УДК 519.1

В.Б. ПАВЛЕНКО

ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ РАЗРЕШАЮЩЕГО ПОЛИНОМА

Аннотация. Предложен метод, позволяющий отыскать решение системы уравнений для плоской триангуляции в заданных границах путем разбиения искомого графа на две области и составления разрешающего полинома. При этом составляется набор пар ребер гамильтонова цикла, в котором осуществляется поиск искомого цикла.

Ключевые слова: планарный граф, разбиение цикла, полином, гамильтонов цикл, перебор комбинаций.

Рассмотрим максимальный планарный граф G. Если он правильно раскрашивается четырьмя цветами, то в каждой его треугольной грани все ребра будут окрашены по-разному [1]. Обозначим номера этих цветов в виде двоичной записи $(00, 01, 10)$. Если первый и второй разряды двоичной записи обозначить x_i и y_i, $i = 1, 2, 3$, для любого треугольника, то раскраска ребер будет эквивалентна решению системы уравнений для каждого треугольника в кольце вычетов по модулю $2 - Z_2$:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\ 2) \\ y_1 + y_2 + y_3 \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\ 2) \\ x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\ 2). \end{cases} \tag{1}$$

Назовем y_i двойственными переменными к x_i. Согласно теореме Татта [2] рассматриваемый граф G будет гамильтоновым, разделяющим граф на две области: R_1 и R_2. Если для G построить двойственный граф G', то областям R_1 и R_2 будут соответствовать два произвольных дерева со степенью ветвления 3, соединяющиеся ребрами, двойственными к ребрам гамильтонова цикла. Рассмотрим случай, когда оба эти дерева являются простыми цепями. В качестве примера исследуем граф на рис. 1, где изображены области R_1 и R_2.

Пронумеруем области гамильтонова цикла по часовой стрелке. Как видим, внутренние ребра естественным образом упорядочиваются [3]. Обозначим по возрастанию слева направо a_i, $i = 1, 2, \dots$, переменные, соответствующие этим ребрам, и a'_i — двойственные переменные.

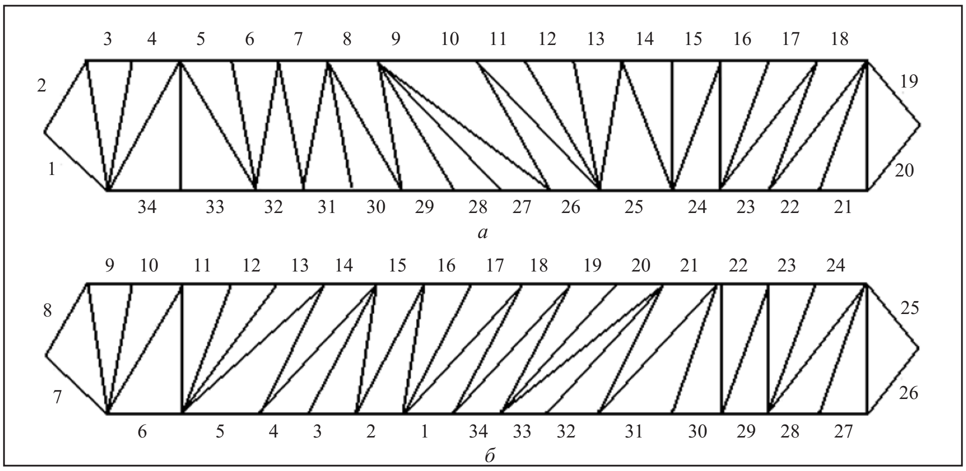

Рис. 1. Пронумерованные области R_1 (*а*) и R_2 (*б*)

Пользуясь соотношениями (1), выразим переменные a_n и a_i' через переменные, которыми обозначены ребра гамильтонова цикла:

$$a_1 = x_1 + x_2 + 1,$$

$$a_2 = x_1 + x_2 + x_3,$$

$$a_3 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.$$

$$a_1' = y_1 + y_2 + 1,$$

$$a_2' = y_1 + y_2 + y_3,$$

$$a_3' = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + 1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.$$

