,99	35,02	30,28	37	30,41	41,51	∞	39,06	39,06	∞	
	6							17,37	17,49	18,5	19,77	17,42	∞	212,75	17,78	17,32	22,57	35,02	17,92	17,92	35,02	
	7								415,48	69,17	45,38	867,74	17,37	15,4	146,9	504,61	411,76	31,29	117,54	117,54	31,29	
	8									81,3	49,71	794,19	17,49	15,4	224,11	230,34	264,13	32,88	161,36	161,36	32,88	
	9										118,58	74,35	18,5	15,4	124,83	62,52	90,81	49,63	159,21	159,21	49,63	
	10											47,28	19,77	18,35	61,94	42,91	61,67	81,81	68,93	68,93	81,81	
	11													17,42	15,4	175,52	321	324,78	31,99	134,82	134,82	31,99
	12														212,75	17,78	17,32	22,57	35,02	17,92	17,92	35,02
	13															15,4	15,4	23,21	30,28	15,4	15,4	30,28
	14																116,13	158,49	37	568,66	568,66	37
	15																	778,88	30,41	97,52	97,52	30,41
	16																		41,51	136,71	136,71	41,51
	17																			39,06	39,06	∞
	18																				∞	39,06
	19																					39,06

На рисунку 1 відображено значення функції мети з таблиці 1. Як бачимо, функція мети є дискретною і має велику кількість локальних мінімумів .

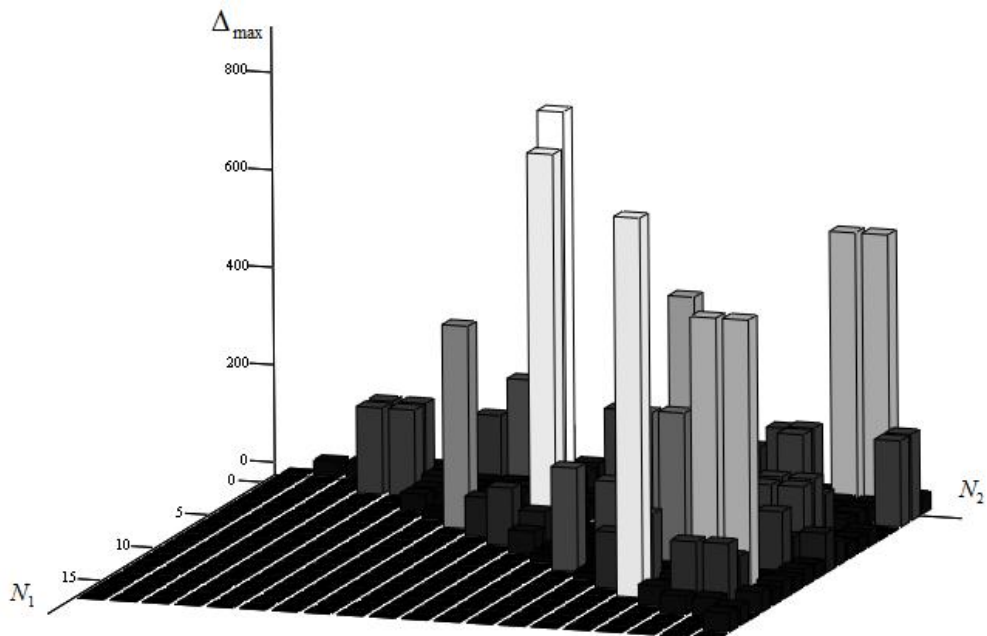


Рисунок 1. Поверхня дискретної функції мети (32)

Тепер застосуємо розроблений метод вибору оптимального «насиченого блоку» з ІСЛАР (34). На першому кроці алгоритму реалізації методу виберемо насичений блок $\psi(2,4)$:

$$\begin{cases} 59,424 \leq 25b_0 + 3,219b_1 \leq 72,642 \\ 57,471 \leq 24b_0 + 3,178b_1 \leq 70,249 \end{cases} \quad (35)$$

