УДК 519.85

А.А. КОВАЛЕНКО, Т.Е. РОМАНОВА, П.И. СТЕЦЮК

ЗАДАЧА БАЛАНСНОЙ КОМПОНОВКИ 3D-ОБЪЕКТОВ: МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ

Аннотация. Построена обобщенная математическая модель задачи оптимальной компоновки 3D-объектов (шары, прямые круговые цилиндры, прямые правильные призмы, прямые прямоугольные параллелепипеды) в контейнере (прямой круговой цилиндр, параболоид вращения, усеченный круговой конус) с круговыми стеллажами. Учтены допустимые расстояния между объектами и ограничения поведения механической системы (ограничения равновесия, моментов инерции, устойчивости). Предложены методы решения на основе *r*-алгоритма Шора, мультистарта и ускоренного перебора концевых вершин дерева решений.

Ключевые слова: задача балансной компоновки, *phi*-функция, квази-*phi*-функция, допустимые расстояния, ограничения поведения, нелинейное программирование, *r*-алгоритм Шора.

ВВЕДЕНИЕ

Оптимизационные 3D-задачи компоновки возникают при проектировании ракетно-космической техники [1]. Их отличительной чертой является учет ограничений поведения (behavior constraints) спутниковой системы. Ограничения поведения задают требования на такие механические свойства системы, как равновесие, инерционность и устойчивость. Многие публикации посвящены исследованию задач компоновки оборудования в модульных отсеках космических кораблей или спутников. Так, например, задачи компоновки объектов для упрощенной схемы спутникового модуля с учетом ограничений поведения рассматривались в работах [1–4]. Данные задачи относятся к классу NP-сложных [5].

Для построения адекватных математических моделей задач оптимальной компоновки в виде задач нелинейного программирования актуально аналитическое описание специальных ограничений: ограничений размещения (непересечение объектов, включение объектов в контейнер с учетом минимально и максимально допустимых расстояний) и ограничений поведения (ограничения равновесия, моментов инерции и устойчивости). Как известно, эффективным средством математического моделирования отношений геометрических объектов в классе задач размещения является метод *phi*-функций Стояна. Данный метод позволяет применять для решения оптимизационных задач размещения методы негладкой оптимизации [6, 7] и нелинейного программирования [8]. В работах [9–13] приведены свободные от радикалов *phi*-функции и квази-*phi*-функции для классов 2D- и 3D-объектов. С использованием этих функций предложены математические модели некоторых видов задач балансной компоновки, описанные в [13, 14].

В данной статье рассматривается задача балансной компоновки в следующей постановке: разместить 3D-объекты в контейнере с круговыми стеллажами с учетом специальных ограничений так, чтобы функция цели достигала своего экстремального значения. Объектами являются шары, прямые круговые цилиндры, прямые правильные призмы, прямые прямоугольные параллелепипеды. В качестве контейнера Ω выбирается прямой круговой цилиндр, параболоид вращения или усеченный круговой конус.

Цель данной работы — построение обобщенной математической модели балансной компоновки 3D-объектов в контейнере в виде задачи нелинейного программирования с негладкими функциями. Из такой модели можно получить различные варианты задач балансной компоновки, которые определяются разнообразием пространственных форм объектов и контейнеров, видом функции цели, а также наличием специальных ограничений, обозначенных выше.

КОНТЕЙНЕРЫ И ОБЪЕКТЫ

Пусть Ω — контейнер высотой H. Задаем $Oxyz$ в качестве неподвижной системы координат контейнера Ω, где Oz — продольная ось симметрии Ω, начало системы $Oxyz$ находится в центре симметрии нижнего основания S_1 контейнера Ω. Полагаем, что Ω разделен круговыми стеллажами S_k, $k=1,2,\ldots,m$, на подконтейнеры Ω^k, $k=1,2,\ldots,m$, где S_1 — нижнее основание контейнера Ω (также может рассматриваться в качестве стеллажа). Обозначим t_k расстояние между стеллажами S_k и S_{k+1}. В качестве контейнера рассматриваются: $\Omega \equiv \mathbf{C}$, $\mathbf{C}$ — прямой круговой цилиндр с основанием радиуса R (рис. 1, *а*); $\Omega \equiv \mathbf{\Lambda}$, $\mathbf{\Lambda}$ — параболоид вращения с основанием радиуса R (рис. 1, *б*); $\Omega \equiv \mathbf{E}$, $\mathbf{E}$ — усеченный круговой конус с радиусами R_1 и R_{m+1} нижнего (S_1) и верхнего (S_{m+1}) оснований соответственно (рис. 1, *в*).

Семейство $A=\{A_i,\, i=1,2,\ldots,n\}$ объектов, размещаемых в контейнере Ω, состоит из объектов, среди которых: шары $\boldsymbol{S}_i$, $i\in I_1=\{1,2,\ldots,n_1\}$ радиуса r_i (рис. 2, *а*); прямые круговые цилиндры $\boldsymbol{C}_i$, $i\in I_2=\{n_1+1,\ldots,n_1+n_2\}$, с метрическими характеристиками (r_i,h_i), где r_i — радиус основания, h_i — полувысота $\boldsymbol{C}_i$ (рис. 2, *б*); прямые правильные призмы $\boldsymbol{K}_i$, $i\in I_3=\{n_1+n_2+1,\ldots,n_1+n_2+n_3\}$, с метрическими характеристиками (υ_i, r_i, h_i), где υ_i — число вершин правильного многоугольника в основании $\boldsymbol{K}_i$, r_i — радиус оснований цилиндра, описанного около $\boldsymbol{K}_i$, h_i — полувысота (рис. 2, *в*); прямые прямоугольные параллелепипеды $\boldsymbol{P}_i$, $i\in I_4=\{n_1+n_2+n_3+1,\ldots,n_1+n_2+n_3+n_4=n\}$, с метрическими характеристиками (w_i,l_i,h_i), где w_i — полудлина, l_i — полуширина, h_i — полувысота $\boldsymbol{P}_i$ (рис. 2, *г*). При этом $r_i<R$, $h_i\le H$, $h^k\le t_k$, $h^k=\max\{h_i^k,\, i\in I^k\}$.

Каждый объект A_i задается в собственной системе координат $O_i x_i y_i z_i$ следующим образом: начало O_i системы координат находится в центре симметрии объекта A_i, а оси $O_i x_i$, $O_i y_i$, $O_i z_i$ являются осями его симметрии, при этом каждая ось $O_i z_i$ параллельна оси Oz неподвижной системы координат.