Видно, что возрастающей последовательности переменных a_i (и a_i') однозначно соответствует определенная последовательность ребер гамильтонова цикла (или переменных x и y) [4]. Обозначим эту последовательность S. Пусть S_i (S_i') — сумма первых i членов этой последовательности из переменных x (соответственно y). Последнее уравнение в (1) представим в виде $1 + x_i y_i = 1$ и применим его к переменным a_i и a_i'. Тогда получим

$$\begin{aligned} &1 + x_i y_i = 1, \\ &S_2 + S_2' + S_2 S_2' = 1, \\ &1 + S_3 S_3' = 1, \\ &S_4 + S_4' + S_4 S_4' = 1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. \\ &S_{32} + S_{32}' + S_{32} S_{32}' = 1, \\ &1 + S_{33} S_{33}' = 1. \end{aligned} \tag{2}$$

Назовем эту систему основной для области R_1. В результате произведения всех равенств получаем соотношение для размещения полинома в виде

$$F_1(X, Y) = 1. \tag{3}$$

Если найдется такая пара векторов (X, Y), которая удовлетворит (3), то можно решить систему (2), что задает некоторую правильную раскраску вершин искомого графа G (без учета ребер области R_2).

Легко увидеть, что область R_2 распадается на две части, каждой из которых соответствует свой опорный треугольник P и свой набор ребер Q гамильтонова цикла. Также как и для R_1, обозначим P_i (P_i') и Q_i (Q_i') сумму первых i членов последовательностей P и Q, составленных из переменных $x(y)$. Основная система для R_2 имеет вид

$$P_2 + P_2' + P_2 P_2' = 1,$$

$$1 + P_3 P_3' = 1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.$$

$$P_{20} + P_{20}' + P_{20} P_{20}' = 1,$$

$$Q_2 + Q_2' + Q_2 Q_2' = 1,$$

$$1+Q_3Q_3'=1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \tag{4}$$

$$1+Q_{13}Q_{13}'=1.$$

Назовем совместную систему (2) и (4) канонической системой графа G. Произведение всех равенств дает полином в виде $F_2(X,Y)=1$. Объединив оба полинома, получим разрешающий полином для всего графа

$$F_1(X,Y)=F_2(X,Y)=F(X,Y)=1. \tag{5}$$

По определению, если хотя бы один коэффициент этого полинома отличен от $0 \pmod 2$, то (2) и (4) имеют решение, а граф G правильную раскраску четырьмя красками.

Введем несколько свойств, присущих операции умножения в $Z_2(F_2)$.

Свойство 1. Легко увидеть $ab=a(a+b+1)$ из того, что $a^2=a$.

Свойство 2. Для произвольных $x_i \in F_2$ выражение $(x_1+x_2)\ldots(x_k+x_1)$ тождественно равно нулю, для $k\equiv 1 \pmod 2$ и тождественно не равно нулю для $k\equiv 0 \pmod 2$.

Свойство 3. Обозначим $a+1$ как $\bar a$ и $a+b+1$ — как $\overline{(a+b)}$.

Свойство 4. Имеет место $\prod\limits_{i=1}^{n}(a_i+b_ix)=(\prod\limits_{i=1}^{n}(a_i+b_i)+\prod\limits_{i=1}^{n}a_i)x+\prod\limits_{i=1}^{n}a_i$ для $x_i\in F_2$.

Свойство 5. Имеет место

$$\prod_{i=1}^{n}(a_i+b_ix+c_ix+d_ixy)=Axy+Bx+Cx+D, \tag{6}$$

где

$$A=\prod_{i=1}^{n}(a_i+b_i+c_i+d_i)+\prod_{i=1}^{n}(a_i+b_i)+\prod_{i=1}^{n}(a_i+c_i)+\prod_{i=1}^{n}a_i;$$

$$B=\prod_{i=1}^{n}(a_i+b_i)+\prod_{i=1}^{n}a_i;\ C=\prod_{i=1}^{n}(a_i+c_i)+\prod_{i=1}^{n}a_i;\ D=\prod_{i=1}^{n}a_i.$$

Приведенные формулы легко получить, если последовательно подставлять в обе части тождества значения переменных: $x=0,\ y=0$; $x=1,\ y=0$; $x=0,\ y=1$; $x=1,\ y=1$.