Побудована для зазначеного «насиченого блоку» інтервальна модель характеризується максимальною похибкою прогнозування 176,9 (на рисунку 2 виділено овалом). На наступній ітерації алгоритму реалізації методу формування набору базових рівнянь «насиченого блоку» «претендентами» є два «насичені блоки» $\psi(2,13)$ та $\psi(4,13)$, відповідно:

$$\begin{cases} 59,424 \leq 25b_0 + 3,219b_1 \leq 72,642 \\ 69,207 \leq 30b_0 + 3,401b_1 \leq 84,608 \end{cases} \quad (36)$$

$$\begin{cases} 57,471 \leq 24b_0 + 3,178b_1 \leq 70,249 \\ 69,207 \leq 30b_0 + 3,401b_1 \leq 84,608 \end{cases} \quad (37)$$

Інтервальні моделі, області параметрів яких обчислено із розв'язування ІСЛАР («насичених блоків») (36), (37), відповідно, характеризуються максимальними похибками прогнозування, відповідно: 37,47 та 30,28. На рисунку 2 ці значення максимальних похибок означено ромбами.

Отже, «оптимальним насиченим блоком» є (37), який забезпечує меншу максимальну похибку прогнозування інтервальними моделями на області вхідних змінних 30,28.

На наступній ітерації реалізації методу претендентами є «насичені блоки» $\psi(4,14)$ та $\psi(13,14)$:

$$\begin{cases} 57,471 \leq 24b_0 + 3,178b_1 \leq 70,249 \\ 37,082 \leq 14b_0 + 2,639b_1 \leq 45,321 \end{cases} \quad (38)$$

$$\begin{cases} 69,207 \leq 30b_0 + 3,401b_1 \leq 84,608 \\ 37,082 \leq 14b_0 + 2,639b_1 \leq 45,321 \end{cases} \quad (39)$$

Інтервальні моделі, побудовані на основі «насичених блоків» (38), (39) характеризуються максимальними похибками прогнозування, відповідно: 37 та 15,4 (рисунок 2). Отже, «оптимальним насиченим блоком» є ІСЛАР (39), який забезпечує числове значення 15,4 функції мети - мінімум максимальної похибки для інтервальних моделей.

		Номер другого рівняння «насиченого блоку» N_2																			
Номер першого рівняння «насиченого блоку» N_1		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1			31,74	31,74	37	37	17,78	146,9	224,11	124,83	61,94	175,52	17,78	15,4	∞	116,13	158,49	37	568,66	568,66	37
2			∞	176,9	176,9	45,22	27,79	28,9	39,82	56,87	28,28	45,22	37,47	31,74	27,19	36,1	176,89	33,12	33,12	176,89	
3				176,9	176,9	45,22	27,79	28,9	39,82	56,87	28,28	45,22	37,47	31,74	27,19	36,1	176,89	33,12	33,12	176,89	
4					∞	35,02	31,29	32,88	49,63	81,81	31,99	35,02	30,28	37	30,41	41,51	∞	39,06	39,06	∞	
5						35,02	31,29	32,88	49,63	81,81	31,99	35,02	30,28	37	30,41	41,51	∞	39,06	39,06	∞	
6							17,37	17,49	18,5	19,77	17,42	∞	212,75	17,78	17,32	22,57	35,02	17,92	17,92	35,02	
7								415,48	69,17	45,38	867,74	17,37	15,4	146,9	504,61	411,76	31,29	117,54	117,54	31,29	
8									81,3	49,71	794,19	17,49	15,4	224,11	230,34	264,13	32,88	161,36	161,36	32,88	
9										118,58	74,35	18,5	15,4	124,83	62,52	90,81	49,63	159,21	159,21	49,63	
10											47,28	19,77	18,35	61,94	42,91	61,67	81,81	68,93	68,93	81,81	
11												17,42	15,4	175,52	321	324,78	31,99	134,82	134,82	31,99	
12														212,75	17,78	17,32	22,57	35,02	17,92	17,92	35,02
13															15,4	15,4	23,21	30,28	15,4	15,4	30,28
14																116,13	158,49	37	568,66	568,66	37
15																	778,88	30,41	97,52	97,52	30,41
16																		41,51	136,71	136,71	41,51
17																			39,06	39,06	∞
18																				∞	39,06
19																					39,06

Рисунок 2. Таблиця значень функції мети з ілюстрацією кроків реалізації методу формування оптимального «насиченого блоку» для початкових умов $\psi(2,4)$

На рисунку 3 стрілками проілюстровано рух по поверхні функції мети, який забезпечує алгоритм реалізації методу формування оптимального «насиченого блоку».