Контейнер Ω разделен круговыми слеллажами S_k на подконтейнеры Ω^k, $k=1,2,\ldots,m$. Осуществим разбиение объектов семейства A на подмножества $A^k=\{\boldsymbol{S}_i, i\in I_1^k, \boldsymbol{C}_i, i\in I_2^k, \boldsymbol{K}_i, i\in I_3^k, \boldsymbol{P}_i, i\in I_4^k\}$, $I^k=\{I_1^k\cup I_2^k\cup I_3^k\cup I_4^k\}$ в соответствии с требованием размещения объектов внутри подконтейнеров Ω^k, $k=1,2,\ldots,m$. Контейнер Ω с упакованными в нем объектами назовем системой Ω_A. Примеры систем Ω_A приведены на рис. 3. Для Ω_A задается система координат

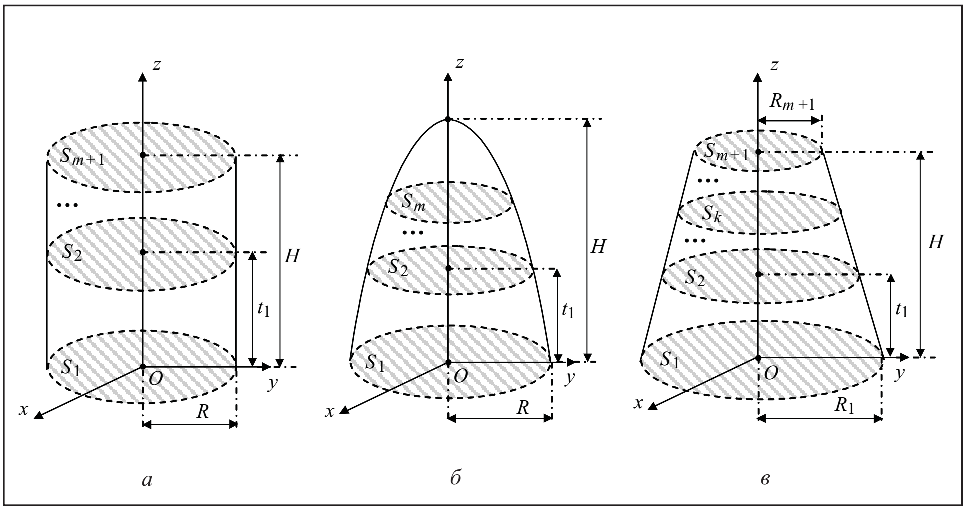

Рис. 1. Виды контейнера Ω: прямой круговой цилиндр (*а*); контейнер параболоидной формы (*б*); прямой круговой усеченный конус (*в*)

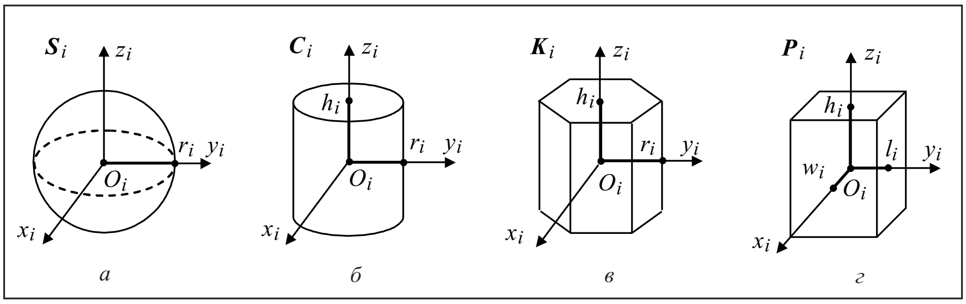

Рис. 2. Виды объектов множества A: шар (*а*); прямой круговой цилиндр (*б*); прямая правильная призма (*в*); прямой прямоугольный параллелепипед (*г*)

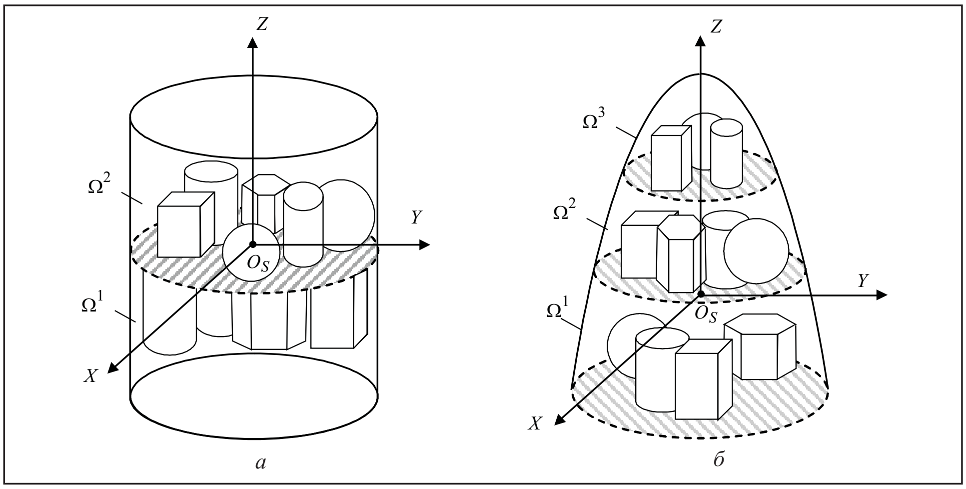

Рис. 3. Компоновка объектов: в цилиндрическом контейнере при $m = 2$ (*а*); в параболическом контейнере при $m = 3$ (*б*)

$O_S\,XYZ$, в которой ее начало O_S расположено в центре масс системы Ω_A, а оси $O_S X, O_S Y, O_S Z$ параллельны осям Ox, Oy, Oz соответственно.

Расположение объектов семейства A внутри контейнера Ω определяется переменными параметрами размещения $u_i = (x_i, y_i, z_i, \theta_i)$ относительно системы координат $Oxyz$, где (x_i, y_i, z_i) — вектор трансляции объекта A_i, а θ_i — угол поворота A_i-го объекта в плоскости $O_i x_i y_i$ (рис. 4). Таким образом, вектор переменных $u = (p, u_1, u_2, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^{\xi}$, $\xi \le 4n+1$, определяет в $\mathbb{R}^3$ размещение элементов семейства A внутри контейнера Ω, где p — переменная метрическая характеристика контейнера Ω.

