УДК 517.92

И.М. ИСКАНАДЖИЕВ

НИЖНИЙ АЛЬТЕРНИРОВАННЫЙ ИНТЕГРАЛ ПОНТРЯГИНА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ

Аннотация. Рассмотрены упрощенные схемы построения нижнего альтернированного интеграла Понтрягина для игр преследования, описываемых дифференциальными включениями вида $z(t) \in F(t,u)$, где F — непрерывное компактнозначное отображение. Показано, что для начальных состояний, к которым применим нижний альтернированный интеграл, существует стратегия преследователя, гарантирующая точное завершение преследования и имеющая кусочно-постоянные реализации.

Ключевые слова: нижний альтернированный интеграл, частичные суммы, дифференциальное включение, стратегия, управление.

ВВЕДЕНИЕ

Понятие альтернированного интеграла, предложенное Л.С. Понтрягиным в [1, 2] для решения задачи преследования в линейных дифференциальных играх, оказалось целесообразным и в теории управления в условиях неопределенности, а также при решении задачи синтеза управлений [3]. Поскольку альтернированный интеграл зарекомендовал себя как эффективное средство для решения задачи преследования и управления, развитию соответствующей теории посвящено много исследований, например [4–18]. В частности, в работе [4] введено понятие нижнего альтернированного интеграла Понтрягина (альтернированный интеграл Понтрягина был назван верхним альтернированным интегралом), доказана двойственность между верхним и нижним альтернированными интегралами и приведено ее приложение к проблеме информированности игроков в задаче преследования (см. также [5, 6]).

В настоящей работе изучаются аппроксимативные свойства нижнего альтернированого интеграла для игр преследования, описываемых дифференциальными включениями вида $z(t) \in F(t,u)$, где F — непрерывное компактнозначное отображение [5], и доказано существование кусочно-постоянной стратегии преследователя, завершающей преследования из тех начальных точек, к которым применим нижний альтернированный интеграл.

Используем следующие обозначения: K^d (соответственно $\operatorname{co} K^d$) — семейство всех непустых компактных (выпуклых компактных) подмножеств R^d; $H = \{z \in R^d \,|\, |z| \le 1\}$ — единичный замкнутый шар в R^d. Для любого $A, B \in K^d$ определим $h(A,B) = \min\{r \ge 0 \,|\, A \subset B + rH,\ B \subset A + rH\}$ — метрику Хаусдорфа; $I = [\alpha, \beta]$ — фиксированный отрезок времени; Δ — подотрезок I; $|\Delta|$ — длина отрезка Δ; $\omega = \{\tau_0, \tau_1, \tau_2, \tau_3, \ldots, \tau_n\}$ — разбиение отрезка I ($\alpha = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots$ $\ldots < \tau_n = \beta$, n может зависеть от ω); Ω — совокупность всех разбиений отрезка I; $\Delta_i = [\tau_{i-1}, \tau_i]$; $\delta_i = |\Delta_i|$; $|\omega| = \max |\delta_i|$ — диаметр разбиения ω; $\int_i$ — интеграл по отрезку Δ_i. Если X — подмножество евклидова пространства, то $X[\Delta]$ обозначим совокупность всех измеримых функций $a(\cdot) : \Delta \to X$; в случае $\Delta = [\alpha, \beta]$ пишем $X[\alpha, \beta]$.

УПРОЩЕННЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ НИЖНЕГО АЛЬТЕРНИРОВАННОГО ИНТЕГРАЛА

Рассмотрим дифференциальное включение

$$z(t) \in F(t,u), \tag{1}$$

где $z \in R^d$, $u \in P$, $t \in I$ и $F: I \times P \to \operatorname{co} K^d$ непрерывно, $P \in K^d$. Наряду с системой (1) фиксируется также подмножество M, $M \subset R^d$, называемое терминальным множеством. Каждому разбиению ω, $\omega \in \Omega$, ставим в соответствие множество $S(\omega)$, называемое нижней альтернированной суммой, определяемое следующим образом:

$$S_n = M, \; S_{i-1} = \bigcup_{u(\cdot) \in P(\Delta_i)} \left[S_i \overset{*}{-} \int_i F(t, u(t)) dt \right], \; S(\omega) = S_0 \tag{2}$$

($\overset{*}{-}$ — операция геометрической разности (см. [1]).

Множество $W(M, \alpha, \beta) = \bigcup\limits_{\omega \in \Omega} S(\omega)$ называется нижним альтернированным интегралом Понтрягина (введено в [4], обобщение на линейные нестационарные игры рассмотрено в [6], нелинейный аналог определен в [7]).

По мере необходимости в последующих обозначениях указывается зависимость сумм и интегралов не только от ω или α, β, но и от других исходных данных, например $S_1(M)$, $S(\omega, P, Q)$, $W(M, \alpha, \beta, F)$. Кроме того, в случае $I = [0, \tau]$ пишем $W_\tau(M)$ или просто W_τ.

В [8] предложена первая упрощенная схема построения верхнего альтернированного интеграла, в которой упомянутая операция заменяется существенно более простой — объединением по векторам. Другие упрощенные схемы для верхнего альтернированного интеграла предложены в [5].