Рассмотрим полином (5) подробнее. Выделим в нем слагаемые, в которых не имеется двойственных y_i (для уравнений с четным номером слагаемые S_{2k}, $k=1,2,\ldots$, для нечетных — единицы), и обозначим полученную совокупность $A_1(G)$ в виде: $A_1(G)=S_2S_4\ldots S_{30}S_{32}$.

Используя свойство 1, преобразуем множители $S_{30}S_{32}=(S_{30}+S_{32}+1)=$ $=S_{30}\overline{[x(31)+x(32)]}$. Продолжив преобразования, получим $A_1(G)=[x(1)+x(2)]\times$ $\times\overline{[x(3)+x(4)]}\ldots\overline{[x(31)+x(32)]}$. Подставим соответствующие переменные из S вместо x_j:

$$A_1(G)=(x_1+x_2)\overline{(x_3+x_4)}\overline{(x_{34}+x_{33})}\ldots\overline{(x_{22}+x_{21})}.$$

Проведем аналогичные расчеты для области R_2 и окончательно получим

$$A_2(G)=(x_7+x_8)\overline{(x_9+x_{10})}\overline{(x_{25}+x_{26})}\ldots\overline{(x_{32}+x_{33})}.$$

Несложно заметить, что $A(G)=A_1(G)A_2(G)$ — часть полинома, которая не содержит переменных y_i.

Выразим $A_1(G)$ и $A_2(G)$ в эквивалентной форме в виде разбиения последовательностей S, P, Q на пары

$$B_1=(1,2)\overline{(3,4)}\,\overline{(34,33)}\,\overline{(5,6)}\,\overline{(32,7)}\,\overline{(31,30)}\,\overline{(8,29)}\,\overline{(28,27)}\,\overline{(9,10)}\,\overline{(26,11)}\,\overline{(12,13)}\,\overline{(25,14)}\times$$

$$\times\overline{(15,24)}\,\overline{(16,17)}\,\overline{(23,18)}\,\overline{(22,21)}\,,$$

$$B_2=(7,8)\overline{(9,10)}\,\overline{(6,11)}\,\overline{(12,13)}\,\overline{(5,14)}\,\overline{(4,3)}\,\overline{(15,2)}\,\overline{(16,17)}\,\overline{(1,18)}\,\overline{(34,19)}\,\overline{(25,26)}\,\overline{(27,28)}\times$$

$$\times\overline{(24,23)}\,\overline{(29,22)}\,\overline{(30,31)}\,\overline{(21,32)}\,.$$

Составим последовательность пар таким образом, чтобы конец предыдущей совпадал с началом следующей. Так как в каждом разбиении любое число может встретиться только один раз, пары поочередно будут принадлежать B_1 и B_2. Таким образом, получим

1) $(1,2)\overline{(2,15)}\,\overline{(15,24)}\,\overline{(24,23)}\,\overline{(23,18)}\,\overline{(18,1)}$;

2) $(7,8)\overline{(8,29)}\,\overline{(29,22)}\,\overline{(22,21)}\,\overline{(21,32)}\,\overline{(32,7)}$;

3) $(25,26)\overline{(26,11)}\,\overline{(11,6)}\,\overline{(6,5)}\,\overline{(5,14)}\,\overline{(14,25)}$;

4) $\overline{(3,4)}\,\overline{(4,3)}$;

5) $\overline{(9,10)}\,\overline{(10,9)}$;

6) $\overline{(12,13)}\,\overline{(13,12)}$;

7) $\overline{(16,17)}\,\overline{(17,16)}$;

8) $\overline{(28,27)}\,\overline{(27,28)}$;

9) $\overline{(31,30)}\,\overline{(30,31)}$;

10) $\overline{(19,34)}\,\overline{(34,33)}$.

