УДК 517.95

К.И. КАБАНОВ, В.М. КОЛОДЯЖНЫЙ

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ С ПЛОТНОСТЯМИ ТИПА АТОМАРНЫХ ФУНКЦИЙ

Аннотация. Рассмотрены финитные случайные величины, раскладываемые в сумму двух независимых случайных величин, одна из компонент имеет такой же тип распределения. Исследованы свойства характеристических функций на основе анализа дифференциальных уравнений и выделен класс распределений, обладающий некоторыми экстремальными свойствами энтропии.

Ключевые слова: атомарная функция, случайная величина, характеристическая функция, энтропия.

ВВЕДЕНИЕ

Одним из наиболее важных классов распределений являются так называемые устойчивые распределения. Они представляют особый интерес в связи с задачей об одинаковой распределенности статистик X_1 и $a_1X_1+a_2X_2$ повторной выборки (X_1, X_2). Первой работой по изучению данного условия является статья Д. Пойа (1923), в которой установлено, что среди распределений, обладающих конечным вторым моментом, только нормальное распределение устойчиво. Дальнейшее развитие теория устойчивых распределений получила в работах Ю. Марцинкевича, П. Леви, Ю.В. Линника, в которых дано полное описание законов, допускающих свойство одинаковой распределенности линейных статистик, и показано, что при некоторых дополнительных условиях этим свойством обладает только нормальный закон [1]. Кроме того, устойчивые распределения тесно связаны с центральной предельной теоремой. Распределение суммы независимых одинаково распределенных случайных величин (с.в.) сходится к распределению из класса устойчивых.

Известно, что все устойчивые распределения безгранично делимы, абсолютно непрерывны и их плотности одновершинны. Из безграничной делимости сразу следует, что в классе устойчивых распределений нет финитных, т.е. распределений, для которых существует число $N<\infty$ такое, что $P(|X|<N)=1$. Однако во многих приложениях условие ограниченности является более естественным, чем, например, существование второго момента. Это привело к изучению аналогичных задач, но для с.в. со значениями на конечных группах. В частности, П. Леви [2] доказал, что для с.в. со значениями на окружности сумма стремится, в случае одинаково распределенных слагаемых, к равномерному распределению, с единственным исключением, когда значениями слагаемых могут быть только вершины правильного вписанного многоугольника.

В связи с этим поставим следующую задачу: необходимо наиболее полно описать с.в. X, которые можно представить в виде суммы независимых с.в., одна из которых ограничена, а вторая принадлежит к тому же типу, что и X. Тривиальные случаи, когда одна из компонент вырождена, здесь не рассматриваются.

Для с.в. X будем придерживаться следующих обозначений: функция распределения (ф.р.) $F_X(x)=P(X<x)$ и характеристическая функция (х.ф.) $\varphi_X(t)=Ee^{itx}=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}dF_X(x)$ — преобразование Фурье–Стилтьеса.

Сформулируем теорему.

Теорема 1. Пусть X, X_1, Y — независимые случайные величины, при этом X и X_1 одинаково распределены по закону $F_X(x)$ с х.ф. $\varphi_X(t)$, а Y — финитная с ф.р. $F_Y(x)$ и х.ф. $\varphi_Y(t)$.

Если X и aX_1+Y одинаково распределены и $a>0$, то параметр a принадлежит интервалу $(0;1)$, с.в. X непрерывная, финитная, ее х.ф. $\varphi_X(t)=\prod_{k=0}^{\infty}\varphi_Y(a^k t)$, причем бесконечное произведение всегда сходится к собственному пределу. Кроме того, семиинварианты распределений с.в. X и Y связаны соотношением $\chi_i=\dfrac{a^i}{1-a^i}\eta_i$.

Доказательство. Перепишем определяющее соотношение в терминах характеристических функций. Из теоремы единственности и условия независимости имеем

$$\varphi_X(t)=\varphi_{aX_1+Y}(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{it(ax_1+y)}dF_{X_1}(x_1)dF_Y(y)=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itax_1}dF_{X_1}(x_1)\int_{-\infty}^{+\infty}e^{ity}dF_Y(y)=\varphi_X(at)\varphi_Y(t).$$

Таким образом, условие теоремы равносильно уравнению

$$\varphi_X(t)=\varphi_Y(t)\varphi_X(at).$$

Покажем, что параметр a не превосходит единицы. Пусть верно обратное: $a\ge 1$. При $a=1$ сразу приходим к вырожденному случаю, поскольку $\varphi_Y(t)\equiv 1$ в некоторой окрестности нуля и, следовательно, по теореме Райкова [3] совпадает с х.ф. вырожденной в нуле с.в. на всей вещественной оси.