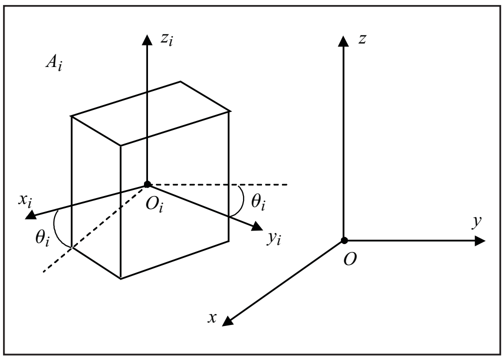

Рис. 4. Положение системы координат $O_i x_i y_i z_i$ относительно $Oxyz$

Полагаем, что заданы минимально и максимально допустимые расстояния ρ_{ij}^-, ρ_{ij}^+ между каждой парой объектов $A_i^k \in A^k$ и $A_j^k \in A^k$, $i, j \in I^k$, $i \ne j$, а также минимально и максимально допустимые расстояния ρ_i^-, ρ_i^+ между каждым элементом $A_i^k \in A^k$, $i \in I^k$, и боковой поверхностью подконтейнера Ω^k соответственно.

Задача балансной компоновки 3D-объектов. Необходимо упаковать 3D-объекты из множества A

в контейнере Ω с круговыми стеллажами S_k, $k=1, 2, \ldots, m$, так, чтобы заданная функция цели F достигала своего экстремального значения при учете специальных ограничений: ограничений механического поведения системы Ω_A; ограничений на минимально ρ_{ij}^-, ρ_i^- и максимально ρ_{ij}^+, ρ_i^+ допустимые расстояния.

Для построения математической модели поставленной задачи необходимо формализовать (описать в аналитическом виде) ограничения размещения и ограничения поведения.

ОГРАНИЧЕНИЯ РАЗМЕЩЕНИЯ

В задаче балансной компоновки 3D объектов ограничениями размещения являются: непересечение объектов A_i^k и A_j^k, т.е. $\operatorname{int} A_i^k \bigcap \operatorname{int} A_j^k = \varnothing$; включение объекта A_i^k в контейнер Ω, т.е. $A_i^k \subseteq \Omega$. Для моделирования этих ограничений используется метод *phi*-функций Стояна [10].

Пусть $A, B \subset \mathbb{R}^t$ — замкнутые *phi*-объекты, $t=2, 3$. Полагаем, что по крайней мере один из объектов ограниченный. Местоположение объекта A определяется вектором переменных параметров размещения $u_A = (v_A, \theta_A)$, где $v_A = (x_A, y_A, z_A)$ — вектор трансляции, $\theta_A = (\theta_z, \theta_x, \theta_y)$ — углы поворота: от оси OX к OY, от оси OY к OZ и от оси OX к OZ. Пусть $u_A = (v_A, \theta_A)$ и $u_B = (v_B, \theta_B)$ — векторы переменных объектов A и B соответственно.

Определение 1. Всюду определенная, непрерывная функция $\Phi^{AB}(u_A, u_B)$ называется *phi*-функцией объектов $A(u_A)$ и $B(u_B)$, если она удовлетворяет следующим свойствам [10]:

$$\Phi^{AB}(u_A, u_B) < 0, \text{ если } \operatorname{int} A(u_A) \bigcap \operatorname{int} B(u_B) \neq \varnothing;$$

$$\Phi^{AB}(u_A, u_B) = 0, \text{ если } \operatorname{int} A(u_A) \bigcap \operatorname{int} B(u_B) = \varnothing \text{ и } \operatorname{fr} A(u_A) \cap \operatorname{fr} B(u_B) \neq \varnothing;$$

$$\Phi^{AB}(u_A, u_B) > 0, \text{ если } \operatorname{cl} A(u_A) \bigcap \operatorname{cl} B(u_B) = \varnothing.$$

Определение 2. Квази-*phi*-функцией для объектов $A(u_A)$ и $B(u_B)$ называется всюду определенная, непрерывная функция $\Phi'^{AB}(u_A, u_B, u')$, для которой функция $\max\limits_{u' \in U} \Phi'^{AB}(u_A, u_B, u')$ является *phi*-функцией $\Phi^{AB}(u_A, u_B)$, где вид множества $U \subset \mathbb{R}^n$ и размерность пространства $\mathbb{R}^n$ зависят от формы размещаемых объектов [9].

Для моделирования ограничений на минимально и максимально допустимые расстояния ρ^- и ρ^+ используются нормализованные *phi*-функции [10] (квази-*phi*-функции [11]). Как расстояние между объектами A и B рассматривается $\operatorname{dist}(A, B) = \min\limits_{a \in A,\, b \in B} d(a, b)$, где $d(a, b)$ — евклидово расстояние между точками a и b, $a, b \in \mathbb{R}^t$, $t=2, 3$.

Определение 3. *Phi*-функция $\widetilde{\Phi}^{AB}(u_A, u_B)$ называется нормализованной, если ее значения равны евклидовым расстояниям между объектами $A(u_A)$ и $B(u_B)$ при условии $(u_A, u_B) \in G$, $G = \{(u_A, u_B) \mid \operatorname{int} A(u_A) \bigcap \operatorname{int} B(u_B) = \varnothing\}$.

Определение 4. Квази-*phi*-функция $\widetilde{\Phi}'^{AB}(u_A, u_B, u')$ называется нормализованной для объектов $A(u_A)$ и $B(u_B)$, если при $\operatorname{int} A(u_A) \bigcap \operatorname{int} B(u_B) = \varnothing$ функция $\max\limits_{u' \in U} \widetilde{\Phi}'^{AB}(u_A, u_B, u')$ является нормализованной *phi*-функцией.

Приведем примеры *phi*-функций и квази-*phi*-функций для некоторых видов объектов.

1. *Phi*-функция для объектов $\mathbf{C}^*$ и $\boldsymbol{S}(x, y, z)$ определяется так: $\Phi^{\mathbf{C}^*\boldsymbol{S}} = \min\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$, где $\xi_1 = z - r$, $\xi_2 = H - z - r$, $\xi_3 = -x^2 - y^2 + (R - r)^2$.

