УДК 519.86

Н.С. ГОНЧАР

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАБОТЫ БАНКА

Аннотация. Предложена общая математическая концепция описания работы банка. С этой целью введена базисная модель работы банка, эволюция капитала в которой описывается процессом Маркова. Получена оценка вероятности банкротства в базисной модели работы банка, которая мажорирует вероятность банкротства банка в предложенной модели. Указано величину начального капитала банка, при котором банк может функционировать неограниченное время с достаточно малой вероятностью банкротства.

Ключевые слова: вероятность разорения банка, капитал банка, стратегия инвестирования, стратегия привлечения депозитов, случайная величина, цепь Маркова.

ВВЕДЕНИЕ

Вопрос вычисления вероятности банкротства в играх со случайными результатами восходит к работе Муавра (1711 г.), который рассматривал случайное блуждание Бернулли, стартующее с некоторого капитала u. В его работе впервые вычислена вероятность банкротства игрока, владеющего начальным капиталом u, при условии, что это произойдет не позже, чем его капитал достигнет некоторого уровня. Позднее мартингальные методы исследования случайных блужданий, броуновского движения со сносом на прямой позволили получить оценки для вероятности банкротства на конечном временном интервале [1–3]. Первым, кто применил мартингальные методы для оценки вероятности разорения, был Гербер [4, 5]. В дальнейшем эти методы получили развитие в работах [6–10]. Проблема получения оценки вероятности банкротства при случайном инвестировании в активы находится под пристальным вниманием исследователей, начиная с работ Кестена [11] и Голди [12].

СОСТОЯНИЕ ИССЛЕДОВАНИЙ ОПИСАНИЯ РИСКОВ

В публикациях, упомянутых выше, рассматривается дискретная модель $R_n = A_n R_{n-1} - B_n$, $n = 1, 2, \dots$, где каждая из последовательностей A_n, B_n независимы и одинаково распределены. Кроме того, они независимы между собой. Основное утверждение состоит в том, что если $A_n > 0$, существует $\alpha > 0$ такое, что $EA_1^{-\alpha} = 1$, $EA_1^{-\alpha} \log A_1 < \infty$, а распределение A_1^{-1} нерешетчато, то для вероятности банкротства $\psi(u) = P(\exists\, n \geq 1, R_n < 0)$ при больших u справедлива асимптотика $\psi(u) \sim C_2 / (1+u)^{\alpha}$, где выражение для константы C_2 не поддается оценке через параметры модели, хотя Ниринен в [13] показал, что она является строго положительной. В работах [13–16] допускалась некоторая слабая зависимость между последовательностями A_n и B_n.

Проблема оценивания рисков страховых компаний восходит к Лунбергу [17, 18] и Крамеру [19]. В их модели компания не инвестировала полученные премии в рисковые и безрисковые активы. Первая попытка возможности инвестирования в безрисковый актив под фиксированную ставку была предпринята в работе [20]. Развитие эта идея получила в [21, 22], а затем в более общей форме в [23]. В работах [24, 25] содержатся разделы, посвященные этой теме. В [26] представлен обзор достижений в непрерывных моделях, в некотором смысле являющихся пределом содержательных дискретных моделей. Рассматриваемый там процесс риска состоит из слагаемых, одно из которых описывает поступление премий пропорционально времени с некоторой флуктуацией, представленной броуновским движением, второе слагаемое, описывающее возмещение исков, представлено составным процессом Пуассона. И, наконец, третье слагаемое процесса риска, представляет собой стохастический интеграл по процессу Винера со сносом и описывает инвестирование в рисковые активы. Этот процесс является однородным процессом Маркова, и представленная методика исследования вероятности банкротства в этой модели состоит в исследовании асимптотики решений интегро-дифференциальних уравнений, которым она удовлетворяет. В [26] получена асимптотика таких решений, а также представлены результаты численных исследований. Нахождение каких-либо оценок является весьма сложным, поскольку они либо являются проблематичными, либо не поддаются вычислению.

В отечественной литературе состояние исследований в этой области представлено в работах [27–30]. В [31] вероятность банкротства в сложной пуассоновской модели оценивалась методом Монте-Карло. В статьях [32–34] рассмотрен процесс риска с поступлением исков в страховую компанию, описываемых общим процессом восстановления и детерминированной нелинейной монотонно возрастающей интенсивностью поступления премий. Представлен алгоритм построения последовательных приближений для вероятности неразорения. Даны необходимые и достаточные условия существования предела последовательных приближений и получена оценка снизу.

В работе [35] обобщена классическая модель риска на случай случайного поступления премий и инвестирования в рисковый актив, эволюционирующий скачкообразно. Оценки частных производных вероятности разорения использованы для получения формул, связывающих точность и надежность вероятностей небанкротства их статистическими оценками. В [36] получена оценка вероятности неразорения страховой компании, инвестирующей в рисковый актив, который эволюционирует в соответствии с моделью Кларка.

В модели, рассмотренной в [37], получена оценка вероятности банкротства в предположении частичного инвестирования в рисковый актив, эволюция стоимости которого описывается геометрическим броуновским движением, и безрисковый актив под некоторую ставку процента с возможностью получения кредита под эту же ставку.

Рассматриваемые как дискретные, так и непрерывные модели риска являются довольно абстрактными, чтобы претендовать на описание реальных объектов экономики. Вместе с тем эти исследования весьма полезны для совершенствования методов исследования происходящих в реальности процессов. Рассматриваемые модели близки к описанию работы страховой компании, которая часть собранных премий может инвестировать как в рисковые, так и безрисковые активы.

В представленных моделях не просматривается возможность описания ими работы банка, поскольку банк должен привлечь депозиты под определенную ставку, а затем их кредитовать в активы экономики, заработав в результате такой капитал, которым он сможет рассчитаться за привлеченные под процентную ставку депозиты вместе с процентами. Этого капитала должно хватить и на выплату по другим обязательствам банка. Риск инвестирования банком в активы экономики гораздо выше, нежели страховой компании. От величины этого риска зависит величина процента на депозит. Нахождение этой зависимости является задачей, которая должна быть также решена.

В настоящей статье представлена общая концепция модельного описания работы банка. В предложенной модели решена задача оценивания вероятности разорения банка в зависимости от таких факторов, как величина капитала, обеспечивающего ликвидность работы банка, выбор инвестиционной стратегии, политика привлечения депозитов на счета банка, ограничения выплат по обязательствам, уровень начального капитала банка. Поэтому такая модель может быть использована с целью управления работой банка для обеспечения постоянной его работы. Чтобы обеспечить работу банка в течение длительного времени с достаточно малой вероятностью банкротства, необходимо, чтобы случайные величины, описывающие привлечение депозитов на счета банка, были ограничены снизу положительной константой, а инвестирование в активы экономики было благоприятным.

В данной статье построена математическая модель работы банка на основе введенных следующих структур: динамика стратегии инвестирования, описываемая последовательностью случайных величин, n-й элемент которой является инвестированием банка как в рисковые, так и безрисковые активы в период времени $[n-1, n]$; динамика привлечения депозитов на счета банка и динамика банковских доходов от операционной деятельности, описываемая последовательностью случайных величин, n-й элемент которой является стратегией привлечения депозитов и получения доходов от операционной деятельности банка в период времени $[n-1, n]$; динамика выплат по обязательствам, описываемая последовательностью случайных величин, n-й элемент которой является стратегией выплат по обязательствам в период времени $[n-1, n]$. С помощью этих структур описана эволюция капитала банка.

Чтобы построить вышеуказанные структуры, введена базисная модель работы банка, порождаемая структурами: динамика нижней оценки стратегии инвестирования банка, описываемая последовательностью независимых одинаково распределенных случайных величин; динамика нижней оценки стратегии привлечения депозитов на счета банка и банковских доходов от операционной деятельности, описываемая последовательностью независимых одинаково распределенных случайных величин; динамика так называемой верхней оценки выплат, описываемая последовательностью независимых одинаково распределенных случайных величин. Используя эти данные, строим динамику нижней оценки капитала банка в рассматриваемой базисной модели. Эта динамика является цепью Маркова. Основная проблема – оценить вероятность разорения в построенной модели. Для решения этой задачи получено интегральное уравнение для вероятности банкротства в такой системе работы банка. Установлена оценка вероятности банкротства в базисной модели работы банка как на конечном, так и бесконечном временных интервалах его работы. Введена количественная характеристика качества менеджмента банка. Эти результаты применены к оцениванию вероятности разорения банка.