Предположим, что $a>1$. Докажем предварительно, что в условиях теоремы с.в. X является с необходимостью финитной. Обозначим $M=\inf\{y{:}P(|Y|<y)=1\}$.

Для любого фиксированного числа N в силу одинаковой распределенности имеем

$$P(X>N)=P(aX+Y>N)\ge P\left(X\ge\frac{N+M}{a}\right).$$

Тогда $P\left(X\in\left(\dfrac{N+M}{a},N\right)\right)=0$. Поскольку данное равенство верно, когда N пробегает все значения от $\dfrac{M}{a-1}$ до бесконечности, $P\left(X>\dfrac{M}{a-1}\right)=0$. Аналогичные рассуждения показывают, что и $P\left(X<-\dfrac{M}{a-1}\right)=0$. Таким образом, доказана финитность с.в. X и, значит, она обладает конечными моментами любого порядка. Из одинаковой распределенности X и aX_1+Y вытекает равенство дисперсий $D(X)=a^2D(X)+D(Y)$, что невозможно при $a>1$.

Пусть $a<1$. Повторяя предыдущие рассуждения, получаем для любого фиксированного числа N в силу одинаковой распределенности

$$P(X>N)=P(aX+Y>N)\le P\left(X\ge\frac{N-M}{a}\right).$$

Тогда $P\left(X\in\left(N,\dfrac{N-M}{a}\right)\right)=0$. Так как данное равенство верно, когда N пробегает все значения от $\dfrac{M}{1-a}$ до бесконечности, $P\left(X>\dfrac{M}{1-a}\right)=0$ и $P\left(X<-\dfrac{M}{1-a}\right)=0$.

Далее, следуя работе В.Л. Рвачева и В.А. Рвачева [4], имеем

$$\varphi_X(t)=\varphi_Y(t)\varphi_X(at)=\varphi_Y(t)\varphi_Y(at)\varphi_X(a^2t)=\ldots=\varphi_X(a^{n+1}t)\prod_{k=0}^{n}\varphi_Y(a^nt).$$

Поскольку $\varphi_X(a^{n+1}t)$ равномерно сходится к единице на каждом конечном интервале, по теореме Лукача [5] $\varphi_X(t)=\prod_{k=0}^{\infty}\varphi_Y(a^kt)$, при этом $\varphi_X(t)$ является х.ф. бесконечной сходящейся свертки $\prod_{k=0}^{\infty}{}^{*}F_Y\left(\dfrac{x}{a^k}\right)$.

Докажем непрерывность с.в. X. Пусть p — максимальный скачок ф.р. $G(x)$. Тогда $\prod_{k=0}^{\infty}p^k=0$ и по теореме Леви [5] точечный спектр свертки $\prod_{k=0}^{\infty}{}^{*}F_Y\left(\dfrac{x}{a^k}\right)$ пуст.

Из финитности с.в. X, Y следует аналитичность х.ф. $\varphi_X(t)$ и $\varphi_Y(t)$ во всей комплексной плоскости. Поскольку значение этих функции в нуле равно единице, $\ln\varphi_X(t)$ и $\ln\varphi_Y(t)$ аналитичны в некоторой окрестности нуля. Разложим их в ряд Тейлора: $\ln\varphi_X(t)=\sum_{i=1}^{\infty}\chi_i t^i$, $\ln\varphi_Y=\sum_{i=1}^{\infty}\eta_i t^i$ (имеются в виду главные ветви логарифмов).

Имеем

$$\sum_{i=1}^{\infty}\chi_\iota t^i=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\eta_\iota a^{ik}t^i=\sum_{i=1}^{\infty}\eta_\iota t^i\sum_{k=1}^{\infty}(a^i)^k=\sum_{i=1}^{\infty}\eta_i\frac{a^i}{1-a^i}t^i.$$

Следовательно, $\chi_i=\dfrac{a^i}{1-a^i}\eta_i$.

Теорема доказана.