Нижний альтернированный интеграл при составлении частичных альтернированных сумм определяется (см. (2)) с помощью операции объединения по всем измеримым вектор-функциям $u(\cdot) \in P|\Delta_i|$. Возникает вопрос, можно ли в формулах (2) альтернированных сумм объединение по функциям заменить более простой операцией. Вначале покажем, что в формулах (2) можно ограничиться объединением по кусочно-постоянным функциям, затем — по постоянным функциям. В дальнейшем будут использованы следующие утверждения.

Лемма 1 [4]. Пусть $X_\lambda \subset R^d$ — неубывающая направленность открытых множеств и $Y \in K^d$. Тогда имеет место равенство

$$\left(\bigcup_\lambda X_\lambda \right) \overset{*}{-} Y = \bigcup_\lambda (X_\lambda \overset{*}{-} Y). \tag{3}$$

Отметим, что для произвольного семейства X_λ справедливо включение

$$\left(\bigcup_\lambda X_\lambda \right) \overset{*}{-} Y \subset \bigcup_\lambda (X_\lambda \overset{*}{-} Y). \tag{3$'$}$$

Определение. Пусть $\Delta \subset I$ и $Z^0(\Delta)$ — совокупность сужений функций $z(\cdot) \in Z^0(I)$ на Δ. Подмножество $Z^0(I)$ назовем наследственно плотным $Z(I)$, если для каждого подотрезка $\Delta \subset I$ совокупность $Z^0(\Delta)$ плотна в $Z(\Delta)$.

Лемма 2. Пусть L — открытое подмножество R^d, Δ — отрезок, $\Delta \subset I$, и совокупность $P^0(\Delta)$ плотна в $P(\Delta)$. Тогда имеет место равенство

$$\bigcup_{u(\cdot) \in P(\Delta)} \left[L \overset{*}{-} \int_\Delta F(t, u(t)) dt \right] = \bigcup_{u^0(\cdot) \in P^0(\Delta)} \left[L \overset{*}{-} \int_\Delta F(t, u(t)) dt \right]. \tag{4}$$

Доказательство. Очевидно, что правая часть (4) содержится в его левой части. С помощью леммы 1 легко видеть, что

$$\bigcup_{\varepsilon>0}\ \bigcup_{u(\cdot)\in P(\Delta)}\left[L_-^*\left(\int_\Delta F(t,u(t))dt+(2\lambda+|\Delta|)\varepsilon H\right)\right]=\bigcup_{u(\cdot)\in P(\Delta)}\left[L_-^*\int_\Delta F(t,u(t))dt\right], \quad (5)$$

где $\lambda=\max\{h(0,F(t,u)),\ t\in I,\ u\in P\}$, $|\Delta|$ — длина отрезка Δ. Пусть x — произвольный элемент из левой части (4). Тогда в силу (5) для некоторого $u(\cdot)\in P(\Delta)$ и $\varepsilon>0$ имеем

$$x+\int_\Delta F(t,u(t))dt+(2\lambda+|\Delta|)\varepsilon H\subset L. \quad (6)$$

Согласно условию леммы существует последовательность $u_k\in P^0(\Delta)$, сходящаяся к $u(\cdot)$ почти везде на отрезке Δ. Отображение F, как непрерывное на компакте $I\times P$, равномерно непрерывно. Поэтому для любого $\varepsilon>0$ найдем $\eta>0$ так, чтобы

$$h(F(t,u),\ F(t,\bar{u}))\le\varepsilon \quad (7)$$

при $t\in\Delta,\ u\in P,\ \bar{u}\in P,\ |u-\bar{u}|\le\eta$. По теореме Егорова существует открытое множество $\bar{\Delta}\subset\Delta$ с мерой $\mu(\bar{\Delta})<\varepsilon$ такое, что $u_k(\cdot)\to u(\cdot)$ равномерно на множестве $\Delta\setminus\bar{\Delta}$. Тогда для $\eta>0$ существует N такое, что для любого $k>N$ выполняется неравенство $|u_k(\cdot)-u(\cdot)|<\eta$ для всех $t\in\Delta\setminus\bar{\Delta}$. Поэтому в силу (7)

$$F(t,u_k(t))\subset F(t,u(t))+\varepsilon H,\ F(t,u(t))\subset F(t,u_k(t))+\varepsilon H \quad (8)$$

для всех $t\in\Delta\setminus\bar{\Delta}$ и $k>N$.

Согласно включению (8) имеем

$$\int_\Delta F(t,u_k(t))dt\subset\int_{\Delta\setminus\bar{\Delta}}F(t,u(t))dt+(|\Delta|+\lambda)\varepsilon H. \quad (9)$$

Очевидно, что $0\in\int_{\bar{\Delta}}F(t,u(t))dt+\lambda\varepsilon\mathrm{H}$, поэтому

$$\int_\Delta F(t,u_k(t))dt\subset\int_\Delta F(t,u(t))dt+(|\Delta|+2\lambda)\varepsilon H.$$

Отсюда в силу включения (6) получим $x+\int_\Delta F(t,u_k(t))dt\subset L$. Более того,

$$x\in\bigcup_{u^0(\cdot)\in P^0(\Delta)}\left[L_-^*\int_\Delta F(t,u^0(t))dt\right],$$

что и требовалось доказать.