В предложенной модели работы банка решена задача оценивания вероятности его разорения в зависимости от таких факторов, как величина капитала, обеспечивающего ликвидную работу банка; выбор инвестиционной стратегии; политика привлечения депозитов на счета банка; ограничение на выплату по обязательствам; уровень начального капитала; величина максимальных выплат; отношение значения максимальных выплат к сумме максимальных выплат и максимальной величины депозитов на банковских счетах.

Предложенная здесь базисная модель работы банка обобщает дискретный вариант классической модели риска [11, 12, 18, 38, 39]. Она позволяет описать инвестирование не только в безрисковые и рисковые активы, как это сделано в [11, 12, 39], но и описать работу банка, инвестирующего в рисковые и безрисковые активы, получить оценку вероятности его разорения.

БАЗИСНАЯ МОДЕЛЬ РАБОТЫ БАНКА И МОДЕЛЬНОЕ ОПИСАНИЕ ЕГО РАБОТЫ

Пусть на вероятностном пространстве $\{\Omega, F, P\}$ каждая из последовательностей $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\{Y_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{Z_j\}_{j=1}^{\infty}$ является последовательностью независимых одинаково распределенных случайных величин, взаимно независимых в совокупности. Основные предположения относительно этих последовательностей: $P(\varphi_i > -1) = 1$, $P(Y_k \geq 0) = 1$, $P(Z_j \geq 0) = 1$. По этим последовательностям случайных величин построим последовательность капиталов базисной модели работы банка R_n по закону

$$R_n = R_{n-1}(1+\varphi_n) + Y_n - Z_n\,,\ n = 1, 2, \ldots,\ R_0 = x,\ x > 0\,. \tag{1}$$

Введем в рассмотрение две последовательности функций:

$$\varphi_m(x) = E\prod_{i=1}^{m}\chi_{[0,\infty)}(R_i)\,,\ m = \overline{1,\infty},\quad \chi_{[0,\infty)}(x) = \begin{cases} 1,\ x \in [0,\infty), \\ 0, x \in (-\infty, 0), \end{cases} \tag{2}$$

$$\psi_m(x) = 1 - \varphi_m(x),\ \ m = \overline{1,\infty}. \tag{3}$$

Обозначим

$$\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} E\prod_{i=1}^{n}\chi_{[0,\infty)}(R_i), \tag{4}$$

$$\psi(x) = 1 - \varphi(x). \tag{5}$$

Описанную выше модель, эволюция капитала которой задана формулой (1), назовем базисной моделью работы банка, где $\psi_m(x)$ и $\psi(x)$ – вероятности разорения в базисной модели работы банка на временных интервалах $[0, m]$ и $[0, \infty)$ соответственно.

Будем считать, что работа банка описана, если на вероятностном пространстве $\{\Omega, F, P\}$ задана эволюция капитала банка R_n^0, $n = \overline{1,\infty}$. Полагаем, что начальная величина капитала банка $R_0^0 = x$ неслучайна. В последующие моменты времени эволюция капитала банка R_n^0 задается последовательностями случайных величин $\{\varphi_i^0\}_{i=1}^{\infty}$, $\{Y_k^0\}_{k=1}^{\infty}$, $\{Z_j^0\}_{j=1}^{\infty}$ с помощью формулы

$$R_n^0 = R_{n-1}^0(1+\varphi_n^0) + Y_n^0 - Z_n^0,\ \ n = 1, 2, \ldots, \tag{6}$$

где

$$\begin{cases} \varphi_n^0 = \overline{\varphi}_n(\varphi_1, Y_1, Z_1, \ldots, \varphi_n, Y_n, Z_n, \omega),\ n = \overline{1,\infty}, \\ Y_n^0 = \overline{Y}_n(\varphi_1, Y_1, Z_1, \ldots, \varphi_n, Y_n, Z_n, \omega),\ n = \overline{1,\infty}, \\ Z_n^0 = \overline{Z}_n(\varphi_1, Y_1, Z_1, \ldots, \varphi_n, Y_n, Z_n, \omega),\ n = \overline{1,\infty}; \end{cases} \tag{7}$$

функции

$$\overline{\varphi}_n(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n, \omega),\ \overline{Y}_n(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n, \omega)\,,$$
$$\overline{Z}_n(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n, \omega),\ n = \overline{1,\infty}\,,$$

являются измеримыми функциями относительно σ-алгебры $[B((-1, B_0])\times B(R_+^1)\times B(R_+^1)]^n \times F$, $B((-1, B_0])$ — борелевская σ-алгебра подмножеств из $(-1, B_0]$, а $B(R_+^1)$ — борелевская σ-алгебра подмножеств из R_+^1. Случайные величины φ_n^0, Y_n^0, Z_n^0 имеют следующий экономический смысл: φ_n^0 характеризует инвестиционную активность банка в период отрезка времени $[n-1, n]$ и принимает значения во множествах $(-1, B_0], 0 < B_0 < \infty$; Y_n^0 принимает значения во множестве $[0, \infty)$ и означает капитал, который банк получает на свои счета от поступления депозитов и доходов от операционной деятельности в период времени $[n-1, n]$; и, наконец, Z_n^0 принимает значения во множестве

$[0,\infty)$ и означает обязательства банка в период времени $[n-1, n]$. Введем в рассмотрение две последовательности функций:

$$\varphi_m^0(x)=E\prod_{i=1}^{m}\chi_{[0,\infty)}(R_i^0),\ \ m=\overline{1,\infty}, \tag{8}$$

$$\psi_m^0(x)=1-\varphi_m^0(x),\ \ m=\overline{1,\infty}, \tag{9}$$

$$\varphi_0(x)=\lim_{m\to\infty}E\prod_{i=1}^{m}\chi_{[0,\infty)}(R_i^0), \tag{10}$$

$$\psi_0(x)=1-\varphi_0(x). \tag{11}$$

Для последующего изложения теорема 1 является фундаментальной.

Теорема 1. Предположим, что на вероятностном пространстве $\{\Omega, F, P\}$ каждая из последовательностей случайных величин φ_i, $i=\overline{1,\infty}$, Y_k, $k=\overline{1,\infty}$, Z_j, $j=\overline{1,\infty}$, состоит из независимых одинаково распределенных случайных величин, которые между собой в совокупности взаимно независимы и удовлетворяют условиям

$$P(\varphi_n>-1)=1,\ \ P(Y_n\ge 0)=1,\ \ P(Z_n\ge 0)=1,\ \ n=\overline{1,\infty}.$$

Если $P(\varphi_n^0\ge\varphi_n)=1, P(Y_n^0-Z_n^0\ge Y_n-Z_n)=1$, то

$$\psi_m^0(x)\le\psi_m(x),\ \ m=\overline{1,\infty}, \tag{12}$$

$$\psi_0(x)\le\psi(x). \tag{13}$$

Доказательство непосредственно следует из неравенств

$$P(R_n^0\ge R_n)=1,\ \ n=\overline{1,\infty}, \tag{14}$$

и определений $\psi_m^0(x)$, $\psi_m(x)$, $\psi_0(x)$ и $\psi(x)$. Теорема доказана.