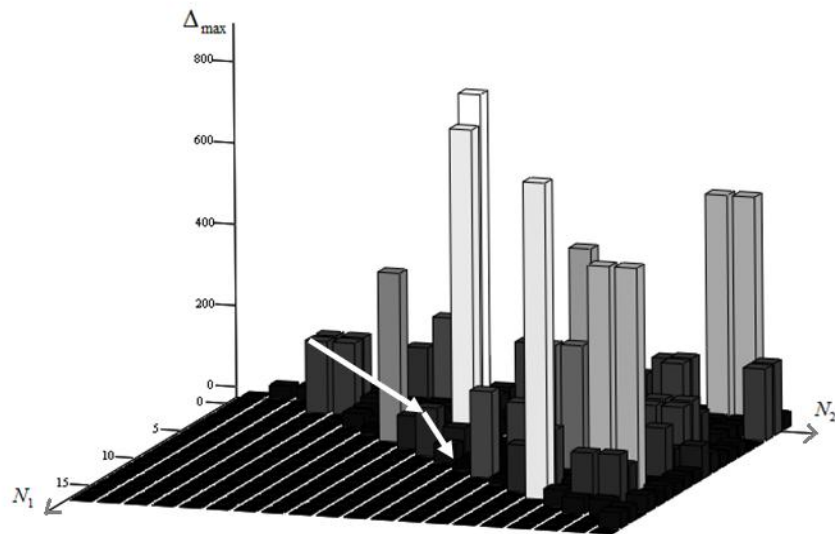


Рисунок 3. Зображення функції мети з ілюстрацією кроків реалізації методу формування набору базових рівнянь «насиченого блоку» для початкових умов $\psi(2,4)$

Як бачимо, замість повного перебору «насичених блоків» із ІСЛАР (34) в кількості 195, запропонований метод, для вибору оптимального, проаналізував – 5.

Тепер перейдемо до аналізу впливу початкових умов для методу формування набору базових рівнянь «насиченого блоку» на результат його реалізації. Скористаємося тим самим прикладом, але іншими початковими умовами. На першому кроці алгоритму реалізації методу в цьому випадку виберемо «насичений блок» з ІСЛАР (34) $\psi(8,18)$:

$$\begin{cases} 30,551 \leq 11b_0 + 2,398b_1 \leq 37,349 \\ 39,098 \leq 15b_0 + 2,708b_1 \leq 47,806 \end{cases} \quad (40)$$

Побудована для зазначеного «насиченого блоку» інтервальна модель характеризується максимальною похибкою прогнозування 161,36 (на рисунку 4 виділено овалом). На наступній ітерації алгоритму реалізації методу формування набору базових рівнянь «насиченого блоку» «претендентами» є два «насичені блоки» $\psi(8,13)$ та $\psi(13,18)$:

$$\begin{cases} 30,551 \leq 11b_0 + 2,398b_1 \leq 37,349 \\ 69,207 \leq 30b_0 + 3,401b_1 \leq 84,608 \end{cases} \quad (41)$$

$$\begin{cases} 69,207 \leq 30b_0 + 3,401b_1 \leq 84,608 \\ 39,098 \leq 15b_0 + 2,708b_1 \leq 47,806 \end{cases} \quad (42)$$

Інтервальні моделі, області параметрів яких обчислено із розв'язування ІСЛАР («насичених блоків») (41), (42), відповідно, характеризуються однаковими максимальними похибками прогнозування 15,40. На рисунку 4 ці значення максимальних похибок означено ромбами.

Отже, «оптимальним насиченим блоком» є (41), який забезпечує числове значення 15,4 функції мети – мінімум максимальної похибки прогнозування для інтервальних моделей.