Здесь $\mathbf{C}^*$ — дополнение к цилиндрическому контейнеру высотой H с круговым основанием радиуса R, $\boldsymbol{S}$ — шар радиуса r с центром в точке (x, y, z). Нормализованная *phi*-функция определяется формулой $\widetilde{\Phi}^{\mathbf{C}^*\boldsymbol{S}} = \min\{\xi_1, \xi_2, \widetilde{\xi}_3\}$, где $\widetilde{\xi}_3 = -\sqrt{x^2+y^2} + (R-r)$.

2. *Phi*-функция для двух шаров $S_1(u_1)$ и $S_2(u_2)$ с радиусами r_1, r_2 и центрами в точках (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) имеет вид $\Phi^{\boldsymbol{SS}} = (x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2 - (r_1+r_2)^2$, а нормализованная *phi*-функция определяется формулой $\widetilde{\Phi}^{\boldsymbol{SS}} = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2} - (r_1+r_2)$.

3. Квази-*phi*-функция для выпуклых многогранников определяется следующим образом. Пусть $\boldsymbol{K}_1(u_1)$ и $\boldsymbol{K}_2(u_2)$ — выпуклые многогранники, заданные вершинами $\lambda_1 p_i^1$, $i=1,\dots,m_1$, и $\lambda_2 p_i^2$, $i=1,\dots,m_2$, соответственно, а $\Phi^{\boldsymbol{K}_1 P}(u_1, u_P) = \min\limits_{1\le i\le m_1} \psi_P(\lambda_1 p_i^1)$ — *phi*-функция для объектов $\boldsymbol{K}_1$ и P, $\Phi^{\boldsymbol{K}_2 P^*}(u_2, u_P) = \min\limits_{1\le i\le m_2} (-\psi_P(\lambda_2 p_i^2))$ — *phi*-функция для объектов $\boldsymbol{K}_2$ и $P^* = \mathbb{R}^3 \setminus \operatorname{int} P$. Здесь $P(u_P) = \{(x, y, z) : \psi_P = \alpha x + \beta y + \gamma z + \mu_P \ge 0\}$ — полупространство, где $u_P = (\theta_{x_P}, \theta_{y_P}, \mu_P)$, $\alpha = \sin\theta_{y_P}$, $\beta = -\sin\theta_{x_P}\cos\theta_{y_P}$, $\gamma = \cos\theta_{x_P}\cos\theta_{y_P}$. Тогда функция

$$\Phi'^{\boldsymbol{K}_1\boldsymbol{K}_2}(u_1, u_2, u_P) = \min\{\Phi^{\boldsymbol{K}_1 P}(u_1, u_P), \Phi^{\boldsymbol{K}_2 P^*}(u_2, u_P)\}$$

является квази-*phi*-функцией для $\boldsymbol{K}_1(u_1)$ и $\boldsymbol{K}_2(u_2)$. Отметим, что функция $2\Phi'^{\boldsymbol{K}_1\boldsymbol{K}_2}(u_1, u_2, u_P)$ — нормализованная квази-*phi*-функция.

Конкретный вид *phi*-функций (квази-*phi*-функций) для всех пар объектов, рассматриваемых в данной работе, приведен в [10–13].

В терминах *phi*-функций (квази-*phi*-функций): условие $\operatorname{int} A_i^k \cap \operatorname{int} A_j^k = \varnothing$ эквивалентно $\Phi_{ij} \ge 0$, где Φ_{ij} — *phi*-функция (квази-*phi*-функция) для объектов A_i^k и A_j^k; условие $A_i^k \subseteq \Omega$ эквивалентно $\Phi_i \ge 0$, где Φ_i — *phi*-функция для объектов A_i^k и $\Omega^{k*} = \mathbb{R}^t \setminus \operatorname{int}\Omega^k$, $t = 2, 3$.

Ограничение $\operatorname{dist}(A_i^k, A_j^k) \ge \rho_{ij}^-$ можно описать следующим образом: $\widetilde{\Phi}_{ij} \ge \rho_{ij}^-$, где $\widetilde{\Phi}_{ij}$ — нормализованная *phi*-функция (квази-*phi*-функция) для объектов A_i^k и A_j^k. Ограничение $\operatorname{dist}(A_i^k, A_j^k) \le \rho_{ij}^+$ определяется так: $\widetilde{\Phi}_{ij} \le \rho_{ij}^+$. По аналогии формализуется ограничение $\rho_i^- \le \operatorname{dist}(A_i^k, \Omega_i^{*k}) \le \rho_i^+$ с использованием неравенства $\rho_i^- \le \widetilde{\Phi}_i \le \rho_i^+$, где $\widetilde{\Phi}_i$ — нормализованная *phi*-функция (квази-*phi*-функция) для объектов A_i^k и Ω^{k*} соответственно.

Ограничения непересечения объектов подмножества $A^k \subset \Omega^k$ с учетом минимально и максимально допустимых расстояний ρ_{ij}^- и ρ_{ij}^+ имеет вид

$$\Upsilon_1(u) = \min\{\widetilde{\Phi}_{ij} - \rho_{ij}^-, -\widetilde{\Phi}_{ij} + \rho_{ij}^+, \ i > j \in I^k, k = 1, \dots, m\} \ge 0. \tag{1}$$

Ограничения включения объектов подмножества $A^k \subset \Omega^k$ с учетом минимально и максимально допустимых расстояний ρ_i^- и ρ_i^+ представим следующим образом:

$$\Upsilon_2(u) = \min\{\widetilde{\Phi}_i - \rho_i^-, -\widetilde{\Phi}_i + \rho_i^+, \ i \in I^k, \ k = 1, \dots, m\} \ge 0. \tag{2}$$

Неравенство вида $\Upsilon(u) = \min\{\Upsilon_1(u), \Upsilon_2(u)\} \ge 0$ описывает ограничения размещения. Если допустимые расстояния не заданы, то нормализованные *phi*-функции (или квази-*phi*-функции) в (1) и (2) заменяются обычными *phi*-функциями (или квази-*phi*-функциями).

ОГРАНИЧЕНИЯ ПОВЕДЕНИЯ

Пусть каждый объект семейства A — однородное тело массой m_i, $i \in I_n$. Центр масс A_i-го объекта совпадает с центром его симметрии, который находится в начале его системы координат $O_i x_i y_i z_i$. Таким образом, координатные оси любой системы $O_i x_i y_i z_i$ являются главными центральными осями для объекта A_i.