РЕЗУЛЬТАТЫ ОЦЕНИВАНИЯ ВЕРОЯТНОСТИ БАНКРОТСТВА В БАЗИСНОЙ МОДЕЛИ РАБОТЫ БАНКА

Из теоремы 1 следует, что для оценки вероятности разорения банка в рассматриваемой модели достаточно получить оценки для $\psi_m(x)$, $m=\overline{1,\infty}$, и $\psi(x)$. В соответствии с описанием базисной модели работы банка будем полагать, что случайные величины φ_i, Y_k, Z_j, $i,k,j=1,2,\ldots$, каждой последовательности $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\{Y_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{Z_j\}_{j=1}^{\infty}$ независимы, одинаково распределены соответственно и являются независимыми в совокупности. Считаем, что случайная величина φ_i принимает значения во множестве $(-1, B_0]$, где $B_0>0$, случайная величина Y_k — во множестве $[0, C]$, где $C>0$, а случайная величина Z_j — во множестве $[0, T_1]$, где $T_1>0$. По этим данным построим последовательность случайных величин R_n, $n=\overline{1,\infty}$, определенную следующими рекуррентными соотношениями:

$$R_n=R_{n-1}(1+\varphi_n)+Y_n-Z_n,\ \ \ n=1,2,\ldots \tag{15}$$

Основная задача – оценить вероятность разорения $\psi(x)$ для базисной модели работы банка, зная функции распределения случайных величин φ_i, Y_k, Z_k. Введем следующие обозначения: $\rho(x)=P(\varphi_i\le x)$, $F_1(x)=P(Y_k\le x)$, $F_2(x)=$ $=P(Z_k\le x)$, $\eta_i=Z_i-Y_i$, $i=\overline{1,\infty}$. В таких обозначениях рекуррентные соотношения (15) для R_n примут вид

$$R_n=R_{n-1}(1+\varphi_n)-\eta_n,\ \ n=1,2,\ldots \tag{16}$$

Обозначим $F_0(x)=P(Z_1-Y_1\le x)$. Нетрудно видеть, что

$$F_0(x)=\int_0^C F_2(x+y)dF_1(y). \tag{17}$$

Последовательность $R_n,\ n=\overline{1,\infty}$, образует однородную цепь Маркова с переходной функцией за один шаг

$$P(s-1,x,s,A)=E\chi_A(x(1+\varphi_s)-\eta_s)=\int_{-1}^{B} d\rho(b)\int_{(1+b)x-A} dF_0(y),$$

где $a-A=\{a-y,\ y\in A\}$ для некоторого вещественного a и $A\in B(R^1)$. Тогда

$$\varphi_m(x)=$$

$$=\int_0^\infty P(0,x,1,dy_1)\dots\int_0^\infty P(m-2,\ y_{m-2},m-1,dy_{m-1})P(m-1,\ y_{m-1},m,[0,\infty)). \tag{18}$$

Из (18) получаем следующие рекуррентные соотношения:

$$\varphi_m(x)=\int_{-1}^{B} d\rho(b)\int_{-\infty}^{(1+b)x}\varphi_{m-1}((1+b)x-y)dF_0(y),\ \ m=1,2,\dots \tag{19}$$

Введем функцию $F(x)=P(Z_i+C-Y_i\le x)$. Тогда $F(x)=F_0(x-C)$. Очевидно, что $F(x)=0, x<0$. Если мера, порожденная функцией распределения $F_2(x)$, сосредоточена на интервале $[0,T_1]$, то мера, порожденная функцией распределения $F(x)$, сосредоточена на интервале $[0,T_1+C]$. Введем обозначение $T=T_1+C$. С учетом этого получаем рекуррентные соотношения

$$\varphi_m(x)=\int_{-1}^{B_0} d\rho(b)\int_0^{(1+b)x+C}\varphi_{m-1}((1+b)x+C-y)dF(y),\ \ m=1,2,\dots$$

Теорема 2. Вероятность разорения в базисной модели работы банка $\psi(x)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$\psi(x)=\int_{-1}^{B_0} d\rho(b)[1-F((1+b)x+C)]+\int_0^\infty P(0,x,1,dy_1)\psi(y_1)=$$

$$=\int_{-1}^{B_0} d\rho(b)[1-F((1+b)x+C)]+\int_{-1}^{B_0} d\rho(b)\int_0^{(1+b)x+C}\psi\ ((1+b)x+C-y)dF(y). \tag{20}$$

Решение уравнения (20), определяющее вероятность разорения, задается формулой

$$\psi(x)=\sum_{k=0}^{\infty}A^k\varphi_0(x), \tag{21}$$

где введены следующие обозначения:

$$\varphi_0(x)=\int_{-1}^{B_0} d\rho(b)[1-F((1+b)x+C)], \tag{22}$$

$$Af(x)=\int_{-1}^{B_0} d\rho(b)\int_0^{(1+b)x+C} f((1+b)x+C-y)dF(y). \tag{23}$$

Доказательство. Обозначим вероятность разорения для базисной модели работы банка во временном интервале $[0, m]$ формулой $\psi_m(x) = 1 - \varphi_m(x)$, тогда $\psi_m(x)$ удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$\psi_m(x) = \int_{-1}^{B} d\rho(b)[1 - F((1+b)x + C)] + \int_{-1}^{B} d\rho(b) \int_{0}^{(1+b)x+C} \psi_{m-1}((1+b)x + C - y)dF(y).$$

Единственное решение этого рекуррентного соотношения представимо в виде

$$\psi_m(x) = \sum_{k=0}^{m-1} A^k \varphi_0(x). \tag{24}$$

Из непрерывности вероятности имеем $\varphi(x) = \lim\limits_{m\to\infty} \varphi_m(x)$, поэтому $\psi(x) = \lim\limits_{m\to\infty} \psi_m(x)$. Из последнего вытекает, что ряд

$$\psi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \varphi_0(x)$$

сходится как ряд с неотрицательными членами, мажорируемый единицей. Теорема доказана.

Введем в рассмотрение количественную характеристику качества инвестирования банком в рисковые и безрисковые активы

$$i_e = \int_{-1}^{B_0} \frac{d\rho(b)}{1+b}.$$

Если $i_e < 1$, то считаем, что инвестирование является благоприятным. В противном случае, если $i_e \geq 1$, то инвестирование является неблагоприятным. Чем меньше значение $i_e < 1$, тем лучше банковское инвестирование в активы экономики. Чем больше значение $i_e \geq 1$, тем хуже инвестирование в активы экономики.

Докажем ряд вспомогательных утверждений, необходимых в дальнейшем.

Лемма 1. Существует и единственен корень $t(\alpha)$ уравнения

$$1 + \frac{1}{t} = \exp\left(\frac{1+\alpha}{1+t}\right), \ \alpha > 0, \tag{25}$$

во множестве $0 < t < \dfrac{1}{2\alpha}$. Он является монотонно убывающей функцией α. Если $0 < \alpha \leq 1$, то корень $t(\alpha)$ уравнения (25) удовлетворяет неравенствам

$$\frac{1-\alpha}{2\alpha} < t(\alpha) < \frac{1}{2\alpha}.$$

Доказательство. Докажем сначала, что для $\alpha > 0$ справедливо неравенство $f(\alpha) < 0$, где

$$f(\alpha) = 1 + 2\alpha - \exp\left(\alpha + \frac{\alpha}{1+2\alpha}\right) = x(\alpha)^{-1} - \exp\{\alpha(1 + x(\alpha))\}, \ x(\alpha) = \frac{1}{1+2\alpha}.$$

Поскольку $f'(\alpha) = 2 - [1 + x(\alpha)]\exp\{\alpha(1 + x(\alpha))\}$, $f''(\alpha) = [4x(\alpha)^3 - (1 + x(\alpha)^2)^2] \times \times \exp\{\alpha(1 + x(\alpha))\}$, то для $\alpha > 0$ справедливо неравенство $f''(\alpha) \leq -(1 - x(\alpha)^2)^2 \times \times \exp\{\alpha(1 + x(\alpha))\} < 0$. Поэтому для всех $\alpha > 0$ имеем $f''(\alpha) < 0$. Так как $f'(0) = 0$, имеем $f'(\alpha) < 0$, $\alpha > 0$. Но $f(0) = 0$. Отсюда $f(\alpha) < 0$, $\alpha > 0$. Введем в рассмотрение функцию

$$g(t, \alpha) = 1 - \frac{t}{1+t} \exp\left(\frac{1+\alpha}{1+t}\right).$$

Поскольку $f(\alpha)<0$, то $g\left(\dfrac{1}{2\alpha}, \alpha\right)<0$. Так как $g(0,\alpha)=1>0$ и $g(t,\alpha)$ является непрерывной на интервале $\left[0, \dfrac{1}{2\alpha}\right]$, то это доказывает существование корня. Справедливы равенства

$$\frac{\partial g(t,\alpha)}{\partial t} = -\frac{1}{(1+t)^2}\left[1-(1+\alpha)\frac{t}{t+1}\right]\exp\left(\frac{1+\alpha}{1+t}\right),$$

$$\frac{\partial g(t,\alpha)}{\partial \alpha} = -\frac{t}{(1+t)^2}\exp\left(\frac{1+\alpha}{1+t}\right). \tag{26}$$