		Номер другого рівняння «насиченого блоку» N_2																			
Номер першого рівняння «насиченого блоку» N_1	i/j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	1		31,74	31,74	37	37	17,78	146,9	224,11	124,83	61,94	175,52	17,78	15,4	∞	116,13	158,49	37	568,66	568,66	37
	2			∞	176,9	176,9	45,22	27,79	28,9	39,82	56,87	28,28	45,22	37,47	31,74	27,19	36,1	176,89	33,12	33,12	176,89
	3				176,9	176,9	45,22	27,79	28,9	39,82	56,87	28,28	45,22	37,47	31,74	27,19	36,1	176,89	33,12	33,12	176,89
	4					∞	35,02	31,29	32,88	49,63	81,81	31,99	35,02	30,28	37	30,41	41,51	∞	39,06	39,06	∞
	5						35,02	31,29	32,88	49,63	81,81	31,99	35,02	30,28	37	30,41	41,51	∞	39,06	39,06	∞
	6							17,37	17,49	18,5	19,77	17,42	∞	212,75	17,78	17,32	22,57	35,02	17,92	17,92	35,02
	7								415,48	69,17	45,38	867,74	17,37	15,4	146,9	504,61	411,76	31,29	117,54	117,54	31,29
	8									81,3	49,71	794,19	17,49	15,4	224,11	230,34	264,13	32,88	161,36	161,36	32,88
	9										118,58	74,35	18,5	15,4	124,83	62,52	90,81	49,63	159,21	159,21	49,63
	10											47,28	19,77	18,35	61,94	42,91	61,67	81,81	68,93	68,93	81,81
	11												17,42	15,4	175,52	321	324,78	31,99	134,82	134,82	31,99
	12													212,75	17,78	17,32	22,57	35,02	17,92	17,92	35,02
	13														15,4	15,4	23,21	30,28	15,4	15,4	30,28
	14															116,13	158,49	37	568,66	568,66	37
	15																778,88	30,41	97,52	97,52	30,41
	16																	41,51	136,71	136,71	41,51
	17																		39,06	39,06	∞
	18																			∞	39,06
	19																				39,06

Рисунок 4. Таблиця значень функції мети з ілюстрацією кроків реалізації методу формування набору базових рівнянь «насиченого блоку» для початкових умов $\psi(8,18)$

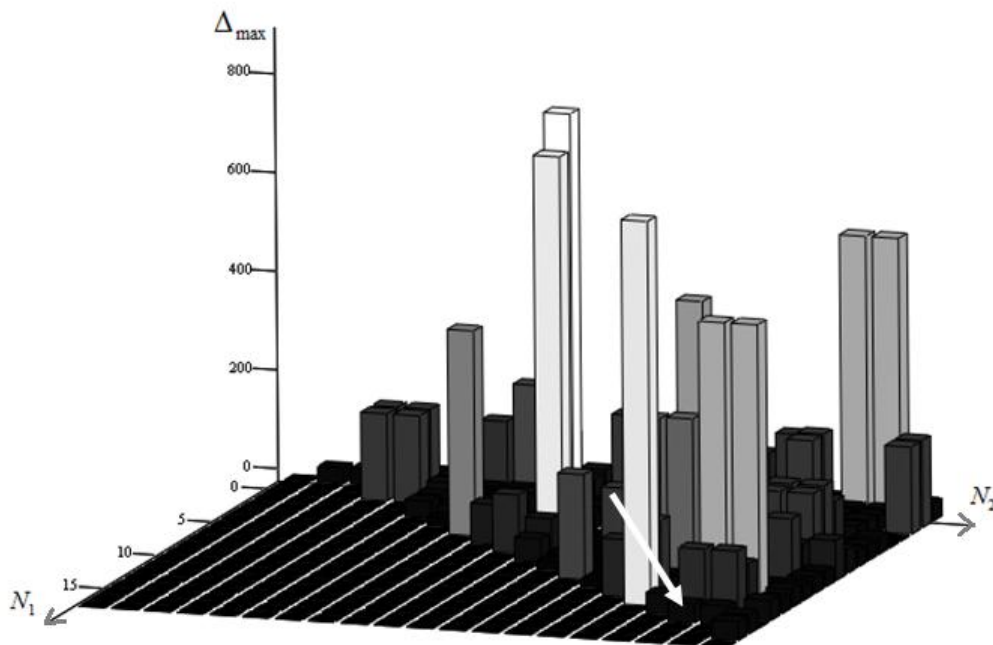


Рисунок 5. Зображення функції мети з ілюстрацією кроків реалізації методу формування набору базових рівнянь «насиченого блоку» для початкових умов $\psi(8,18)$