Пусть m_0 — масса боковой поверхности контейнера Ω (массой стеллажей и оснований контейнера пренебрегаем), а $O_c = (x_0, y_0, z_0)$ — центр масс контейнера Ω, заданный в неподвижной системе координат *Oxyz*. Полагаем, что плотность боковой поверхности контейнера Ω является постоянной величиной. Для рассмотренных видов контейнера Ω координаты x_0, y_0 находятся на его оси симметрии *Oz*, значит, $O_c = (0, 0, z_0)$. Определим положение координаты z_0 для каждого вида контейнера следующим образом:

$$z_0 = \frac{H}{2} \text{ для } \mathbf{C}, \; z_0 = \frac{2H}{5} \text{ для } \mathbf{\Lambda}, \; z_0 = \frac{H}{3} \frac{R_1 + 2R_{m+1}}{R_1 + R_{m+1}} \text{ для } \mathbf{E}.$$

Тогда центр масс $O_s = (x_s(u), y_s(u), z_s(u))$ системы Ω_A определяется так:

$$x_s(u) = \frac{\sum_{i=0}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=0}^{n} m_i}, \quad y_s(u) = \frac{\sum_{i=0}^{n} m_i y_i}{\sum_{i=0}^{n} m_i}, \quad z_s(u) = \frac{\sum_{i=0}^{n} m_i z_i}{\sum_{i=0}^{n} m_i}.$$

Рассмотрим ограничения по механическим характеристикам системы Ω_A.

Ограничения равновесия определим следующими неравенствами:

$$\begin{aligned} \mu_{11}(u) &= \min\{-(x_s(u) - x_0) + \Delta x_c, (x_s(u) - x_0) + \Delta x_c\} \ge 0, \\ \mu_{12}(u) &= \min\{-(y_s(u) - y_0) + \Delta y_c, (y_s(u) - y_0) + \Delta y_c\} \ge 0, \\ \mu_{13}(u) &= \min\{-(z_s(u) - z_0) + \Delta z_c, (z_s(u) - z_0) + \Delta z_c\} \ge 0, \end{aligned} \tag{3}$$

где $\Delta x_c, \Delta y_c, \Delta z_c$ — допустимые отклонения от точки $O_c = (x_0, y_0, z_0)$.

Ограничения моментов инерции определим таким образом:

$$\begin{aligned} \mu_{21}(u) &= -J_X(u) + \Delta J_X \ge 0, \\ \mu_{22}(u) &= -J_Y(u) + \Delta J_Y \ge 0, \\ \mu_{23}(u) &= -J_Z(u) + \Delta J_Z \ge 0, \end{aligned} \tag{4}$$

где $J_X(u)$, $J_Y(u)$, $J_Z(u)$ — моменты инерции системы Ω_A относительно осей системы координат $O_S XYZ$, ΔJ_X, ΔJ_Y, ΔJ_Z — допустимые значения для $J_X(u)$, $J_Y(u)$, $J_Z(u)$. Осевые моменты инерции $J_X(u)$, $J_Y(u)$, $J_Z(u)$ определим следующим образом:

$$J_X(u) = J_{\Omega x} + \sum_{i=1}^{n} (J_{x_i} \cos^2 \theta_i + J_{y_i} \sin^2 \theta_i) + \sum_{i=1}^{n} (y_i^2 + z_i^2) m_i - (y_s^2 + z_s^2) \sum_{i=0}^{n} m_i,$$

$$J_Y(u) = J_{\Omega y} + \sum_{i=1}^{n} (J_{x_i} \sin^2 \theta_i + J_{y_i} \cos^2 \theta_i) + \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 + z_i^2) m_i - (x_s^2 + z_s^2) \sum_{i=0}^{n} m_i,$$

$$J_Z(u) = J_{\Omega z} + \sum_{i=1}^{n} J_{z_i} + \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 + y_i^2) m_i - (x_s^2 + y_s^2) \sum_{i=0}^{n} m_i,$$

где $J_{\Omega x}, J_{\Omega y}, J_{\Omega z}$ — моменты инерции контейнера Ω относительно осей системы координат *Oxyz*, J_{x_i}, J_{y_i}, J_{z_i} — моменты инерции объекта A_i относительно осей системы координат $O_i x_i y_i z_i$.

Моменты инерции $J_{\Omega x}$, $J_{\Omega y}$, $J_{\Omega z}$ и J_{x_i}, J_{y_i}, J_{z_i} определяются в зависимости от вида и формы рассматриваемого тела следующими соотношениями.

Для боковой поверхности контейнера Ω имеем:

- для **C** $J_{\Omega x} = J_{\Omega y} = \frac{1}{6} m_0 (3R^2 + 2H^2)$, $J_{\Omega z} = m_0 R^2$;
- для **E** $J_{\Omega x} = J_{\Omega y} = \frac{m_0}{2} \left(\frac{H^2 (R_1 + 3R_{m+1})}{3(R_1 + R_{m+1})} + \frac{R_1^2 + R_{m+1}^2}{2} \right)$, $J_{\Omega z} = \frac{m_0}{2} (R_1^2 + R_{m+1}^2)$;
- для $\boldsymbol{\Lambda}$ $J_{\Omega z} = \frac{3Hm_0}{5}$, $J_{\Omega x} = J_{\Omega y} = \frac{Hm_0}{70} (21 + 16H)$.

Для однородного объекта A_i имеем:

- для $\boldsymbol{S}_i$ $J_{x_i} = J_{y_i} = J_{z_i} = \frac{2}{5} m_i r_i^2$, $i \in I_1$;
- для $\boldsymbol{C}_i$ $J_{x_i} = J_{y_i} = \frac{1}{12} m_i (3r_i^2 + 4h_i^2)$, $J_{z_i} = \frac{1}{2} m_i r_i^2$, $i \in I_2$;
- для $\boldsymbol{K}_i$ (при $\upsilon_i = 6$): $J_{x_i} = J_{y_i} = \frac{1}{24} m_i (5r_i^2 + 8h_i^2)$, $J_{z_i} = \frac{5}{12} m_i r_i^2$, $i \in I_3$;
- для $\boldsymbol{P}_i$ $J_{x_i} = \frac{1}{12} m_i (l_i^2 + h_i^2)$, $J_{y_i} = \frac{1}{12} m_i (w_i^2 + h_i^2)$, $J_{z_i} = \frac{1}{12} m_i (l_i^2 + w_i^2)$,

$i \in I_4$.