Так как $\dfrac{\partial g(t,\alpha)}{\partial t}<0$, $\dfrac{\partial g(t,\alpha)}{\partial \alpha}<0$ в интервале $(0, 1/2\alpha]$, то первое неравенство доказывает единственность корня уравнения (25), а оба неравенства означают, что $t(\alpha)$ — монотонно убывающая функция α, поскольку $\dfrac{dt(\alpha)}{d\alpha}<0$. Если $0<\alpha\le 1$, то для $\bar{t}=\dfrac{1-\alpha}{2\alpha}$ справедливо неравенство

$$\left(1+\frac{1}{\bar{t}}\right) > \exp\left(\frac{1+\alpha}{1+\bar{t}}\right), \quad 1\ge\alpha>0.$$

Отсюда следует утверждение о неравенствах для корня $t(\alpha)$.

Лемма 2. Функция

$$f(z)=\ln\left(1+\frac{1}{z}\right)-\frac{1}{1+z}-\frac{\alpha t}{z(1+z)}, \quad \alpha>0,$$

является положительной на множестве $z\in[t,\infty)$ для $0<t<t(\alpha)<1/2\alpha$, где $t(\alpha)$ — корень уравнения (25). Если $\alpha\le 0$, то $f(z)>0$ на множестве $z\in[0,\infty)$.

Доказательство. Существует положительный корень z_0 уравнения

$$f'(z)=\frac{-z(1-2\alpha t)+\alpha t}{z^2(1+z)^2}=0$$

при условии, что справедливы условия леммы 2. Он задается формулой

$$z_0=\frac{\alpha t}{1-2\alpha t}>0, \quad t<\frac{1}{2\alpha}.$$

Поскольку $\dfrac{\partial g(t,\alpha)}{\partial t}<0$, $t\in(0, 1/2\alpha]$, то для $t<t(\alpha)$ имеем $g(t,\alpha)>g(t(\alpha),\alpha)= \ =0$. Из последнего неравенства следует неравенство $f(t)>0$. Возможны два случая: 1) $z_0\le t<t(\alpha)$; 2) $z_0>t<t(\alpha)$. В первом случае $f'(z)<0$, $t<z<\infty$. Поэтому

$$-f(z)=\int_z^{\infty} f'(x)dx<0, \quad t\le z<\infty.$$

Во втором случае $f'(z)\ge 0$ на интервале $[t, z_0]$, поэтому $f(z_0)>f(t)>0$. На интервале (z_0,∞) имеем $f'(z)<0$, а значит и на этом интервале $f(z)>0$. Последнее утверждение леммы 2 следует из неравенства $\ln\left(1+\dfrac{1}{z}\right)-\dfrac{1}{1+z}>0$, справедливого для всех $z \geq 0$.

Лемма 3. Функция

$$I(x) = \frac{A_0 + x}{T} \int_0^T \frac{dy}{A_0 + (1+b)x + C - y}$$

является монотонно возрастающей функцией $x \in [0, \infty)$, если $0 < t = \dfrac{\varepsilon(T-C)}{T} <$

$< t(\alpha) < \dfrac{1}{2\alpha}$, $\alpha > 0$, где $t(\alpha)$ – корень уравнения (25),

$$A_0 = (1+\varepsilon)(T-C),\ 0 < \varepsilon < \infty,\ -1 < b < \infty,\ \alpha = \frac{1+(1+\varepsilon)b}{\varepsilon}.$$

Она является монотонно возрастающей функицией $x \in [0, \infty)$ для всех $t = \dfrac{\varepsilon(T-C)}{T} > 0$, если $\alpha = \dfrac{1+(1+\varepsilon)b}{\varepsilon} \leq 0$.

Доказательство. Если положить $z = \dfrac{(1+b)x + \varepsilon(T-C)}{T}$, то получим

$$I(x) = \frac{(\alpha t + z)}{(1+b)} \int_0^1 \frac{dy}{z+1-y} = \frac{(\alpha t + z)}{(1+b)} \ln\left(1 + \frac{1}{z}\right),\ t = \frac{\varepsilon(T-C)}{T},\ \alpha = \frac{1+(1+\varepsilon)b}{\varepsilon}.$$

Очевидно, что

$$I'(x) = \frac{1}{T}\left[\ln\left(1+\frac{1}{z}\right) - \frac{1}{1+z} - \frac{\alpha t}{z(1+z)}\right].$$

Условия леммы 3 обеспечивают выполнение условий леммы 2.

Лемма 4. Существует монотонно возрастающая последовательность функций $t_n(\alpha)$, удовлетворяющая неравенствам $\exp\{-(1+\alpha)\} < t_n(\alpha) < t(\alpha)$, где $t(\alpha)$ – корень уравнения (25), и сходящаяся к $t(\alpha)$.

Доказательство. Введем обозначение

$$H(t, \alpha) = \left[\exp\left(\frac{1+\alpha}{1+t}\right) - 1\right]^{-1}.$$

Тогда уравнение (25) перепишется в виде

$$t = H(t, \alpha). \tag{27}$$

Поскольку $t(\alpha)$ — корень уравнения (27), то из монотонного возрастания $H(t, \alpha)$ по переменной $t \geq 0$ будем иметь

$$t(\alpha) = H(t(\alpha), \alpha) \geq H(0, \alpha) = [\exp(1+\alpha) - 1]^{-1} = t_1(\alpha) > \exp\{(1+\alpha)\}.$$

Положим $t_n(\alpha) = H(t_{n-1}(\alpha), \alpha)$ и предположим, что справедливо неравенство $t_{n-1}(\alpha) > t_{n-2}(\alpha)$. Ввиду монотонного возрастания $H(t, \alpha)$ получаем $t_n(\alpha) = H(t_{n-1}(\alpha), \alpha) > H(t_{n-2}(\alpha), \alpha) = t_{n-1}(\alpha)$. Если положить $t_0(\alpha) = 0$, то $t(\alpha) > t_1(\alpha) > t_0(\alpha)$. Значит, последовательность $t_n(\alpha)$ будет монотонно возрастающей и ограниченной сверху решением $t(\alpha)$. Ввиду единственности решения уравнения (25) последовательность $t_n(\alpha)$ сходится к $t(\alpha)$. Лемма 4 доказана.

Введем в рассмотрение числа $\upsilon > 0$ и $\bar{\varepsilon} > 0$, определив их из условия максимума выражения

$$\upsilon = \sup_{\varepsilon > 0} \frac{t(\alpha(\varepsilon))}{\varepsilon} = \frac{t(\alpha(\bar{\varepsilon}))}{\bar{\varepsilon}}, \tag{28}$$

где $\alpha(\varepsilon)=\dfrac{1+(1+\varepsilon)B_0}{\varepsilon}$, $B_0>0$. Из оценки $t(\alpha)\le\dfrac{1}{2\alpha}$ следует неравенство

$$t(\alpha)\le\frac{1}{\exp\left\{\dfrac{(1+\alpha)2\alpha}{1+2\alpha}\right\}-1}\ .$$

Это означает, что максимальное значение в (28) достигается для некоторого положительного $\bar\varepsilon>0$. Поскольку лемма 4 дает последовательные приближения $t_n(\alpha)$ к $t(\alpha)$, то можно вычислить значение $\varepsilon_n>0$, которое доставляет супремум выражению

$$\upsilon_n=\sup_{\varepsilon>0}\frac{t_n(\alpha(\varepsilon))}{\varepsilon}\ .$$

Величину ε_n можно взять за приближенное значение $\bar\varepsilon>0$.