Нехай обрано інший «насичений блок» з ІСЛАР (34), наприклад $\psi(3,10)$:

$$\begin{cases} 59,502 \leq 25b_0 + 3,219b_1 \leq 72,721 \\ 51,43 \leq 21b_0 + 3,044b_1 \leq 62,874 \end{cases} \quad (43)$$

Побудована для зазначеного «насиченого блоку» інтервальна модель характеризується максимальною похибкою прогнозування 56,87 (на рисунку 6 виділено овалом). На наступній ітерації алгоритму реалізації методу формування набору базових рівнянь «насиченого блоку» «претендентами» є два «насичені блоки» $\psi(3,13)$ та $\psi(10,13)$:

$$\begin{cases} 59,502 \leq 25b_0 + 3,219b_1 \leq 72,721 \\ 69,207 \leq 30b_0 + 3,401b_1 \leq 84,608 \end{cases} \quad (44)$$

$$\begin{cases} 51,43 \leq 21b_0 + 3,044b_1 \leq 62,874 \\ 69,207 \leq 30b_0 + 3,401b_1 \leq 84,608 \end{cases} \quad (45)$$

Інтервальні моделі, області параметрів яких обчислено із розв'язування ІСЛАР («насичених блоків») (44), (45), відповідно, характеризуються максимальними похибками прогнозування, відповідно: 37,47 та 18,35. На рисунку 6 ці значення максимальних похибок означено ромбами.

Отже, «оптимальним насиченим блоком» є (45), який забезпечує меншу максимальну похибку прогнозування інтервальними моделями на області вхідних змінних 18,35.

На наступній ітерації реалізації методу претендентами є «насичені блоки» $\psi(10,14)$ та $\psi(13,14)$:

$$\begin{cases} 57,471 \leq 24b_0 + 3,178b_1 \leq 70,249 \\ 37,082 \leq 14b_0 + 2,639b_1 \leq 45,321 \end{cases} \quad (46)$$

$$\begin{cases} 69,207 \leq 30b_0 + 3,401b_1 \leq 84,608 \\ 37,082 \leq 14b_0 + 2,639b_1 \leq 45,321 \end{cases} \quad (47)$$

Інтервальні моделі, побудовані на основі «насичених блоків» (46), (47) характеризуються максимальними похибками прогнозування, відповідно: 61,94 та 15,4 (рисунк 6). Отже, «оптимальним насиченим блоком» є ІСЛАР (47), який забезпечує числове значення 15,4 функції мети – мінімум максимальної похибки для інтервальних моделей.

		Номер другого рівняння «насиченого блоку» N_2																				
Номер першого рівняння «насиченого блоку» N_1	i/j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
	1		31,74	31,74	37	37	17,78	146,9	224,11	124,83	61,94	175,52	17,78	15,4	∞	116,13	158,49	37	568,66	568,66	37	
	2			∞	176,9	176,9	45,22	27,79	28,9	39,82	56,87	28,28	45,22	37,47	31,74	27,19	36,1	176,89	33,12	33,12	176,89	
	3				176,9	176,9	45,22	27,79	28,9	39,82	56,87	28,28	45,22	37,47	31,74	27,19	36,1	176,89	33,12	33,12	176,89	
	4					∞	35,02	31,29	32,88	49,63	81,81	31,99	35,02	30,28	37	30,41	41,51	∞	39,06	39,06	∞	
	5						35,02	31,29	32,88	49,63	81,81	31,99	35,02	30,28	37	30,41	41,51	∞	39,06	39,06	∞	
	6							17,37	17,49	18,5	19,77	17,42	∞	212,75	17,78	17,32	22,57	35,02	17,92	17,92	35,02	
	7								415,48	69,17	45,38	867,74	17,37	15,4	146,9	504,61	411,76	31,29	117,54	117,54	31,29	
	8									81,3	49,71	794,19	17,49	15,4	224,11	230,34	264,13	32,88	161,36	161,36	32,88	
	9											118,58	74,35	18,5	15,4	124,83	62,52	90,81	49,63	159,21	159,21	49,63
	10												47,28	19,77	18,35	61,94	42,91	61,67	81,81	68,93	68,93	81,81
	11													17,42	15,4	175,52	321	324,78	31,99	134,82	134,82	31,99
	12														212,75	17,78	17,32	22,57	35,02	17,92	17,92	35,09
	13															15,4	15,4	23,21	30,28	15,4	15,4	30,28
	14																116,13	158,49	37	568,66	568,66	37
	15																	778,88	30,41	97,52	97,52	30,41
	16																		41,51	136,71	136,71	41,51
	17																			39,06	39,06	∞
	18																				∞	39,06
	19																					39,06