Ограничения устойчивости определим следующими неравенствами:

$$\begin{aligned} \mu_{31}(u) &= \min \{- J_{XY}(u) + \Delta J_{XY}, J_{XY}(u) + \Delta J_{XY}\} \geq 0, \\ \mu_{32}(u) &= \min \{- J_{YZ}(u) + \Delta J_{YZ}, J_{YZ}(u) + \Delta J_{YZ}\} \geq 0, \\ \mu_{33}(u) &= \min \{- J_{XZ}(u) + \Delta J_{XZ}, J_{XZ}(u) + \Delta J_{XZ}\} \geq 0, \end{aligned} \tag{5}$$

где $J_{XY}(u)$, $J_{YZ}(u)$, $J_{XZ}(u)$ — центробежные моменты инерции системы Ω_A относительно осей системы координат $O_S XYZ$, ΔJ_{XY}, ΔJ_{YZ}, ΔJ_{XZ} — допустимые значения для $J_{XY}(u)$, $J_{YZ}(u)$, $J_{XZ}(u)$ соответственно. Характеристики $J_{XY}(u)$, $J_{YZ}(u)$, $J_{XZ}(u)$ определяются следующим образом:

$$J_{XY}(u) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n} (J_{x_i} - J_{y_i}) \sin 2\theta_i + \sum_{i=0}^{n} x_i y_i m_i - x_s y_s \sum_{i=0}^{n} m_i,$$

$$J_{XZ}(u) = \sum_{i=0}^{n} x_i z_i m_i - x_s z_s \sum_{i=0}^{n} m_i, \quad J_{YZ}(u) = \sum_{i=0}^{n} y_i z_i m_i - y_s z_s \sum_{i=0}^{n} m_i.$$

На основе неравенств (3)–(5) определим систему ограничений, описывающую ограничения поведения (behavior constraints) системы Ω_A таким образом:

$$\begin{cases} \mu_1(u) = \min \{\mu_{11}(u), \mu_{12}(u), \mu_{13}(u)\} \geq 0, \\ \mu_2(u) = \min \{\mu_{21}(u), \mu_{22}(u), \mu_{23}(u)\} \geq 0, \\ \mu_3(u) = \min \{\mu_{31}(u), \mu_{32}(u), \mu_{33}(u)\} \geq 0. \end{cases}$$

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И ЕЕ ОСОБЕННОСТИ

Математическая модель задачи балансной компоновки имеет вид

$$F(u^*) = \min_{u \in W} F(u), \tag{6}$$

$$W = \{u \in \mathbb{R}^{\xi} : \Upsilon(u) \geq 0,\ \mu_1(u) \geq 0,\ \mu_2(u) \geq 0,\ \mu_3(u) \geq 0,\ \zeta \geq 0\}, \tag{7}$$

где $\zeta \geq 0$ — система дополнительных ограничений на метрические характеристики и/или параметры размещения контейнера и объектов. В зависимости от выбора функции цели рассматриваются различные варианты математической модели (6), (7). Наиболее часто используются следующие функции цели: размер контейнера Ω; отклонение центра масс системы Ω_A от заданной точки; моменты инерции системы Ω_A. Примеры таких задач приведены в [2, 4, 13, 14].

Рассмотрим некоторые из вариантов математической модели (6), (7), которые представляют интерес с практической точки зрения.

Задача P1:

$$F(u)=F_1(u)=p,\ u=(u_1,u_2,\ldots,u_n,p),$$
$$W=\{u\in R^{4n+1}:\Upsilon(u)\ge 0,\ \mu_1(u)\ge 0,\ \mu_2(u)\ge 0,\ \mu_3(u)\ge 0,\zeta\ge 0\}.$$

Задача P2:

$$F(u)=F_2(u)=(x_s(u)-x_0)^2+(y_s(u)-y_0)^2+(z_s(u)-z_0)^2,$$
$$u=(u_1,u_2,\ldots,u_n),$$
$$W=\{u\in R^{4n}:\Upsilon(u)\ge 0,\mu_2(u)\ge 0,\mu_3(u)\ge 0,\zeta\ge 0\}.$$

Задача P3:

$$F(u)=F_3(u)=\lambda_1 J_X(u)+\lambda_2 J_Y(u)+\lambda_3 J_Z(u),$$
$$u=(u_1,u_2,\ldots,u_n),\ \lambda_i\in[0,1],\ \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1,$$
$$W=\{u\in R^{4n}:\Upsilon(u)\ge 0,\mu_1(u)\ge 0,\mu_3(u)\ge 0,\zeta\ge 0\}.$$

Задача P1 имеет линейную функцию цели, в задачах P2 и P3 функции цели квадратичные. Ограничения размещения в задачах P1–P3 включают минимаксные функции, а ограничения поведения описываются нелинейными неравенствами. Примеры задач P1–P3 приведены в [4, 14, 15].

Данные задачи обладают рядом особенностей. В работе [14] рассматривается случай, когда $h_1=h_2=\ldots=h_n=H$. Для других примеров [2, 4, 13] объекты крепятся к стеллажам. Тогда функции для 3D-объектов, приведенные в (1), (2), можно заменить функциями для 2D-объектов, а параметры размещения примут вид $u_i=(x_i,y_i,\theta_i)$. Следовательно, $\xi\le 3n+1$.

Отметим, что задача (6), (7) является многоэкстремальной задачей нелинейного программирования с негладкими функциями. Область допустимых решений W в общем случае — несвязное множество с многосвязными компонентами связности. Граница области W состоит из кусочно-гладких поверхностей. Она описывается системой из N *phi*-неравенств с негладкими функциями, где $N=N_a+N_b$, N_a — число *phi*-неравенств, описывающих ограничения размещения, $N_a=\sum_{k=1}^{m}N_k$, N_k — число *phi*-неравенств, описывающих ограничения размещения в Ω^k, $N_k=n^k+\frac{1}{2}n^k(n^k-1)$, $k=1,2,\ldots,m$, N_b — число функций, описывающих ограничения поведения, $N_b\le 15$. Ограничения размещения описываются с помощью *phi*-функций (или квази-*phi*-функций).