С помощью леммы 2 непосредственно доказывается следующая теорема.

Теорема 1. Пусть M — открытое подмножество R^d, совокупность $P^0(I)$ наследственно плотна в $P(I)$ и $\omega\in\Omega$. Пусть также

$$A_n^0=M,\ A_{i-1}^0=\bigcup_{u^0(\cdot)\in P^0(\Delta_i)}\left[A_i^{0*}{}_-\int_i F(t,u^0(t))dt\right],\ A^0(\omega)=A_0^0.$$

Тогда $W(M,\alpha,\beta)=\bigcup_{\omega} A^0(\omega)$. В дальнейшем семейство кусочно-постоянных функций $u(\cdot): I \to P$ будем обозначать $P(I)$. В силу компактности множества P совокупность $P(I)$ наследственно плотна в $P(I)$.

Следствие 1. Пусть M — открытое подмножество R^d,

$$A_n = M,\ A_i = \bigcup_{u(\cdot)\in P(\Delta_i)} \left[A_{i-1} \overset{*}{\underset{-}{}} \int_i F(t,u(t))dt \right],\ A(\omega) = A_0 .$$

Тогда $W(M,\alpha,\beta)=\bigcup_{\omega} A(\omega)$.

Примечание. Отметим, что аналоги теоремы 1 и следствие 1 для верхнего альтернированного интеграла приведены в [5].

Пусть $\omega \in \Omega$ и $B_n = M,\ B_{i-1} = \bigcup_{u\in P} \left[B_i \overset{*}{\underset{-}{}} \int_i F(t,u)dt \right],\ B(M) = B_0$.

В дальнейшем изучим свойства интеграла $B(M,\alpha,\beta)=\bigcup_{\omega} B(M,\omega)$. Отметим, что множество $B(M,\alpha,\beta)$ отличается от $W(M,\alpha,\beta)$ тем, что в определении $B(M,\alpha,\beta)$ вместо произвольных функций $u(\cdot)\in P$ берутся только постоянные вектора $u\in P$. Отсюда нетрудно увидеть справедливость следующих лемм.

Лемма 3. Если $\omega_1,\omega_2 \in\Omega$ и $\omega_1 \subset \omega_2$, то $B(M,\omega_1)\subset B(M,\omega_2)$.

Лемма 4. Пусть $M_\lambda \subset R^d$ — неубывающая направленность открытых подмножеств R^d. Тогда имеет место равенство $\bigcup_{\lambda} B(M_\lambda) = B(\bigcup_{\lambda} M_\lambda)$.

Пусть $\Omega(\Delta)$ — совокупность всех разбиений отрезка Δ, $\Delta \subset I$.

Лемма 5. Пусть $L \subset R^d$. Тогда справедливо включение

$$\bigcup_{u(\cdot)\in P(\Delta)} \left[L \overset{*}{\underset{-}{}} \int_i F(t,u(t))dt \right] \subset \bigcup_{\omega\in\Omega(\Delta)} B(L,\omega). \tag{10}$$

Доказательство. Пусть x — произвольный элемент из левой части (10). Тогда для некоторого $u(\cdot)\in P(\Delta)$ выполняется включение $x \in L \overset{*}{\underset{-}{}} \int_\Delta F(t,u(t))dt$.

Будем считать, что $u(t)=u_j$ при $t\in[t_{j-1},t_j]$, где $t_0 < t_1 < t_2 <\ldots< t_m$ и $\Delta = [t_0, t_m]$. Тогда $x \in L \overset{*}{\underset{-}{}} \sum_{j=1}^{m} \int_\Delta F(t,u_j(t))dt$. Отсюда вытекает

$$x \in \bigcup_{u\in P} \left\{ \ldots \left\{ \bigcup_{u\in P} \left\{ \bigcup_{u\in P} \left(L \overset{*}{\underset{-}{}} \int_{\Delta_m} F(t,u)dt \right) \right\} \overset{*}{\underset{-}{}} \int_{\Delta_{m-1}} F(t,u)dt \right\} \overset{*}{\underset{-}{}} \cdots \overset{*}{\underset{-}{}} \int_{\Delta_1} F(t,u)dt \right\}.$$

Следовательно, $x \in \bigcup_{\omega\in\Omega(\Delta)} B(L,\omega)$. Лемма 5 доказана.

Теорема 2. Пусть M — открытое подмножество R^d. Тогда $W(M,\alpha,\beta) = B(M,\alpha,\beta)$.

Доказательство. Очевидно, что $W(M,\alpha,\beta)\supset B(M,\alpha,\beta)$. Докажем обратное включение. В силу следствия 1 достаточно показать, что

$$\bigcup_{\omega} A(\omega) \subset B(M,\alpha,\beta). \tag{11}$$

Пусть x — произвольный элемент из левой части включения (11). Тогда $x \in A(M,\omega)$ для некоторого $\omega \in \Omega$. По определению

$$A(M,\omega) = A_0 = \bigcup_{u(\cdot)\in P(\Delta_0)} \left[A_1 \overset{*}{-} \int_1 F(t,u(t))dt \right].$$

Применив лемму 5 к правой части этого включения, получим

$$A(M,\omega) \subset \bigcup_{\omega\in\Omega(\Delta_1)} B(A_1,\omega).$$

Повторно применяя лемму 5 к множеству A_1, имеем

$$A(M,\omega) \subset \bigcup_{\omega\in\Omega(\Delta_1)} B\left(\bigcup_{\omega\in\Omega(\Delta_2)} B(A_2,\omega),\omega \right).$$

Воспользовавшись леммами 4 и 5, приходим к соотношению

$$A(M,\omega) \subset \bigcup_{\omega\in\Omega(\alpha,\tau_2)} B(A_2,\omega).$$

Повторяя эти рассуждения $n-2$ раза, получаем

$$A(M,\omega) \subset \bigcup_{\omega\in\Omega(\alpha,\tau_n)} B(A_n,\omega).$$

Отсюда следует включение (11).