Рисунок 6. Таблиця значень функції мети з ілюстрацією кроків реалізації методу формування набору базових рівнянь «насиченого блоку» для початкових умов $\psi(3,10)$

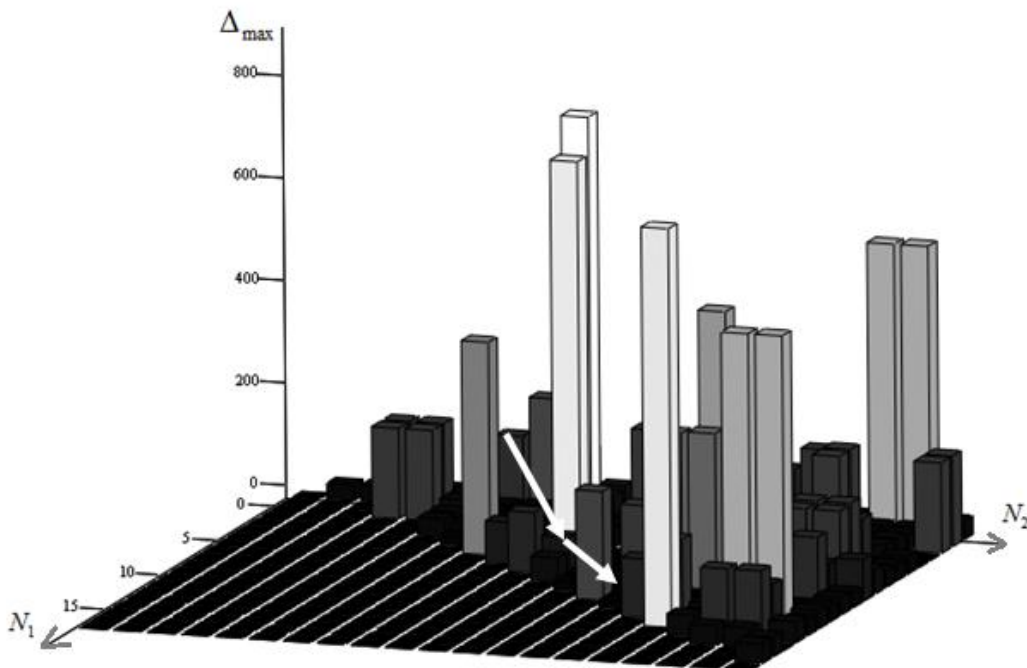


Рисунок 7. Зображення функції мети з ілюстрацією кроків реалізації методу формування набору базових рівнянь «насиченого блоку» для початкових умов $\psi(3,10)$

Аналогічні приклади були розглянуті для різних початкових «насичених блоків» загальною кількістю 10. В кожному із 10 випадків результат застосування методу збігався до значення максимальної похибки прогнозування 15,4. Це засвідчує збіжність обчислювальної процедури реалізації методу, принаймні для даного випадку. Хоча для загального випадку властивості методу ще необхідно дослідити.

Як бачимо, на кожному кроці застосування методу дає можливість здійснити напрямлений перебір до локального мінімуму. На прикладах показано, що в даних задачах існує однозначний розв'язок, знайдений для різних початкових умов.

З обчислювальної точки зору запропонований метод є простішим, у порівнянні з відомими методами локалізації розв'язків ІСЛАР на основі виділення насиченого блоку методами планування оптимального експерименту.

Висновки. Вперше запропоновано метод формування набору базових рівнянь у задачі локалізації розв'язків ІСЛАР на основі «насиченого блоку». Запропонований метод, на відміну від існуючих ґрунтується на розв'язуванні оптимізаційної задачі, з критерієм мінімізації максимальної похибки прогнозування для інтервальних моделей, область оцінок параметрів яких локалізована областю розв'язків ІСЛАР у вигляді «насиченого блоку». Досліджено властивості запропонованого методу, показано його ефективність та переваги (з точки зору обчислювальної складності та збіжності), у порівнянні з методами, що ґрунтуються на плануванні інтервальних експериментів. Запропонований метод може широко використовуватися в задачах побудови інтервальних моделей з заданими прогностичними властивостями.