Каждую базовую *phi*-функцию Φ_l, $l=1,2,\ldots,N_a$, определим в виде

$$\Phi_l=\max_{i=1,\ldots,\eta_l} f_i^l=\max_{i=1,\ldots,\eta_l}\ \min_{j=1,\ldots,J_i^l} f_{ij}^l,$$

где f_{ij}^l — гладкая функция. Поскольку $\min\limits_{j=1,\ldots,J_i^l} f_{ij}^l\ge 0$ эквивалентно тому, что $f_{ij}^l\ge 0$ для всех j, а $\max\limits_{i=1,\ldots,\eta_l} f_i^l\ge 0$ означает, что выполняется по крайней мере одно из неравенств $f_i^l\ge 0$, каждое из неравенств $f_i^l\ge 0$ можно рассматривать как систему в общем случае нелинейных J_i^l неравенств. Для каждого *phi*-неравенства $\Phi_l\ge 0$ строится так называемое *phi*-дерево [15], концевым вершинам которого соответствуют системы неравенств $f_{ij}^l\ge 0$ с гладкими функциями. На основе *phi*-деревьев строится дерево решений, описывающее область допустимых решений W задачи (6), (7) (рис. 5). Корню дерева решений соот-

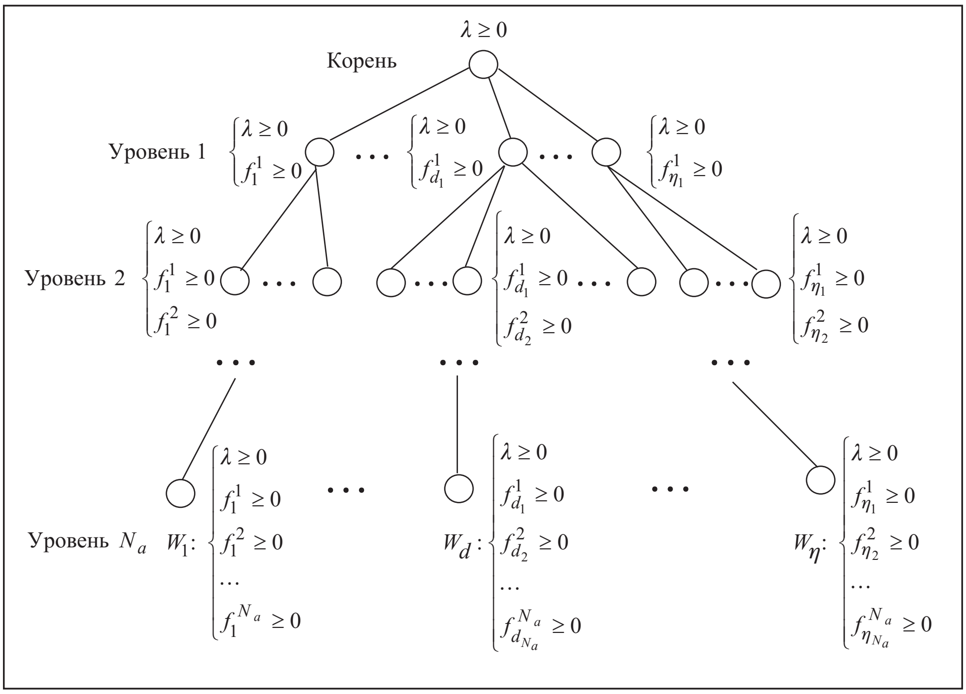

Рис. 5. Общий вид дерева решений

ветствует система неравенств

$$\lambda \ge 0 \Leftrightarrow \{\mu_1(u) \ge 0,\ \mu_2(u) \ge 0,\ \mu_3(u) \ge 0,\ \zeta \ge 0\}.$$

На первом уровне дерева решения имеем η_1 вершин, где η_1 — число концевых вершин *phi*-дерева, описывающего неравенство $\Phi_1 \ge 0$. Здесь $\Phi_1 = \max\limits_{i=1,\ldots,\eta_1} f_i^1$, $f_i^1 = \min\limits_{j=1,\ldots,J_i^1} f_{ij}^1$. Каждой вершине соответствует система неравенств $\{\lambda \ge 0, f_{d_1}^1 \ge 0\}$.

Из каждой вершины первого уровня исходит η_2 концевых вершин базового *phi*-дерева, описывающего неравенство $\Phi_2 \ge 0$, где $\Phi_2 = \max\limits_{i=1,\ldots,\eta_2} f_i^2$, $f_i^2 = \min\limits_{j=1,\ldots,J_i^2} f_{ij}^2$. Тогда число вершин на втором уровне дерева решений составляет $\eta_1 \cdot \eta_2$ и каждой вершине соответствует система неравенств $\{\lambda \ge 0, f_{d_1}^1 \ge 0, f_{d_2}^2 \ge 0\}$.

Аналогично, из каждой вершины $(l-1)$-го уровня дерева решений исходит η_l концевых вершин *phi*-дерева, описывающего неравенство $\Phi_l \ge 0$, где $\Phi_l = \max\limits_{i=1,\ldots,\eta_l} f_i^l$, $f_i^l = \min\limits_{j=1,\ldots,J_i^l} f_{ij}^l$. Число вершин *l*-го уровня дерева решений составляет $\eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \ldots \cdot \eta_l$, а каждой вершине соответствует система вида $\{\lambda \ge 0, f_{d_1}^1 \ge 0, f_{d_2}^2 \ge 0, \ldots, f_{d_l}^l \ge 0\}$. Таким образом, число концевых вершин дерева решений задачи (6), (7) составляет $\eta = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \ldots \cdot \eta_{N_a}$.

Исходя из построенного дерева решений, представим область допустимых решений в виде $W = W_1 \cup \ldots \cup W_d \cup \ldots \cup W_\eta$, где подобласть W_d соответствует *d*-й концевой вершине дерева решений и определяется системой неравенств $\{\lambda \ge 0,\ f_{d_l}^l \ge 0,\ l = 1, \ldots, N_a\}$. Тогда задачу (6), (7) можно свести к следующей задаче оптимизации:

$$F(u^*) = \min \{F(u^{d^*}),\ d = 1, 2, \ldots, \eta\}, \tag{8}$$

где

$$F(u^{d^*}) = \min_{u \in W_d \subset \mathbb{R}^{\xi}} F(u). \tag{9}$$

Поскольку каждая задача в (9) является многоэкстремальной задачей нелинейного программирования, решение задачи (8), (9) в общем случае не гарантирует получения глобального минимума.