Теорема 2 доказана.

Лемма 6. Пусть M — открытое подмножество R^d и ω_n — бесконечно измельчающаяся последовательность разбиений из Ω, т.е. $\omega_n \subset \omega_{n+1}$, $|\omega_n| \to 0$ при $n\to\infty$. Тогда справедливо равенство $B(M,\alpha,\beta) = \bigcup_{k\ge1} B(M,\omega_k)$.

Доказательство. Пусть ω — произвольное разбиение из Ω. Величины, относящиеся к разбиению ω_k, будем обозначать индексами k, например $\tau_{j(k)}$ — точка деления этого разбиения, $j=\overline{1,n_k}$. Очевидно, существует такое N, что $|\omega_k| < \frac{1}{4}\min_{1\le i\le n} \delta_i$ при $k>N$.

В дальнейшем это условие будем считать выполненным. Для каждого i обозначим $j(i)$ первое значение индекса j, доставляющего минимум $\min_{1\le j\le n_k} |\tau_{j(k)} - \tau_i|$. При $k>N$ числа $\overline{\tau}_i^{(k)} = \tau_{j(i)}^{(k)}$, $i=\overline{1,n}$, попарно различны и образуют определенное разбиение $\overline{\omega_k}$, которое имеет с ω одинаковое число точек деления. Объекты, относящиеся к разбиению $\overline{\omega}_k$, будем выделять идентичными знаками, как в обозначении $\overline{\tau}_i^{(k)}$. Величина $\chi_k = \max_{1\le i\le n_k} |\tau_i - \overline{\tau}_i^{(k)}|$ характеризует отклонение $\overline{\omega}_k$ от ω. Непосредственно проверяется следующее включение:

$$\int_{\Delta i} F(t,u)dt \overset{*}{-} 2\lambda\chi_k H \subset \int_{\overline{\Delta}_i} F(t,u)dt, \tag{12}$$

где $\lambda = \sup\{h(0,F(t,u)) \mid t\in I,\ u\in P\}$.

Далее частичные суммы $\overline{B_i}$, соответствующие разбиению $\overline{\omega}_k$, оценим снизу частичными суммами B_i, соответствующими разбиению $\overline{\omega}_k$. В силу включения (12) имеем

$$B_n = M,\ B_{n-1}(M \overset{*}{-} 2\lambda\chi_k H) = \bigcup_{u\in P}\left[M \overset{*}{-} 2\lambda\chi_k H \overset{*}{-} \int_{\Delta_n} F(t,u)\right] \subset$$

$$\subset \bigcup_{u\in P}\left[M \overset{*}{-} \int_{\overline{\Delta}_n} F(t,u)dt\right]\overline{B}_{n-1}(M).$$

Повторив аналогичные рассуждения несколько раз, приходим к включению $B(M \overset{*}{-} 2\lambda n\chi_k H, \omega) \subset \overline{B}(M, \overline{\omega}_k)$. Отсюда следует

$$\bigcup_{k\ge N} B(M \overset{*}{-} 2\lambda n\chi_k H, \omega) \subset \bigcup_{k\ge 1} \overline{B}(M, \overline{\omega}_k). \tag{12'}$$

Согласно условию леммы $\omega_k \subset \omega_{k+1}$. Из определения величины χ_k следует $\chi_{k+1} \le \chi_k$. Поэтому $B(M \overset{*}{-} 2\lambda n\chi_k H)$ образуют неубывающую направленность открытых множеств. Далее, применив лемму 1 к левой части соотношения (12′), получим

$$B\left(\bigcup_{k\ge N}(M \overset{*}{-} 2\lambda n\chi_k H), \omega\right) \subset \bigcup_{k\ge 1} \overline{B}(M, \overline{\omega}_k).$$

Учитывая, что число точек деления n разбиения ω не зависит от k и $\chi_k \to 0$ при $k \to \infty$, приходим к соотношению

$$B(M,\omega) \subset \bigcup_{k\ge 1} \overline{B}(M,\omega).$$

Отсюда в силу произвольности ω получим $\bigcup\limits_{\omega} B(M,\omega) \subset \bigcup\limits_{k\ge 1} B(M, \overline{\omega}_k)$. Обратное включение очевидно.

Лемма 6 доказана.

Пусть $\varepsilon = (\beta - \alpha)/n$, $n \in N^+$ (N^+ — множество всех целых положительных чисел). Множество всех равномерных разбиений $\omega = \{\alpha, \alpha+\varepsilon, \alpha+2\varepsilon, \ldots, \alpha+n\varepsilon = \beta\}$ отрезка $[\alpha,\beta]$ обозначим Ω^*.