Теорема 3. Пусть функция распределения $F(y)$ удовлетворяет условию

$$1-F(y)\le\lambda_0\left[1-\frac{y}{T}\right],\ 0\le y\le T,\ 0<\lambda_0\le 1, \tag{29}$$

и справедливо неравенство

$$\lambda_0 i_e<1\ . \tag{30}$$

Тогда для решения уравнения (20), заданного формулой (21), справедливо неравенство

$$\psi(x)\le L\frac{A_0+i_eC}{[1-\lambda_0 i_e][A_0+x]C}\ ,\quad \sup_{0\le x\le T}x(1-F(x))=L\ , \tag{31}$$

где $A_0=(1+\bar\varepsilon)(T-C)$, а $t_0=\dfrac{(T-C)}{T}$ удовлетворяет неравенствам

$$0<t_0<\nu\ . \tag{32}$$

Числа $\bar\varepsilon$ и υ определяются из равенств (28).

Доказательство. Рассмотрим банахово пространство B_1 борелевских функций $f(x), x\in[0,\infty)$, для которых конечна норма $\|f(x)\|=\sup\limits_{x\in[0,\infty)}(A_0+x)|f(x)|$. Очевидно, что в предположениях теоремы 3 вектор $\varphi_0(x)$, заданный формулой (22), принадлежит B_1. Интегральный оператор A переводит любую борелевскую функцию из B_1в борелевскую функцию в B_1, поскольку является ограниченным вследствие неравенства

$$\|A\|\le i_e+\frac{A_0}{\bar\varepsilon(T-C)}\ .$$

Оценим норму оператора (23) в банаховом пространстве B_1 более точно. Будем иметь

$$\|A\|\le\int_{-1}^{B_0}d\rho(b)\sup_{x\in[0,\infty)}(A_0+x)\int_0^T\frac{dF(y)}{A_0+(1+b)x+C-y}\ . \tag{33}$$

Далее, для $b>-1$

$$\int_0^T\frac{dF(y)}{A_0+(1+b)x+C-y}=\frac{1-F(0)}{A_0+(1+b)x+C}+\int_0^T\frac{(1-F(y))dy}{[A_0+(1+b)x+C-y]^2}\le$$

$$\le\frac{\lambda_0}{A_0+(1+b)x+C}+\lambda_0\int_0^T\frac{(1-\dfrac{y}{T})dy}{[A_0+(1+b)x+C-y]^2}=\frac{\lambda_0}{T}\int_0^T\frac{dy}{A_0+(1+b)x+C-y}\ . \tag{34}$$

Принимая во внимание неравенства (33), (34), получаем

$$\| A \| \le \lambda_0 \int_{-1}^{B_0} d\rho(b) \sup_{x \in [0, \infty)} \frac{(A_0 + x)}{T} \int_0^T \frac{dy}{A_0 + (1+b)x + C - y} =$$

$$= \lambda_0 \int_{-1}^{B_0} d\rho(b) \lim_{x \to \infty} \frac{(A_0 + x)}{T} \int_0^T \frac{dy}{A_0 + (1+b)x + C - y} = \lambda_0 \int_{-1}^{B_0} \frac{d\rho(b)}{1+b}.$$

В последнем выражении использована лемма 3. В результате имеем

$$\sup_{x \ge 0} (A_0 + x) \int_{-1}^{B_0} d\rho(b) [1 - F((1+b)x + C)] \le L \sup_{x \ge 0} (A_0 + x) \int_{-1}^{B_0} \frac{d\rho(b)}{(1+b)x + C} \le L \left[\frac{A_0}{C} + i_e \right].$$

Вследствие того, что оператор A является сжимающим, для единственного решения уравнения (20) справедливо неравенство (31). Теорема 3 доказана.

Теорема 3 является ключевой в работе, поскольку из нее вытекают теоремы 5 и 6. В ней получена оценка (31) вероятности банкротства банка на бесконечном временном интервале, зависящая от величины его начального капитала, при условии, что справедливы неравенства (29), (30), (32). Неравенство (29) выделяет класс случайных величин, описывающих поступление доходов банка от основной деятельности, и класс случайных величин, описывающих выплату по обязательствам, при которых возможна полученная оценка. Наиболее важен случай, когда $\lambda_0 = 1$. Тогда в сочетании неравенства (29), (30), (32) означают, что при благоприятном инвестировании (30) и ограничении на выплаты по вкладам (32) справедлива оценка (31) для класса случайных величин, для которых справедлива оценка (29). Если же для выполнения неравенства (30) окажется, что необходимо выполнение неравенства $\lambda_0 < 1$, то это означает, что инвестирование банка в активы экономики является неблагоприятным и для предотвращения его банкротства следует прекратить на некоторое время выплаты по обязательствам, т.е. объявить дефолт и реструктурировать обязательства.

В следующей теореме рассматривается случай, когда функция распределения $F_2(x)$ сосредоточена на интервале $[0, \infty)$, а $F_1(x)$ – на интервале $[0, C]$.

Теорема 4. Пусть справедливы неравенства

$$\lambda_0 i_e < 1, \quad 1 - \frac{F(y)}{F(T_0)} \le \lambda_0 \left[1 - \frac{y}{T_0} \right], \quad 0 \le y \le T_0, \quad 0 < \delta < 1 - \lambda_0 i_e, \tag{35}$$

$$T_0 \left(1 - \frac{\beta(\bar{\varepsilon})}{\bar{\varepsilon}} \right) > C > T_0 (1 - \nu), \tag{36}$$

$$D = \sup_{x, T_1 \ge 0} x [F(T_1 + x) - F(T_1 + x/2)] < \infty, \quad L = \sup_{x \ge 0} x [1 - F(x)] < \infty,$$

где T_0 – решение уравнения

$$g(T_0) = \left[2 i_e + 1 + \frac{i_e}{(1 + \bar{\varepsilon})} \right] (1 - F(T_0)) + \frac{D \bar{\varepsilon} i_e}{(1 + \bar{\varepsilon}) \beta(\bar{\varepsilon}) T_0} = \delta; \tag{37}$$

$\beta(\bar{\varepsilon}) = \exp\{-(1 + \alpha(\bar{\varepsilon}))\}$, $\alpha(\bar{\varepsilon}) = \dfrac{1 + (1 + \bar{\varepsilon}) B_0}{\bar{\varepsilon}}$, $\bar{\varepsilon} > 0$. Тогда существует $t_0, \beta(\bar{\varepsilon}) <$

$< t_0 < t(\alpha(\bar{\varepsilon}))$, такое, что $\dfrac{t_0}{\bar{\varepsilon}} + \dfrac{C}{T_0} = 1$, и справедливо неравенство

$$\psi(x) \le \frac{L[\gamma_0 T_0 + i_e C]}{C[1-\delta-\lambda_0 i_e][\gamma_0 T_0 + x]}, \ \gamma_0 = t_0 \frac{1+\bar{\varepsilon}}{\bar{\varepsilon}}. \tag{38}$$

Доказательство. Поскольку имеют место неравенства (36), существует t_0, $\beta(\bar{\varepsilon}) < t_0 < t(\alpha(\bar{\varepsilon}))$, такое, что $\dfrac{t_0}{\bar{\varepsilon}} + \dfrac{C}{T_0} = 1$. Оценим норму оператора A в банаховом пространстве борелевских функций $f(x),\, x \in [0, \infty)$, для которых конечна норма $\| f(x) \| = \sup\limits_{x\in[0,\infty)} (\gamma_0 T_0 + x) | f(x) |$:

$$\| A \| \le \int\limits_{-1}^{B_0} d\rho(b) \sup_{x\in[0,\infty)} (\gamma_0 T_0 + x) \int\limits_0^{(1+b)x+C} \frac{dF(y)}{\gamma_0 T_0 + (1+b)x + C - y}.$$