Последнее соотношение дает необходимые и достаточные условия разложимости с.в. в сумму финитной и себе подобной, однако проверка, является ли определенная последовательность последовательностью семиинвариантов некоторого распределения, как правило, представляет сложную задачу.

Определим необходимые и достаточные условия на с.в. Y, обеспечивающие принадлежность плотности распределения с.в. X к классу атомарных функций. Атомарными, следуя [6], называются финитные решения функционально-дифференциального уравнения

$$\sum_{k=1}^{m}b_k y^{(k)}(x)=\sum_{j=1}^{n}a_j y(ax+\alpha_j).$$

Пусть $b_m=1$ и последовательность $\{\alpha_j\}$ монотонно убывает. Данное допущение не нарушает общности рассуждений.

В терминах характеристических функций принадлежность к классу атомарных плотностей равносильна тому, что х.ф. случайной величины Y представима в виде отношения тригонометрического полинома и полинома, а именно

$$\varphi_Y(t)=\frac{\sum_{j=1}^{n}a_je^{it\alpha_j}}{\sum_{k=1}^{m}b_k(-it)^k},$$

причем все корни знаменателя с учетом кратности являются и корнями числителя. Определим вид распределения с.в. Y.

Теорема 2. В условиях теоремы 1, для того чтобы плотность случайной величины X была атомарной функцией, необходимо и достаточно, чтобы плотность случайной величины Y имела вид

$$f_Y(x) = \sum_{k,j} R_{k,j}(x) f_{t_k}(x, \alpha_{j+1}, \alpha_j),$$

где $f_{t_k}(x, \alpha_{j+1}, \alpha_j) = \begin{cases} \dfrac{t_k}{e^{\alpha_j t_k} - e^{\alpha_{j+1} t_k}} e^{t_k x}, & x \in (\alpha, \beta), \\ 0, & x \notin (\alpha, \beta). \end{cases}$

Доказательство. Рассмотрим полином $P(t) = \sum\limits_{k=1}^{m} b_k t^k$. Предположим, что уравнение $P(t) = 0$ имеет m различных корней, которые обозначим t_k. Разложим функцию $P^{-1}(t)$ в сумму простейших дробей

$$\frac{1}{P(t)} = \frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{m}(t - t_k)} = \sum_{k=1}^{m} \frac{A_k}{t - t_k},$$

где $A_k = 1 / \prod\limits_{i=1}^{m}{}^{(k)} (t_k - t_i)$, а знак $\prod^{(k)}$ обозначает произведение без k-го множителя. Тогда получаем

$$\varphi_Y(t) = \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} a_j e^{it\alpha_j}}{\sum\limits_{k=1}^{m} b_k (-it)^k} = \sum_{k=1}^{m} \frac{A_k \sum\limits_{j=1}^{n} a_j e^{it\alpha_j}}{-it - t_k} = -\sum_{k=1}^{m} A_k \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} a_j e^{-t_k \alpha_j} e^{(it + t_k)\alpha_j}}{it + t_k}.$$

Обозначим $a_{jk} = a_j e^{-t_k \alpha_j}$ и преобразуем дробь в k-м слагаемом:

$$\frac{\sum\limits_{j=1}^{n} a_{jk} e^{(it+t_k)\alpha_j}}{it + t_k} = \frac{a_{1k}(e^{(it+t_k)\alpha_1} - e^{(it+t_k)\alpha_2})}{it + t_k} + \frac{(a_{1k} + a_{2k})(e^{(it+t_k)\alpha_2} - e^{(it+t_k)\alpha_3})}{it + t_k} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(a_{1k} + a_{2k} + \ldots + a_{(n-1)k})(e^{(it+t_k)\alpha_{n-1}} - e^{(it+t_k)\alpha_n})}{it + t_k} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n-1} a_{jk}^1 \frac{(e^{(it+t_k)\alpha_j} - e^{(it+t_k)\alpha_{j+1}})}{it + t_k},$$

где $a_{jk}^1 = \sum\limits_{l=1}^{j} a_{lk}$. Такое представление возможно, поскольку по предположению все корни знаменателя являются и корнями числителя.