Следствие 2. Пусть M — открытое подмножество R^d. Тогда справедливо равенство

$$B(M,\alpha,\beta) = \bigcup_{\omega} B(M,\omega), \quad \omega \in \Omega^*.$$

Примечание. Отметим, что лемма 6 и следствие 2 справедливы для интеграла $W(M,\alpha,\beta)$.

РЕКУРРЕНТНАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ НИЖНЕГО АЛЬТЕРНИРОВАННОГО ИНТЕГРАЛА

Теорема 3. Пусть M — открытое подмножество R^d. Тогда справедливо равенство

$$B(M,\alpha,\beta) = \bigcup_{\varepsilon}\bigcup_{\alpha\in P}\left[B(M,\alpha+\varepsilon,\beta) \overset{*}{-} \int_{\alpha}^{\alpha+\varepsilon} F(t,u)dt\right], \tag{13}$$

где объединение берется по всем $\varepsilon = (\beta-\alpha)/n$, $n \in N^+$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon = (\beta-\alpha)/n$ — некоторое положительное число и $\Omega^{(\varepsilon)}$ — совокупность разбиений ω отрезка $[\alpha,\beta]$ таких, что $\alpha+\varepsilon$ является одной из точек деления. Очевидно, что $B(M,\alpha,\beta)\supset\bigcup\limits_{\omega}B(M,\omega),\ \omega\in\Omega^{(\varepsilon)}$.

Пусть ω — произвольное разбиение из $\Omega^{(\varepsilon)}$, а именно $\omega=\{\alpha\tau_0<\tau_1<\ldots$ $\ldots<\tau_{l-1}<\tau_l=\alpha+\varepsilon<\tau_{l+1}<\ldots<\tau_{n-1}<\beta\}$. Выражая сумму $B(\omega)$ через B_2, получим

$$B(\omega)=B_0=\bigcup_{u\in P}\left\{\left[\bigcup_{u\in P}(B_2\overset{*}{-}\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}F(t,u)dt\right]\overset{*}{-}\int\limits_{\alpha}^{\tau_1}F(t,u)dt\right\}.$$

Пользуясь свойством (3′), имеем

$$B(\omega)\supset\bigcup_{u\in P}\left[B_2\overset{*}{-}\int\limits_{\alpha}^{\tau_2}F(t,u)dt\right].$$

Повторение этих рассуждений приводит к соотношению

$$B(\omega)\supset\bigcup_{u\in P}\left[B_l\overset{*}{-}\int\limits_{\alpha}^{\alpha+\varepsilon}F(t,u)dt\right]$$

(здесь учтено $\tau_l=\alpha+\varepsilon$), поэтому

$$\bigcup_{\omega\in\Omega^{(\varepsilon)}}B(\omega)\supset\bigcup_{u\in P}\bigcup_{\omega'}\left[B(\omega')\overset{*}{-}\int\limits_{\alpha}^{\alpha+\varepsilon}F(t,u)dt\right],$$

где крайнее справа объединение берется по всем разбиениям ω' отрезка $[\alpha+\varepsilon,\beta]$. Пусть ω_k — произвольная монотонно измельчающаяся последовательность разбиений отрезка $[\alpha+\varepsilon,\beta]$. Тогда очевидно, что

$$B(M,\alpha,\beta)\supset\bigcup_{u\in P}\bigcup_{\omega_k}\left[B(\omega_k)\overset{*}{-}\int\limits_{\alpha}^{\alpha+\varepsilon}F(t,u)dt\right]. \tag{14}$$

Далее, применив леммы 1и 6 к правой части (14), получим

$$B(M,\alpha,\beta)\supset\bigcup_{u\in P}\left[B(M,\alpha+\varepsilon,\beta)\overset{*}{-}\int\limits_{\alpha}^{\alpha+\varepsilon}F(t,u)dt\right].$$

Отсюда в силу произвольности ε следует

$$B(M,\alpha,\beta)\supset\bigcup_{\varepsilon}\bigcup_{u\in P}\left[B(M,\alpha+\varepsilon,\beta)\overset{*}{-}\int\limits_{\alpha}^{\alpha+\varepsilon}F(t,u)dt\right].$$

Теперь докажем справедливость обратного включения. Для этого достаточно установить, что для любых $\omega\in\Omega$ и $\varepsilon=(\beta-\alpha)/n,\ n\in N^+$, имеет место соотношение

$$B(M\overset{*}{-}2\lambda\varepsilon H,\omega)\supset\bigcup_{u\in P}\left[B(M,\alpha+\varepsilon,\beta)\overset{*}{-}\int\limits_{\alpha}^{\alpha+\varepsilon}F(t,u)dt\right].$$

С этой целью выберем произвольные разбиения $\omega\in\Omega$ и $\varepsilon=(\beta-\alpha)/n,\ n\in N^+$.