Последовательности 1–9 являются циклами, которым в выражении $A(G)$ соответствуют циклические произведения переменных. В последовательностях 1–3 отрицание встречается нечетное число раз, а так как все циклы четной длины, согласно свойству 3 они превращаются в тождественный нуль.

Допустим, что $C(y_i,\, y_j)$ — коэффициент при произведении переменных y_i, y_j. Докажем, что он отличен от нуля.

Пусть в области R_2 переменным y_i, y_j соответствуют переменные $y(k)$ и $y(l)$, $k<l$. Исходя из того, что $k\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,2)$, рассмотрим два варианта для l.

Вариант 1. Для $l\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,2)$ имеем, исходя из (2),

$$S_2+S_2'+S_2S_2'=1\,,$$

$$1+S_3S_3'=1\,,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$1+S_{k-1}S_{k-1}'=1\,,$$

$$S_k+y(k)\,(1+S_k)+\ldots=1\,,$$

$$1+y(k)S_{k+1}+\ldots=1\,.$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$1+y(k)S_{l-1}+\ldots=1\,,$$

$$S_l+[\,y(k)+y(l)](1+S_l)+\ldots=1\,,$$

$$1+[\,y(k)+y(l)]\,S_{l+1}+\ldots=1\,,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$1+y(k)\,y(k)=1\,,$$

$$1+y(l)\,y(l)=1\,.$$

Поскольку по формуле (6) коэффициенты B, C, D для данного графа равны нулю по модулю 2, необходимо вычислить $\prod_{i=1}^{n}(a_i+b_i+c_i+d_i)$. Для этого в левые части уравнений подставим значения $y(k)=y(l)=1$, остальные $y_v\,(v\neq k,l)$ приравняем нулю и, умножив все их левые части и подставив $S_l=S_{l-1}+x(l)$, получим выражение

$$(1-S_{l-1})S_l\overline{x(l)}\hat{}=(1-S_{l-1})[(S_{l-1}+x(l)]\overline{x(l)}=0\,.$$

Таким образом $l\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,2)$.

Вариант 2. Для $l\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,2)$, рассуждая аналогично, получаем выражение

$$S_2S_4\dots S_{k-2}(1+S_{k+1})(1+S_{k+3})\dots(1+S_{l-2})S_{l+1}\dots\overline{x(k)x(l)}\,. \tag{7}$$

Проведем упрощения

$$\overline{x(k)}S_{k-2}(1+S_{k+1})=S_{k-2}(S_{k-2}+S_{k+1})\overline{x(k)}=$$

$$=S_{k-2}[x(k-1)+x(k)+x(k+1)]\overline{x(k)}=S_{k-2}[x(k-1)+x(k+1)]\,,$$

что соответствует преобразованию при поиске коэффициента для $y(k)$

$$(1+S_{l-2})S_{l+1}\overline{x(l)}=(1+S_{l-2})(S_{l-2}+S_{l+1})\overline{x(l)}=$$

$$=(1+S_{l-2})\,S_{l+1}[x(l-1)+x(l)+x(l+1)]\overline{x(l)}=(1+S_{l-2})[x(l-1)+x(l+1)]\overline{x(l)}\,. \tag{8}$$

Данное преобразование аналогично преобразованию при поиске коэффициента для $y(l)$. Таким образом, выражение (8) можно получить из $A_1(G)$ путем последовательного двукратного выполнения операций, которые проводились при определении коэффициента для $y(k)$. Если $l=k+1$, то в результате получим еще два множителя, у которых не имеется отрицания. Рассмотрим случай, когда $l=k+1$, и из выражения (7) выпишем множители, которые легко преобразуются следующим образом:

$$S_{k-2}S_{k+2}\overline{x(k)x(k+1)}=S_{k-2}(S_{k-2}+S_{k+2}+1)\overline{x(k)x(k+1)}=$$

$$=S_{k-2}[x(k-1)+x(k)+x(k+1)+x(k+2)+1]\overline{x(k)x(k+1)}=$$

$$=S_{k-2}[\overline{x(k+1)+x(k+2)}]\,\overline{x(k)x(k+1)}\,.$$

Данный факт означает, что если y_i и y_j стоят рядом, то знак отрицания убираем.