Отметим, что непрерывная с.в. с плотностью

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{a}{e^{a\beta}-e^{a\alpha}}\,e^{ax}, & x\in(\alpha,\beta),\\ 0, & x\notin(\alpha,\beta),\end{cases}$$

имеет х.ф. вида

$$\varphi_a(t,\alpha,\beta)=\frac{a}{e^{a\beta}-e^{a\alpha}}\,\frac{e^{(it+a)\beta}-e^{(it+a)\alpha}}{it+a}.$$

В частном случае $a=0,$ $\varphi_0(t,\alpha,\beta)=\dfrac{1}{\beta-\alpha}\,\dfrac{e^{it\beta}-e^{it\alpha}}{it}$ соответствует плотности равномерного распределения на отрезке $[\alpha,\beta]$. Следовательно,

$$\varphi_Y(t)=-\sum_{k=1}^{m}A_k\,\frac{\sum\limits_{j=1}^{n-1}a_{jk}^1\,(e^{(it+t_k)\alpha_j}-e^{(it+t_k)\alpha_{j+1}})}{it+t_k}=$$

$$=-\sum_{k=1}^{m}A_k\sum_{j=1}^{n-1}a_{jk}^1\,\frac{e^{t_k\alpha_j}-e^{t_k\alpha_{j+1}}}{t_k}\,\varphi_{t_k}(t,\alpha_{j+1},\alpha_j)=$$

$$=-\sum_{k,j}\frac{\sum\limits_{l=1}^{j}a_l e^{-t_k\alpha_l}}{\prod\limits_{l=1}^{m}{}^{(k)}(t_k-t_l)}\,\frac{e^{t_k\alpha_j}-e^{t_k\alpha_{j+1}}}{t_k}\;\varphi_{t_k}(t,\alpha_{j+1},\alpha_j)\,.$$

В слагаемых, соответствующих нулевому корню $t_k=0$, нормирующий множитель полагаем равным $\alpha_{j+1}-\alpha_j$. Итак, плотность является «смесью» усеченных экспоненциальных плотностей.

Рассмотрим случай кратных корней. Для определенности предположим, что многочлен $P(t)$ имеет в нуле корень кратности 2. Тогда разложение $P^{-1}(t)$ в сумму простейших дробей имеет вид

$$\frac{1}{P(t)}=\frac{A_0}{t^2}+\sum_{k=1}^{m}\frac{A_k}{t-t_k},$$

из чего следует

$$\varphi_Y(t)=-A_0\,\frac{\sum\limits_{j=1}^{n}a_j e^{it\alpha_j}}{t^2}+\sum_{k=1}^{m}\frac{A_k\sum\limits_{j=1}^{n}a_j e^{it\alpha_j}}{-it-t_k}.$$

Как показано выше, слагаемые в сумме соответствуют плотностям показательных распределений на отрезках. Изучим плотность $\widetilde{f}(x)$ с х.ф.

$$\widetilde{\varphi}(t)=-\frac{\sum\limits_{j=1}^{n}a_j e^{it\alpha_j}}{t^2}.$$

Тригонометрический полином в числителе на мнимой оси принимает вещественные значения и имеет в нуле корень кратности 2. При подходящем выборе знака для числа δ функция $\sum_{i=1}^{n} a_j e^{it\alpha_j} - \delta$ имеет в окрестности нуля два различных корня на мнимой оси, которые обозначим ε_1 и ε_2. Введем в рассмотрение вспомогательную функцию

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} a_j e^{it\alpha_j} - \delta}{(it-\varepsilon_1)(it-\varepsilon_2)} = \frac{1}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} a_j e^{it\alpha_j} - \delta}{it-\varepsilon_1} - \frac{\sum_{i=1}^{n} a_j e^{it\alpha_j} - \delta}{it-\varepsilon_2} \right) =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} a_j e^{\varepsilon_1\alpha_j} e^{(it-\varepsilon_1)\alpha_j} - \delta}{it-\varepsilon_1} - \frac{\sum_{i=1}^{n} a_j e^{\varepsilon_2\alpha_j} e^{(it-\varepsilon_2)\alpha_j} - \delta}{it-\varepsilon_2} \right).$$

Повторяя предыдущие рассуждения, заключаем, что на интервале (α_{j+1}, α_j) плотность имеет вид

$$\frac{\left(\sum_{l=1}^{j} a_l e^{\varepsilon_1\alpha_l}\right) e^{-\varepsilon_1 x} - \left(\sum_{l=1}^{j} a_l e^{\varepsilon_2\alpha_l}\right) e^{-\varepsilon_2 x}}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}.$$