Будем считать $\alpha+\varepsilon\in[\tau_{l-1},\tau_l]$. Отметим, что $B_n(M\overset{*}{-}2\lambda\varepsilon H)=M\overset{*}{-}2\lambda\varepsilon H=$ $=B_n(M)\overset{*}{-}2\lambda\varepsilon H$. Чтобы избежать громоздких формул, положим $\int_\alpha^\beta F(t,u)dt=$ $=F_\alpha^\beta[u]$. Пусть $B_{l+1}(M\overset{*}{-}2\lambda\varepsilon H)\subset B_{l+1}(M)\overset{*}{-}2\lambda\varepsilon H$. Тогда

$$B_l(M\overset{*}{-}2\lambda\varepsilon H)=\bigcup_{u\in P}[B_{l+1}(M\overset{*}{-}2\lambda\varepsilon H)\overset{*}{-}F_{\tau_1}^{\tau_1+1}[u]]\subset$$

$$\subset\bigcup_{u\in P}[B_{l+1}(M)\overset{*}{-}2\lambda\varepsilon H\overset{*}{-}F_{\tau_1}^{\tau_1+1}[u]].$$

Пользуясь соотношением (3′), имеем

$$B_l(M\overset{*}{-}2\lambda\varepsilon H)\subset\left\{\bigcup_{u\in P}[B_{l+1}(M)\overset{*}{-}F_{\tau_1}^{\tau_1+1}[u]]\right\}\overset{*}{-}2\lambda\varepsilon H=B_l(M)\overset{*}{-}2\lambda\varepsilon H. \quad (15)$$

Далее, в силу (15) получим

$$B_{l-1}(M\overset{*}{-}2\lambda\varepsilon H)\subset\bigcup_{u\in P}[(B_l(M)\overset{*}{-}2\lambda\varepsilon H)F_{\tau_1}^{\tau_1+1}[u]].$$

Снова используя соотношения (3′), получим

$$B_{l-1}(M\overset{*}{-}2\lambda\varepsilon H)\subset\bigcup_{u\in P}\left[\bigcup_{u\in P}(B_{l+1}(M)\overset{*}{-}F_\alpha^{\tau_1}[u])\overset{*}{-}(F_{\tau_l-1}^{\alpha+\varepsilon}[u]\overset{*}{-}2\lambda\varepsilon H)\right].$$

Отметим, что $\bigcup_{u\in P}\left(B_l(M)\overset{*}{-}\int_{\alpha+\varepsilon}^{\tau_1}F(t,u)dt\right)\subset B(M,\alpha+\varepsilon,\beta)$ и $F_\alpha^{\alpha+\varepsilon}\subset\lambda\varepsilon H$. Поэтому

$$B_{l-1}(M\overset{*}{-}2\lambda\varepsilon H)\subset\bigcup_{u\in P}\{(B_{l+1}(M,\alpha+\varepsilon,\beta)\overset{*}{-}2\lambda\varepsilon H)\overset{*}{-}(F_{\tau_l-1}^{\alpha+\varepsilon}[u]+\lambda\varepsilon H)\}\subset$$

$$\subset\bigcup_{u\in P}\left\{\bigcup_{u\in P}\left[B(M,\alpha+\varepsilon,\beta)\overset{*}{-}\int_\alpha^{\alpha+\varepsilon}F(t,u)dt\right]\overset{*}{-}F_{\tau_l-1}^{\alpha+\varepsilon}[u]+\lambda\varepsilon H\right\}.$$

Временно положим

$$\bigcup_{u\in P}\left[(B_l(M,\alpha+\varepsilon,\beta)\overset{*}{-}\int_\alpha^{\alpha+\varepsilon}F(t,u)dt)=Y(M,\alpha+\varepsilon,\beta)\right].$$

Тогда

$$B_{l-1}(M\overset{*}{-}2\lambda\varepsilon H)\subset\bigcup_{u\in P}[Y(M,\alpha+\varepsilon,\beta)\overset{*}{-}(F_{\tau_1}^{\tau_1+1}[u]\overset{*}{-}\lambda\varepsilon H)].$$

Если учесть, что $0\in F_{\tau_l-1}^{\alpha+\varepsilon}+\lambda(\alpha+\varepsilon-\tau_{l-1})H$, то

$$B_{l-1}(M\overset{*}{-}2\lambda\varepsilon H)\subset Y(M,\alpha+\varepsilon,\beta)\overset{*}{-}\lambda(\tau_{l-1}-\alpha)H.$$

Повторяя эти рассуждения еще $l-1$ раз, приходим к соотношению

$$B(M\overset{*}{-}2\lambda\varepsilon H,\omega)=B_0(M\overset{*}{-}2\lambda\varepsilon H)\subset Y(M,\alpha+\varepsilon,\beta)\overset{*}{-}(\tau_0-\alpha)H=Y(M,\alpha+\varepsilon,\beta).$$

Перейдя к объединению по $\varepsilon=(\beta-\alpha)/n,\ n\in N^{+}$, и применив лемму 1 к левой части этого включения, получим

$$B(M,\omega)\subset\bigcup_{\varepsilon}\bigcup_{u\in P}\left[B(M,\alpha+\varepsilon,\tau)\underline{*}\int_{\alpha}^{\alpha+\varepsilon}F(t,u)dt\right],$$

где объединение берется по всем $\varepsilon=(\beta-\alpha)/n,\ n\in N^{+}$.