Рассмотрим два случая для области R_2:

— переменные y_i и y_j входят в одну из последовательностей P или Q, если $y_i=y(p)$, $y_i=y(s)$, тогда обязательно $\min(p,s)=0$, а $\max(p,s)\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,2)$;

— переменные y_i и y_j входят в разные последовательности P или Q, тогда они имеют четное вхождение.

Для двух переменных перебор возможных комбинаций достаточно большой:

(2, 34), (2, 16), (2, 32), (3, 31), (2, 28), (2, 25), (2, 23), (2, 22), (4, 8), (33, 31), (33, 28), (33, 26), (33, 25), (33, 22), (6, 8), (30, 26), (30, 25), (30, 28), (7, 9), (7, 12), (7, 15), (7, 16), (30, 23), (29, 26), (29, 28), (29, 23), (27, 25), (10, 15), (10, 16), (11, 12), (11, 15), (11, 16), (13, 15), (13, 16), (14, 15), (14, 16).

Рассмотрим два из этих наборов.

Для y_2, y_{34} имеем

$$B_1(2,34)=(\overline{1,3})(4,33)(\overline{5,6})(\overline{32,7})(\overline{31,30})(\overline{8,29})(\overline{28,27})(\overline{9,10})(\overline{26,11})(\overline{12,13})(\overline{25,14})\times$$

$$\times(\overline{15,24})(\overline{16,17})(\overline{23,18})(\overline{22,21});$$

$$B_2(2,34)=(7,8)(\overline{9,10})(\overline{6,11})(\overline{12,13})(\overline{5,14})(\overline{4,3})(\overline{15,16})(\overline{17,1})(18,19)(25,26)(\overline{27,28})\times$$

$$\times(\overline{24,23})(\overline{29,22})(\overline{30,31})(21,32).$$

В разбиении $B(2,34)$ получим цикл $(25-26-11-6-5-14-25)$, который дает $C(y_2, y_{34})=0$.

Для y_{33}, y_{22} имеем

$$B_1(33,22)=(1,2)(\overline{3,4})(34,5)(\overline{6,32})(\overline{7,31})(\overline{30,8})(\overline{29,28})(\overline{27,9})(\overline{10,26})(\overline{11,12})(\overline{13,25})\times$$

$$\times(\overline{14,15})(\overline{24,16})(\overline{7,23})(\overline{18,21});$$

$$B_2(33,22)=(7,8)(\overline{9,10})(\overline{6,11})(\overline{12,13})(\overline{5,14})(\overline{4,3})(\overline{15,2})(\overline{16,17})(\overline{1,18})(\overline{34,19})(25,26)\times$$

$$\times(\overline{27,28})(\overline{24,23})(29,30)(\overline{31,21});$$

$$B(33,22)=(24-16-17-23-24)(4-3-4)(19-34-5-14-15-2-1-$$

$$-18-21-31-7-8-30-29-28-27-9-10-26-25-13-11-6-32).$$

В последнем каноническом разбиении два цикла, но они содержат четное число отрицаний, поэтому $C(y_2, y_{34})\not\equiv 0$. Из всех наборов пар только эта дает коэффициент тождественно отличный от нуля.

Предложенный метод позволяет отыскать решение системы уравнений для плоской триангуляции в заданных границах. Дальнейшие исследования данной проблемы следует направить на построение более широкого алгоритма, способного решить задачу четырех красок.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кристофидес Н. Теория графов. Алгоритмический подход. — М.: Мир, 1978. — 432 с.
2. Информационное множество. — http://pco.iis.nsk.su/grapp/WIN/sl_t.html.
3. Емеличев В.А., Ковалев М.М., Кравцов М.К. Многогранники, графы, оптимизация. — М.: Наука, 1981. — 341 с.
4. Харари Ф. Теория графов. — М.: Мир, 1973. — 300 с.

Поступила 10.04.2015