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ

Для решения задачи (6), (7) предлагаются следующие методы.

Метод 1 состоит в ускоренном переборе локальных экстремумов для всех вершин дерева решений задачи (6), (7). Значительная часть концевых вершин дерева ее решений соответствует несовместным системам, не всякий локальный экстремум на подобласти W_d является локальным экстремумом на области W, кроме того, локальные экстремумы данной задачи на разных подобластях могут совпадать. В силу этого применяется модель (8), (9) и ускоренный перебор подзадач вида (9), использующий набор правил отсечения, основанных на учете оценки функции цели сверху и вырожденности неполных систем.

Метод 2 основан на применении метода «мультистарта» (multistart method), который заключается в следующем: с помощью специальных алгоритмов (например, [10]) строится множество стартовых точек из области допустимых решений (7) и выполняется поиск локального экстремума для каждой стартовой точки на каждой подобласти $W_d \subset W$, соответствующей стартовой точке. Решается задача нелинейного программирования вида (9). Лучший из полученных локальных экстремумов выбирается в качестве приближения к глобальному экстремуму задачи (6), (7).

Методы 1 и 2 используют IPOPT [8] для поиска локальных экстремумов задач вида (9).

Метод 3 с помощью негладких штрафов заменяет задачу (7), (8) задачей безусловной оптимизации почти-дифференцируемой функции вида

$$f(u) = F(u) + P_1 \sum_{l=1}^{N_a} \max\{0, -\Phi_l\} + P_2 \sum_{k=1}^{N_b} \max\{0, -\mu_k\} + P_3 \max\{0, -p + p_{low}\},$$

где P_i — штрафные коэффициенты, $i = 1, 2, 3$, Φ_l — функции из ограничений размещения вида (1) и (2), μ_k — функции вида (3)–(5), p_{low} — очевидная нижняя оценка значения переменной метрической характеристики p контейнера Ω.

Метод 3 предполагает использование мультистарта и состоит в поиске локальных минимумов функции для заданного набора стартовых точек. Для поиска локальных минимумов почти-дифференцируемых функций применяются алгоритмы минимизации негладких функций, в частности $r(\alpha)$-алгоритм Шора [6, 7]. Данный метод позволяет получать хорошие локально-оптимальные решения для небольшого числа (< 100) объектов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена обобщенная математическая модель задачи балансной компоновки 3D-объектов, множество реализаций которой (в зависимости от вида объектов, формы контейнера, функции цели и вида ограничений поведения) покрывает широкий класс практических задач, возникающих в ракетно-космическом машиностроении. Использование метода *phi*-функций для аналитического описания ограничений размещения позволяет представить обобщенную математическую модель в виде задачи нелинейного программирования с негладкими функциями. Предлагаются три метода решения с применением $r(\alpha)$-алгоритма Шора, метода мультистарта и ускоренного перебора вершин дерева решений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Modeling and optimization in space engineering / G. Fasano, J.D. Pintér (Eds.) // Springer Optimization and its Applications. — 2013. — **73.** — 404 p.
2. Che C., Wang Y., Teng H. Test problems for quasi-satellite packing: Cylinders packing with behavior constraints and all the optimal solutions known // Optimization Online. — 2008. — http://www.optimization-online.org/DB_HTML/2008/09/2093.html.
3. Lei K. Constrained layout optimization based on adaptive particle swarm optimizer / C. Zhihua, L. Zhenhua, K. Zhuo, L. Yong (Eds.) // Advances in Computation and Intelligence. — 2009. — N 1. — P. 434–442.
4. Sun Z., Teng H. Optimal layout design of a satellite module // Engineering Optimization. — 2003. — **35**, N 5. — P. 513–530.
5. Chazelle B., Edelsbrunner H., Guibas L.J. The complexity of cutting complexes // Discrete & Computational Geometry. — 1989. — **4**, N 2. — P. 139–181.
6. Shor N.Z. Nondifferentiable optimization and polynomial problems. — Boston; Dordrecht; London: Kluwer Acad. Publ., 1998. — 394 p.
7. Shor N.Z., Stetsyuk P.I. Modified *r*-algorithm to find the global minimum of polynomial functions // Cybernetics and Systems Analysis. — 1997. — **33**, N 4. — P. 482–497.
8. Wachter A., Biegler L.T. On the implementation of an interior-point filter line-search algorithm for large-scale nonlinear programming // Mathematical Programming. — 2006. — **106**, N 1. — P. 25–57.
9. Chernov N., Stoyan Yu., Romanova T., Pankratov A. *Phi*-functions for 2D objects formed by line segments and circular arcs // Advances in Operations Research. — 2012. — — Article ID 346358. — 26 p. — doi:10.1155/2012/346358.
10. Chernov N., Stoyan Yu., Romanova T. Mathematical model and efficient algorithms for object packing problem // Computational Geometry: Theory and Applications. — 2010. — **43**, N 5. — P. 533–553.
11. Стоян Ю.Г., Панкратов А.В., Романова Т.Е., Чернов Н.И. Квази-*phi*-функции для математического моделирования отношений геометрических объектов // Доп. НАН України. — 2014. — № 9. — С. 53–57.
12. Романова Т.Е., Коваленко А.А. Phi-функции для моделирования ограничений включения в оптимизационных задачах компоновки // Системи обробки інформації. — 2013. — **1**, № 117. — С. 228–133.
13. Stoyan Yu., Romanova T. Mathematical models of placement optimization: Two- and three-dimensional problems and applications / G. Fasano, J.D. Pintér (Eds.) // Modeling and Optimization in Space Engineering. Ser. Springer Optimization and its Applications. — 2013. — **73.** — P. 363–388.
14. Коваленко А.А., Панкратов А.В., Романова Т.Е., Стецюк П.И. Упаковка круговых цилиндров в цилиндрический контейнер с учетом специальных ограничений поведения системы // Журнал обчислювальної та прикладної математики. — 2013. — № 1(111). — С. 126–134.
15. Bennell J., Scheithauer G., Stoyan Y., Romanova T., Pankratov A. Optimal clustering of a pair of irregular objects // Journal of Global Optimization. — 2015. — **61**, N 3. — P. 497–524.

Поступила 12.09.2014