Вследствие произвольности $\omega\in\Omega$ имеем

$$B(M,\alpha,\beta)\subset\bigcup_{\varepsilon}\bigcup_{u\in P}\left[B(M,\alpha+\varepsilon,\beta)\underline{*}\int_{\alpha}^{\alpha+\varepsilon}F(t,u)dt\right].$$

Теорема 3 доказана.

Следствие 3. Пусть M — открытое подмножество R^{d}. Тогда справедливо равенство

$$B(M,\alpha+\beta)=\bigcup_{\varepsilon}\bigcup_{u\in P}\left[B(M,\alpha+\varepsilon,\beta)\underline{*}\int_{\alpha}^{\alpha+\varepsilon}F(t,u)dt\right]. \tag{16}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ НИЖНЕГО АЛЬТЕРНИРОВАННОГО ИНТЕГРАЛА К ИГРАМ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ, ОПИСЫВАЕМЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ

Изложим некоторые приложения нижнего альтернированного интеграла к играм преследования, описываемых дифференциальным включением вида (1).

Определение 1. Стратегией преследователя назовем пару $\mathbf{U}=\{\omega,U\}$ таких, что $\omega=\{0=\tau_0<\tau_1<\ldots<\tau_{n-1}<\tau_n=\tau\}$ — разбиение отрезка $I=[0,\tau]$; $U=\{U_i\}$ — семейства операторов $U_i:R^{d}\to P[\Delta_{i+1}]$, $i=\overline{0,n-1}$. Совокупность всех таких стратегий преследователя обозначим P_*.

Определение 2. Стратегией убегающего назовем семейство $\mathbf{V}=\{V_i\}$ операторов V_i, каждый из которых паре $\xi\in R^{d}$, $u_i(\cdot)\in P[\Delta_{i+1}]$ ставит в соответствие измеримое однозначное сечение $v(t)$ отображения $F(t,u_i(t))$ на отрезке Δ_{i+1}. Совокупность всех таких стратегий убегающего обозначим Q^{*}. Игру, определяющую класс стратегий P_* и Q^{*}, назовем нижней игрой и обозначим G_*.

Траектория $z(t)=z(t,z_0,\mathbf{V},\mathbf{U})$, соответствующая точке z_0, стратегиям убегающего $\mathbf{V}$ и преследователя $\mathbf{U}$, определяется на отрезках $[0,\tau_k]$ индукцией по k. А именно, оператор U_0 точке z_0 ставит в соответствие функцию $u_0(\cdot)\in P[\Delta_1]$, т.е. $u_0(t)=U_0[z_0](t)$, а оператор V_0 точке z_0, измеримой функции $u_0(\cdot)\in P[\Delta_1]$ ставит в соответствие измеримое однозначное сечение $v_0(t)$ отображения $F(t,u_0(t))$ на отрезке Δ_1, т.е. $v_0(t)=V_0[z_0,u_0(\cdot)](t)$. Тогда траектория системы (1) на отрезке $\Delta_1=[0,\tau_1]$ определяется следующим образом: $z(t)=z_0+\int_0^t v_0(s)ds,\ v_0(t)=V_0[z_0,u_0(\cdot)](t),\ u_0(t)=U_0[z_0](t),\ t\in[0,\tau_1]$. Пусть траектория определена на отрезке $[0,\tau_k]$ и $z_k=z(\tau_k)$. Тогда траектория на отрезке $[\tau_k,\tau_{k+1}]$ определяется следующим образом:

$$z(t)=z_k+\int_{t_k}^{t}v_k(s)ds,\ \text{где}\ u_k(t)=U_k[z_k](t),$$

$$v_k(t)=V_k[z_k,u_k(\cdot)](t),\ t\in[\tau_k,\tau_{k+1}].$$

Функцию $u(t)=U[z_i]=u_i(t)$, $t\in\Delta_{i+1}$, назовем реализацией стратегий U.

Отметим, что преследователь для построения стратегий из класса P_* не пользуется информацией об управлении убегающего, а использует значение $z(t)$ в дискретные моменты времени τ_i, т.е. $z(\tau_i)$, и в этом отношении стратегии из класса P_* близки к нижним кусочно-программным стратегиям [17, 18].

Определение 3. Будем считать, что в игре G_* из точки z_0 можно завершить преследование за время τ, если существует стратегия преследователя $\mathbf{U}\in P_*$ такая, что при любом $\mathbf{V}\in Q^*$ для некоторого $t^*\in I$ имеет место включение $z(t^*, z_0, \mathbf{V}, \mathbf{U})\in M$. Пусть $I=[0,\tau]$ и положим $B_\tau = \bigcup\limits_{\omega\in\Omega} B(M,\omega)$.

Теорема 4. Если M — открытое подмножество R^d и $z_0\in W_\tau(M)$, то из точки z_0 можно завершить преследование за время τ в игре G_*. При этом соответствующую стратегию преследователя можно строить так, чтобы все ее реализации были кусочно-постоянными.