Переходя к пределу при $\delta \to 0$, значения $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ также стремятся к нулю, находим значения $\widetilde{f}(x)$ на (α_{j+1}, α_j):

$$\widetilde{f}(x) = \lim_{\varepsilon_1,\varepsilon_2\to 0} \frac{\left(\sum_{l=1}^{j} a_l e^{\varepsilon_1\alpha_l}\right) e^{-\varepsilon_1 x} - \left(\sum_{l=1}^{j} a_l e^{\varepsilon_2\alpha_l}\right) e^{-\varepsilon_2 x}}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} =$$

$$= \lim_{\varepsilon_1,\varepsilon_2\to 0} \frac{\sum_{l=1}^{j} a_l (1+\varepsilon_1\alpha_l - \varepsilon_1 x) - \sum_{l=1}^{j} a_l (1+\varepsilon_1\alpha_l - \varepsilon_1 x)}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} = \sum_{l=1}^{j} a_l \alpha_l - x\sum_{l=1}^{j} a_l.$$

В результате получаем плотность треугольного распределения, т.е. свертки равномерного распределения с собой. Если кратность корня равна k, то аналогичные рассуждения показывают, что плотность является k-кратной сверткой равномерного распределения. Простая замена показывает, что в общем случае плотность имеет вид свертки усеченного экспоненциального распределения.

Отметим, что распределение, названное экспоненциальным, вообще говоря, может быть комплексной функцией. Для перехода к вещественным функциям достаточно выделить вещественную и мнимую части этих функций.

Таким образом, доказано, что с.в. с плотностями типа атомарных функций порождаются «смесями» и свертками усеченных показательных распределений. Верно и обратное утверждение. Любая плотность, порожденная «смесями» и свертками усеченных показательных распределений, является решением уравнения, однако несколько более общего вида, а именно

$$\sum_{k=1}^{m} b_k y^{(k)}(x) = \sum_{l} \sum_{j=1}^{n} a_{jl} y^{(l)}(ax + \alpha_{jl}).$$

Для того чтобы продемонстрировать особенность этих распределений, рассмотрим функцию энтропии с.в.

$$H(X) = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\log_2 f(x)dx.$$

Известно [7], что максимальной энтропией среди всех распределений, сосредоточенных на отрезке, без каких-либо ограничений обладает равномерное распределение. Если зафиксировать математическое ожидание, максимум энтропии будет достигаться на усеченном показательном распределении. Сформулируем следующее утверждение.

Теорема 3. Если случайная величина представима в виде суммы двух независимых случайных величин, первая из которых принадлежит к одному с ней типу, а вторая финитна и имеет максимальную энтропию, то случайная величина имеет плотность типа атомарной функции.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе описана структура случайных величин, имеющих плотности типа атомарных функций и свойства, характеризующие такие величины. Полученные результаты показывают, что, с одной стороны, эти распределения частично обладают некоторыми свойствами разложимости, сходными со свойствами нормального и равномерного распределений, а с другой — энтропийными свойствами равномерных и показательных распределений. Данные свойства достаточно естественны для большого класса статистических задач, поэтому атомарные плотности могут находить применение наравне со стандартными семействами плотностей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Каган А.М., Линник Ю.В., Рао С.Р. Характеризационные задачи математической статистики. — М.: Наука, 1972. — 656 с.
2. Levy P. L'addition des variables aleatoires definies sur une circonference // Bull. Soc. Math. France. — 1939. — **67**, N 1, 2. — P. 1–41.
3. Линник Ю.В. Разложения вероятностных законов. — Л.: Изд-во Ленинград. ун-та, 1960. — 264 с.
4. Рвачов В.Л., Рвачов В.О. Про одну фінітну функцію // ДАН УРСР. Сер. А. — 1971. — С. 705–707.
5. Лукач Е. Характеристические функции. — М.: Наука, 1979. — 423 с.
6. Рвачев В.Л., Рвачев В.А. Неклассические методы теории приближений в краевых задачах. — К.: Наук. думка, 1979. — 196 с.
7. Рао С.Р. Линейные статистические методы и их применение. — М.: Наука, 1968. — 548 с.

Поступила 05.05.2014