Література

1. Дивак М.П. Використання насиченого експерименту для оцінювання параметрів інтервальної моделі при аналізі інтервальних даних // Автоматика. Автоматизация. Электротехнические комплексы и системы. – 1999. – № 2. – с. 33–36.
2. Дивак М.П. Метод локалізації гарантованих оцінок в задачах параметричної ідентифікації // Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах. – 2000. №4. - с.12-17.
3. Дивак М.П. Задачі математичного моделювання статичних систем з інтервальними даними: монографія // Тернопіль: Економічна думка, 2011. – 216 с.
4. Дивак М.П., Стахів П.Г. Реалізація методу локалізації параметрів інтервальних моделей з виділенням насиченого блоку експерименту на паралельних обчислювальних графах. // Електроніка и связь. – 2001. №12. – с. 120-124.
5. Кунцевич В., Лычак М. Получение гарантированных оценок в задачах параметрической идентификации // Автоматика. – 1982. – № 4. – с. 49-59.

6. Куржанский А.Б. Задача идентификации – теория гарантированных оценок // Автоматика и телемеханика. – 1991. – № 4. – с. 3–26.
7. Dyvak M., Manzhula V., Kozak O., New method tolerance estimation of the parameters set of interval model based on saturated block of ISLAE // Proceeding of the IX–th International Conference CADSM'2007. – Lviv–Polyana, 2007. – p. 376–379.
8. Dyvak M., Oliynyk I., Kasatkina N. Reduction of Interval Equations for Interval System of Linear Algebraic Equations // Modern Problems of Radio Engineering, Telecommunications and Computer Science of abstracts of the 13th International Conference TCSET'2016. – Lviv-Slavsko, Ukraine. – February 23-26, 2016. P. 128-131.
9. Dyvak, M., Pukas, A. Criterion of design of experiments for tasks of decision support interval model creation // Proceedings of the Third Workshop – 2005 IEEE Intelligent Data Acquisition and Advanced Computing Systems: Technology and Applications, IDAACS 2005, p.495-497, 2005.
10. Dyvak M., Pukas A. Identification of the static system interval models by application of optimal localization experiment // The Experience of Designing and Application of CAD Systems in Microelectronics. Proc. of the VII Intern. Conf. – Lviv-Slavske: National University „Lviv Polytechnic”, 2003. – P. 180-184.
11. Dyvak M., Pukas A. and Kozak O. Tolerance estimation of parameters set of models created on experimental data //Modern Problems of Radio Engineering, Telecommunications and Computer Science» 2008 Proceedings of International Conference on, Lviv-Slavsko, 2008, p. 24-26.
12. Dyvak M., Pukas A., Stakhiv P. Algorithms of Parallel Calculations in Task of Tolerance Ellipsoidal Estimation of Interval Model Parameters // Bulletin of the Polish Academy of sciences – Technical sciences, ISSN 0239-7528, Vol. 60, Issue 1, 2012, p.159-164.
13. Götz Alefeld and Jürgen Herzberger. Introduction to interval computations, Computer Science and Applied Mathematics // Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York, 1983.
14. Kurzhanski A. and Valyi I., Ellipsoidal Calculus for Estimation and Control. // Birkhauser, Berlin, 1997.
15. Letzky E., Voshinin A., Dyvak M., Simoff S., Orlov A., Gorsky V., Nikitina E., Nosov V. Design of experiments and data analysis: New trends and results // Moscow, ANTAL, 1993, 192 pages.
16. Shary S.P. Algebraic Approach to the Interval Linear Static Identification, Tolerance, and Control Problems, or One More Application of Kaucher Arithmetic. // Reliable Computing 2(1) (1996), p. 3–33.
17. Walter E. and Pronzato L. Identification of parametric model from experimental data. // London, Berlin, Heidelberg, New York, Paris, Tokyo: Springer, 1997. – 413 p.
18. Wu C. F. J., Hamada M. S., Experiments: Planning, Analysis and Optimization // Wiley, 2009, 743 p.