Далее,

$$\sup_{x\in[0,\infty)} (\gamma_0 T_0 + x) \int\limits_0^{(1+b)x+C} \frac{dF(y)}{\gamma_0 T_0 + (1+b)x + C - y} \le$$

$$\le \sup_{x\in[0,\infty)} (\gamma_0 T_0 + x) \int\limits_0^{T_0} \frac{dF(y)}{\gamma_0 T_0 + (1+b)x + C - y} +$$

$$+ \sup_{\{x,\,(1+b)x+C\ge T_0\}} (\gamma_0 T_0 + x) \int\limits_{T_0}^{(1+b)x+C} \frac{dF(y)}{\gamma_0 T_0 + (1+b)x + C - y}, \ \gamma_0 = t_0 \frac{1+\bar{\varepsilon}}{\bar{\varepsilon}}, \ b > -1.$$

Справедливо неравенство

$$\frac{1}{F(T_0)} \int\limits_0^{T_0} \frac{dF(y)}{\gamma_0 T_0 + (1+b)x + C - y} =$$

$$= \frac{1 - F(0)/F(T_0)}{\gamma_0 T_0 + (1+b)x + C} + \int\limits_0^{T_0} \frac{\left[1 - \dfrac{F(y)}{F(T_0)}\right] dy}{[\gamma_0 T_0 + (1+b)x + C - y]^2} \le \frac{\lambda_0}{T_0} \int\limits_0^{T_0} \frac{dy}{\gamma_0 T_0 + (1+b)x + C - y}.$$

Итак, имеем

$$\sup_{x\in[0,\infty)} (\gamma_0 T_0 + x) \int\limits_0^{T_0} \frac{dF(y)}{\gamma_0 T_0 + (1+b)x + C - y} \le$$

$$\le \sup_{x\in[0,\infty)} \frac{(\gamma_0 T_0 + x)}{F(T_0)} \int\limits_0^{T_0} \frac{dF(y)}{\gamma_0 T_0 + (1+b)x + C - y} \le$$

$$\le \lambda_0 \sup_{x\in[0,\infty)} \frac{(\gamma_0 T_0 + x)}{T_0} \int\limits_0^{T_0} \frac{dy}{\gamma_0 T_0 + (1+b)x + C - y} = \lambda_0 \frac{1}{1+b}.$$

Если положить $\omega = (1+b)x + C - T_0$, то

$$(\gamma_0 T_0 + x) \int\limits_{T_0}^{(1+b)x+C} \frac{dF(y)}{\gamma_0 T_0 + (1+b)x + C - y} =$$

$$= \frac{[T_0 \gamma_0 (1+b) + T_0 - C]}{1+b} \int\limits_{T_0}^{T_0+\omega} \frac{dF(y)}{T_0 \gamma_0 + T_0 + \omega - y} + \frac{\omega}{1+b} \int\limits_{T_0}^{T_0+\omega} \frac{dF(y)}{\gamma_0 T_0 + T_0 + \omega - y}. \tag{39}$$

Оценим первый член (39):

$$\frac{[T_0\gamma_0(1+b)+T_0-C]}{1+b}\int_{T_0}^{T_0+\omega}\frac{dF(y)}{T_0\gamma_0+T_0+\omega-y}\le$$

$$\le\frac{[T_0\gamma_0(1+b)+T_0-C]}{(1+b)\gamma_0 T_0}[F(T_0+\omega)-F(T_0)]\le$$

$$\le[1+\frac{T_0-C}{T_0\gamma_0(1+b)}][1-F(T_0)]\le[1+\frac{1}{(1+\bar{\varepsilon})(1+b)}][1-F(T_0)].$$

Второй член (39) оценивается следующим образом:

$$\frac{\omega}{1+b}\int_{T_0}^{T_0+\omega}\frac{dF(y)}{\gamma_0 T_0+T_0+\omega-y}=\frac{\omega}{1+b}\int_{T_0}^{T_0+\omega/2}\frac{dF(y)}{\gamma_0 T_0+T_0+\omega-y}+$$

$$+\frac{\omega}{1+b}\int_{T_0+\omega/2}^{T_0+\omega}\frac{dF(y)}{\gamma_0 T_0+T_0+\omega-y}\le\frac{\omega}{(1+b)(\gamma_0 T_0+\omega/2)}[F(T_0+\omega/2)-F(T_0)]+$$

$$+\frac{\omega}{(1+b)\gamma_0 T_0}[F(T_0+\omega)-F(T_0+\omega/2)]\le\frac{2(1-F(T_0))}{1+b}+$$

$$+\frac{D}{(1+b)\gamma_0 T_0}\le\frac{2(1-F(T_0))}{1+b}+\frac{D\bar{\varepsilon}}{(1+b)(1+\bar{\varepsilon})\beta(\bar{\varepsilon})T_0}.$$

Наконец, получаем

$$\|A\|\le\lambda_0\int_{-1}^{B_0}\frac{d\rho(b)}{1+b}+g(T_0)=\lambda_0\int_{-1}^{B_0}\frac{d\rho(b)}{1+b}+\delta<1.$$

Оценим

$$\sup_{x\ge 0}(\gamma_0 T_0+x)\int_{-1}^{B_0}d\rho(b)[1-F((1+b)x+C)]\le L\sup_{x\ge 0}(\gamma_0 T_0+x)\int_{-1}^{B_0}\frac{d\rho(b)}{(1+b)x+C}\le$$

$$\le L[\frac{\gamma_0 T_0}{C}+i_e].$$

Теорема 4 доказана.

Функция распределения $F(x)$ сосредоточена на интервале $[0,\infty)$, поскольку таковой является $F_2(x)$. В теореме 4 найдены ограничения для класса случайных величин, описывающих поступление депозитов и доходов банка от операционной деятельности, и класса случайных величин, описывающих выплату банка по его обязательствам. При этих ограничениях возможна оценка (38) вероятности банкротства банка на бесконечном временном интервале ее функционирования, зависящая от величины начального капитала банка. Условие (35) для функции распределения $F(x)$ выделяет упомянутый класс случайных величин. Как и в теореме 3, наиболее важен случай $\lambda_0=1$. Тогда первое неравенство в (35) означает, что инвестирование благоприятно. И если справедливы неравенства (36) для максимальной величины поступления депозитов и дохода от операционной деятельности C, где T_0 — решение уравнения (37), и конечными являются D, L, то справедлива оценка (38), которая обеспечивает при большом начальном капитале малую вероятность банкротства даже при возможных больших выплатах по обязательствам.

Ниже уточняем результаты предыдущих теорем.

Теорема 5. Пусть функция распределения $F_1(y)$ задана формулой

$$F_1(y) = \begin{cases} 1, & y \in [C, \infty), \\ 0, & y \in R^1 \setminus [C, \infty). \end{cases}$$

Предположим, что справедливы неравенства

$$F_2(y) \geq \frac{y}{T_1}, \quad y \in [0, T_1], \quad i_e < 1, \quad x > \frac{L[A_0 + i_e C]}{C[1 - i_e]\delta} - A_0, \quad C < T_1,$$

для некоторого заданного и малого $\delta > 0$, $A_0 = (1 + \bar{\varepsilon})(T_1 - C)$, где $t_1 = \dfrac{(T_1 - C)}{T_1}$ удовлетворяет неравенствам

$$0 < t_1 < \nu, \tag{40}$$

а x – начальный капитал в базисной модели работы банка. Тогда вероятность разорения $\psi(x)$ в базисной модели работы банка на временном интервале $[0, \infty)$ не превышает δ.

Доказательство непосредственно вытекает из теоремы 3.

Дадим экономическую интерпретацию условий этой теоремы. Поступление депозитов и доходов от операционной деятельности в каждом периоде работы банка неслучайно и равно положительной величине C. Неравенство для функции распределения $F_2(x)$ описывает класс случайных величин выплат по обязательствам, для которого вероятность банкротства банка на бесконечном временном интервале можно сделать сколь угодно малой. Инвестирование в активы экономики благоприятно. Неравенство (40) задает ограничение на величину доходности по депозитам. При выполнении этих условий существует начальный капитал, обеспечивающий функционирование банка как угодно долго с достаточно малой вероятностью банкротства, величину которого задает неравенство, фигурирующее в теореме.