Доказательство. Пусть $z_0\in W_\tau(M)$. В силу теоремы 2 имеем $z_0\in B_\tau(M)$. Тогда из определения интеграла $B_\tau(M)$ следует включение $z_0\in B(M,\omega)$ для некоторого $\omega\in\Omega$. Следовательно, $z_0=\bigcup\limits_{u\in P}\left[B_1 \overset{*}{-} \int_0^{\tau_1} F(t,u)dt\right]$. Таким образом, существует постоянный вектор $u_0\in P[\Delta_1]$, для которого

$$z_0+\int_0^{\tau_1} v_0(s)ds\in B_1 \tag{17}$$

для любого $v_0(t)$ измеримого сечения отображений $F(t,u)$ на отрезке $[0,\tau_1]$. Если положить $U_0[z_0](t)=u_0$, то какова бы ни была стратегия $\mathbf{V}$ убегающего, траекторию $z(t,\mathbf{V},\mathbf{U})$ на отрезке $[0,\tau]$ определим следующим образом:

$$z(t)=z_0+\int_0^t v_0(s)ds,\ \text{где}\ v_0(t)=V_0[z_0,u_0](t),\ t\in[0,\tau_1].$$

Из (17) следует $z(\tau_1)\in B_1$. Аналогично можно продолжить построение стратегии $\mathbf{U}=\{\omega,U\}$ и в итоге получить включение $z(\tau_n)\in B_n$, т.е. $z(\tau)\in M$. Из построения стратегии $\mathbf{U}$ видно, что все ее реализации кусочно-постоянные, т.е $U_i(z_i)=u(t)=u_i\in P$, $t\in[t_i,t_{i+1}]$.

Теорема 4 доказана. Эту теорему можно также доказать, основываясь на рекуррентной формуле (13), и стратегия преследователя, которая строится на основе этого соотношения, улучшит время завершения преследования [2, 4].

Автор выражает искреннюю благодарность профессору А. Азамову за постоянное внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Понтрягин Л.С. О линейных дифференциальных играх // Доклады АН СССР. — 1967. — **175**, № 4. — С. 764–766.

2. Понтрягин Л.С. Линейные дифференциальные игры преследования // Математический сборник. — 1980. — **112**, № 3. — С. 307–330.

3. Куржанский А.Б., Мельников Н.Б. О задаче синтеза управлений: альтернированный интеграл Понтрягина и уравнение Гамильтона–Якоби // Математический сборник. — 2000. — **191**, № 6. — С. 69–100.

4. Азамов А. О втором методе Понтрягина в линейных дифференциальных играх // Математический сборник. — 1982. — **118**, № 3. — С. 422–430.

5. А з а м о в А. Полуустойчивость и двойственность в теории альтернированного интеграла Понтрягина // Доклады АН СССР. — 1988. — .**229**, № 2. — С. 265–268.

6. Н и к о л ь с к и й М. С. О нижнем альтернированном интеграле Понтрягина в линейных дифференциальных играх преследования // Математический сборник. — 1985. — **128**, № 1. — С. 35–49.

7. А з а м о в А. Об альтернативе для дифференциальных игр преследования–убегания на бесконечном интервале времени // Прикладная математика и механика. — 1986. — **50**, № 4. — С. 564–567.

8. Н и к о л ь с к и й М. С. Об альтернированном интеграле Л.С. Понтрягина // Математический сборник. — 1981. — **116**, № 4. — С. 136–144.

9. М и щ е н к о Е. Ф., С а т и м о в Н. Ю. Альтернированный интеграл в линейных дифференциалных играх с нелинейными управленями // Дифференциальные уравнения. — 1974. — **10**, № 12. — С. 2173–2178.

10. П ш е н и ч н ы й Б. Н. Структура дифференциальных игр // Доклады АН СССР. — 1969. — **184**, № 2. — С. 285–287.

11. П ш е н и ч н ы й Б. Н., С а г а й д а к М. И. О дифференциальных играх с фиксированным временем // Кибернетика. — 1970. — № 2. — С. 54–63.

12. П ш е н и ч н ы й Б. Н., О с т а п е н к о В. В. Дифференциальные игры. — Киев: Наук. думка, 1992. — 264 с.

13. П ш е н и ч н ы й Б. Н., Ч и к р и й А. А., Р а п п о п о р т И. С. Эффективный метод решения дифференциальных игр многими преследователями // Доклады АН СССР. — 1981. — **256**, № 3. — С. 530–535.

14. Ч и к р и й А. А. Конфликтно-управляемые процессы. — Киев: Наук. думка, 1992. — 384 с.

15. S i l i n D. On set-valued differentiation and integration // Set-Valued Anal. — 1997. — **5**, N 2. — P. 107–146.

16. A z a m o v A., I s k a n a d j i e v I. Alternating integral for differential inclusions with counteraction // Collected Paper. The Fifth International Conference Game Theory and Management, June 27–29, 2011. — St. Petersburg. — 2012. — **V.** — P. 33–44.

17. I s k a n a d j i e v I. Duality of the alternating integral for quasi-linear differential games // Nonlinear Analysis: Modeling and Control. — 2012. — **17**, N 2. — P. 169–181.

18. I s k a n a d j i e v I. On the Pontryagin lower alternating integral // Journal of Automation and Information Sciences. — 2013.— **45**, N 2. — P. 33–40.

19. П е т р о с я н Л. А., Т о м с к и й В. Г. Динамические игры и их приложения. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1977. — 220 с.

20. С у б б о т и н А. И., Ч е н ц о в А. Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. — М.: Наука, 1981. — 286 с.

Поступила 05.08.2014