В следующей теореме рассмотрен случай, когда Y_n – случайная величина.

Теорема 6. Пусть монотонно возрастающая функция $f(y)$ такова, что

$$0 \leq f(y) \leq 1, \quad y \in [C, C_1], \quad 0 < C < C_1, \quad f(C) = 0, \quad f(C_1) = 1,$$

а функция распределения $F_1(y)$ задана формулой

$$F_1(y) = \begin{cases} 0, & y < C, \\ f(y), & y \in [C, C_1], \\ 1, & y > C_1. \end{cases}$$

Предположим, что справедливы неравенства

$$F_2(y) \geq \frac{y}{T_1}, \quad y \in [0, T_1], \quad i_e < 1, \quad C_1 < T_1, \quad x > \frac{L[A_0 + C i_e]}{C[1 - i_e]\delta} - A_0,$$

для некоторого заданного и малого $\delta > 0$, $A_0 = (1 + \bar{\varepsilon})(T_1 - C)$, а $t_1 = \dfrac{(T_1 - C)}{T_1}$ удовлетворяет неравенствам

$$0 < t_1 < \nu, \tag{41}$$

где x — начальный капитал в базисной модели работы банка. Тогда вероятность разорения $\psi(x)$ в базисной модели работы банка на временном интервале $[0, \infty)$ не превышает δ.

Доказательство. Так как $P(Y_i \geq C) = 1$, то $P(\overline{R}_n \geq R_n) = 1$, где

$$\overline{R}_n = \overline{R}_{n-1}(1 + \varphi_n) + Y_n - Z_n, \quad R_n = R_{n-1}(1 + \varphi_n) + C - Z_n, \quad \overline{R}_0 = R_0 = x.$$

Поэтому
$$\overline{\varphi}_m(x)=E\prod_{i=1}^{m}E\chi_{[0,\infty)}(\overline{R}_i)\ge E\prod_{i=1}^{m}\chi_{[0,\infty)}(R_i)=\varphi_m(x).$$

Или для $\overline{\psi}_m(x)=1-\overline{\varphi}_m(x)$ получаем неравенство
$$\overline{\psi}_m(x)\le\psi_m(x),\ \ m=\overline{1,\infty},$$
где $\psi_m(x)=1-\varphi_m(x)$. Переходя к пределу в последнем неравенстве, получаем $\overline{\psi}(x)\le\psi(x)$.

Вследствие теоремы 5 справедливо неравенство $\psi(x)<\delta$, если капитал x удовлетворяет приведенному выше неравенству. Теорема 6 доказана.

В отличие от теоремы 5 в теореме 6 описание поступления депозитов на счета банка является случайным. Несмотря на это, депозиты не могут опуститься с вероятностью единица ниже некоторой постоянной величины C. В остальном экономическая интерпретация условий теоремы 6 та же, что и в теореме 5.

Следующая теорема является прямым следствием теоремы 4.

Теорема 7. Пусть функция распределения $F_1(y)$ задана формулой
$$F_1(y)=\begin{cases}1, & y\in[C,\infty),\\ 0, & y\in R^1\setminus[C,\infty),\end{cases}$$
а функция распределения $F_2(y)$ такова, что
$$1-\frac{F_2(y)}{F_2(T_0)}\le\lambda_0\left[1-\frac{y}{T_0}\right],\ 0\le y\le T_0. \tag{42}$$

Предположим, что справедливы неравенства
$$\lambda_0 i_e<1,\ 0<\delta<1-\lambda_0 i_e,\ T_0\left(1-\frac{\beta(\overline{\varepsilon})}{\overline{\varepsilon}}\right)>C>T_0(1-\nu), \tag{43}$$
$$D=\sup_{x,T_1\ge0}x[F_2(T_1+x)-F_2(T_1+x/2)]<\infty,\ \ L=\sup_{x\ge0}x[1-F_2(x)]<\infty,$$
где T_0 – решение уравнения
$$g(T_0)=\left[2i_e+1+\frac{i_e}{(1+\overline{\varepsilon})}\right](1-F_2(T_0))+\frac{D\overline{\varepsilon}i_e}{(1+\overline{\varepsilon})\beta(\overline{\varepsilon})T_0}=\delta, \tag{44}$$
$\beta(\overline{\varepsilon})=\exp\{-(1+\alpha(\overline{\varepsilon}))\}$, $\alpha(\overline{\varepsilon})=\dfrac{1+(1+\overline{\varepsilon})B_0}{\overline{\varepsilon}}$, $\overline{\varepsilon}>0$.

Если начальный капитал x в базисной модели работы банка удовлетворяет неравенству
$$x>\frac{L[\gamma_0T_0+Ci_e]}{C[1-\delta-\lambda_0 i_e]\varepsilon_0}-\gamma_0T_0,\ \ \frac{t_0}{\overline{\varepsilon}}+\frac{C}{T_0}=1,\ \gamma_0=\frac{t_0(1+\overline{\varepsilon})}{\overline{\varepsilon}}, \tag{45}$$
где ε_0 достаточно мало, то вероятность разорения $\psi(x)$ в базисной модели работы банка на временном интервале $[0,\infty)$ не превосходит ε_0.

В следующей теореме рассмотрен случай, когда Y_n – случайная величина.

Теорема 8. Пусть выполняются все условия теоремы 7, кроме условия для функции распределения $F_1(y)$. Если функция распределения $F_1(y)$ сосредоточена на интервале $[C,\infty)$, где C удовлетворяет неравенствам (43), а начальный капитал x в базисной модели работы банка удовлетворяет неравенству (45), то вероятность разорения $\psi(x)$ в базисной модели работы банка на временном интервале $[0, \infty)$ не превосходит ε_0.

Доказательство. Так как $P(Y_i \ge C) = 1$, то $P(\overline{R}_n \ge R_n) = 1$, где

$$\overline{R}_n = \overline{R}_{n-1}(1+\varphi_n) + Y_n - Z_n,\ R_n = R_{n-1}(1+\varphi_n) + C - Z_n,\ \overline{R}_0 = R_0 = x .$$

Поэтому

$$\overline{\varphi}_m(x) = E\prod_{i=1}^{m} E\chi_{[0,\infty)}(\overline{R}_i) \ge E\prod_{i=1}^{m}\chi_{[0,\infty)}(R_i) = \varphi_m(x) .$$

Для $\overline{\psi}_m(x) = 1 - \overline{\varphi}_m(x)$ получаем неравенство $\overline{\psi}_m(x) \le \psi_m(x),\ m = \overline{1, \infty}$, где $\psi_m(x) = 1 - \varphi_m(x)$. Переходя к пределу в последнем неравенстве, получаем $\overline{\psi}(x) \le \psi(x)$.

Согласно теореме 7 справедливо неравенство $\psi(x) < \varepsilon_0$, если капитал x удовлетворяет неравенству (45). Теорема 8 доказана.

Приложение. Выберем в качестве функции распределения выплат по обязательствам функцию $F_2(x) = \frac{x}{1+x}$, $0 \le x < \infty$. Определим значение наименьшей величины депозитов и доходов от операционной деятельности C, при которых банк способен функционировать, выполняя все выплаты по обязательствам. Выберем $\delta < 1 - i_e$. Для выбранной функции распределения $F_2(x)$ имеем $D = L = 1$. Условие (42) выполняется для $\lambda_0 = 1$ при произвольном $T_0 > 0$. Согласно условию теоремы 8 имеем $i_e < 1$. Для рассматриваемой функции распределения $\| A \| \le i_e + g(T_0) < i_e + g_1(T_0)$, где

$$g(T_0) = \left[2i_e + 1 + \frac{i_e}{(1+\overline{\varepsilon})}\right]\frac{1}{(1+T_0)} + \frac{\overline{\varepsilon} i_e}{(1+\overline{\varepsilon})\beta(\overline{\varepsilon})T_0},$$

$$g_1(T_0) = \left[2i_e + 1 + \frac{i_e}{(1+\overline{\varepsilon})}\right]\frac{1}{T_0} + \frac{\overline{\varepsilon} i_e}{(1+\overline{\varepsilon})\beta(\overline{\varepsilon})T_0} .$$

Рассмотрим уравнение

$$g_1(T_0) = \left[2i_e + 1 + \frac{i_e}{(1+\overline{\varepsilon})}\right]\frac{1}{T_0} + \frac{\overline{\varepsilon} i_e}{(1+\overline{\varepsilon})\beta(\overline{\varepsilon})T_0} = \delta ,$$

где $\beta(\overline{\varepsilon}) = \exp\left\{-\left(1 + \frac{1+(1+\overline{\varepsilon})B_0}{\overline{\varepsilon}}\right)\right\}$. Решение этого уравнения:

$$T_0 = \frac{2i_e + 1 + \frac{i_e}{(1+\overline{\varepsilon})} + \frac{\overline{\varepsilon} i_e}{(1+\overline{\varepsilon})\beta(\overline{\varepsilon})}}{\delta} . \tag{46}$$

Если C удовлетворяет неравенствам $T_0(1 - \frac{\beta(\overline{\varepsilon})}{\overline{\varepsilon}}) > C > T_0(1 - \upsilon)$, а случайная величина, описывающая поступления депозитов и доходов от операционной деятельности, имеет функцию распределения, сосредоточенную на $[C, \infty)$, то банк способен выполнять выплаты по любым обязательствам. Величина C зависит от величины риска инвестирования $i_e < 1$: чем меньший риск инвестирования $i_e < 1$, тем меньше величина C. Однако величина C опуститься до нуля не может.

Замечание. Если $\lambda_0 = 1$, то необходимо выполнение неравенства $i_e < 1$. Неравенство $\lambda_0 < 1$ означает, что

$$F_2(y) \ge [1 - \lambda_0[1 - \frac{y}{T}]]F_2(T_0) .$$

Отсюда следует неравенство $F_2(0) \geq (1-\lambda_0)F_2(T_0)$. Последнее означает, что существует ненулевая вероятность неуплаты по обязательствам в базисной модели работы банка. Таким образом, если $i_e > 1$, то существует ненулевая вероятность прекратить выплаты по обязательствам.

Наконец, рассмотрим случай, когда функции распределения $F_1(y)$ и $F_2(y)$ произвольны. Следующая теорема обобщает результаты работ [40–43].

Теорема 9. Предположим, что функции распределения $\rho(x)$, $F_1(x)$, $F_2(x)$ сосредоточены на интервалах $[-1, B_0]$, $[0, C]$, $[0, T_1]$ соответственно и таковы, что

$$L = \sup_{T \geq x \geq 0} x[1-F(x)],\ i_e < \infty,\ A_0 > T = T_1 + C.$$

Тогда вероятность банкротства $\psi_m(x)$ на временном интервале $[0, m]$ в базисной модели работы банка задается формулой (24) и удовлетворяет неравенству $\psi_m(x) \leq \varepsilon_0$, если x удовлетворяет неравенству

$$x > L\frac{(r^m-1)(A_0+Ci_e)}{C(r-1)\varepsilon_0} - A_0,\ r = \int_{-1}^{(C-T)/A_0} \frac{d\rho(b)}{1+b} + \left[1-\rho\left(\frac{C-T}{A_0}\right)\right]\frac{A_0}{A_0+C-T}. \quad (47)$$

Доказательство. Рассмотрим банахово пространство борелевских функций $f(x)$, для которых конечна норма $\| f(x) \| = \sup_{x\in[0,\infty)} (A_0+x)|f(x)|$, где $A_0 > T$. Тогда

$$\| A \| \leq \int_{-1}^{B_0} d\rho(b) \sup_{x\in[0,\infty)} (A_0+x) \int_0^T \frac{dF(y)}{A_0+(1+b)x+C-y} \leq$$

$$\leq \int_{-1}^{B_0} d\rho(b) \sup_{x\in[0,\infty)} \frac{(A_0+x)}{A_0+(1+b)x+C-T} =$$

$$= \int_{-1}^{(C-T)/A_0} d\ \rho(b) \sup_{x\in[0,\infty)} \frac{(A_0+x)}{A_0+(1+b)x+C-T} + \int_{(C-T)/A_0}^{B_0} d\ \rho(b) \sup_{x\in[0,\infty)} \frac{(A_0+x)}{A_0+(1+b)x+C-T} \leq$$

$$\leq \int_{-1}^{(C-T)/A_0} \frac{d\rho(b)}{1+b} + \left[1-\rho\left(\frac{C-T}{A_0}\right)\right]\frac{A_0}{A_0+C-T}.$$

Далее,

$$\| \varphi_0(x) \| = \sup_{x\geq 0} (A_0+x) \int_{-1}^{B_0} d\rho(b)[1-F((1+b)x+C)] \leq L\left(\frac{A_0}{C}+i_e\right).$$

Отсюда для $\psi_m(x)$ получаем оценку

$$\psi_m(x) \leq \frac{L(A_0+Ci_e)}{C(A_0+x)} \sum_{i=0}^{m-1} r^i = \frac{L(A_0+Ci_e)}{C(A_0+x)} \frac{(r^m-1)}{(r-1)}.$$

Из последнего неравенства следует, что $\psi_m(x) \leq \varepsilon_0$, если x удовлетворяет неравенству (47). Теорема 9 доказана.

В теореме 9 нет никаких ограничений для функций распределения поступления депозитов и выплат по обязательствам. Последний факт и произвольное поведение в инвестировании не означает, что в этом случае банк может функционировать бесконечно долго без банкротства. Однако его функционирование можно обеспечить и в этом случае с достаточно малой вероятностью банкротства на конечном временном интервале, если его начальный капитал удовлетворяет неравенствам (47). Естественно, с возрастанием числа периодов величина начального капитала увеличивается.

ПРИМЕНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ К ОЦЕНКЕ ВЕРОЯТНОСТИ БАНКРОТСТВА БАНКА

Дадим описание стратегии инвестирования банком в активы экономики, т.е. построим последовательность случайных величин φ_n^0, $n=\overline{1,\infty}$. Пусть эволюция d активов $S_n=\{S_n^i\}_{i=1}^d$, $n=\overline{0,\infty}$, в которые банк будет инвестировать в каждом периоде своей работы, задана законами

$$S_n^i=(1+\rho_n^i)S_{n-1}^i,\ \ i=\overline{1,d},\ \ n=\overline{1,\infty}.$$

Полагаем, что в каждом периоде работы банк может покупать и продавать эти активы в нужном ему количестве. Пусть, например, S_n^1, $n=\overline{0,\infty}$, описывает эволюцию безрискового актива. Эволюция доходов $\rho_n=\{\rho_n^i\}_{i=1}^d$ на инвестированный капитал в n-м периоде $[n-1,n]$ задана эволюцией d случайных величин ρ_n^i, $i=\overline{1,d}$, $n=\overline{1,\infty}$, на вероятностном пространстве $\{\Omega, F, P\}$, принимающими значения во множестве $(-1,\infty)$ и являющимися при каждом фиксированном i последовательностью независимых одинаково распределенных случайных величин. Под стратегией инвестирования банка понимаем строго определенные части капитала в каждый период его функционирования для выплаты дивидендов акционерам, поддержание текущей ликвидности работы банка, капитализацию, инвестирование как в рисковые, так и безрисковые активы и т.п.

Стратегия инвестирования в n-м периоде $[n-1,n]$ функционирования банка определяется выбором не зависящих от периода d активов для инвестирования и определения зависящей от n-го периода части капитала $\gamma_i^{n-1}\ge 0$, $i=\overline{1,d}$, который следует инвестировать в i-й актив. При этом должно выполняться условие $\sum_{i=1}^d \gamma_i^{n-1}=1$. Если капитал банка в начале n-го периода $[n-1,n]$ составляет R_{n-1}^0, то в соответствии со стратегией инвестирования банк инвестирует его в портфель $\delta_{n-1}=\{\delta_{n-1}^i\}_{i=1}^d$, определяемый условиями

$$S_{n-1}^i\delta_{n-1}^i=\gamma_i^{n-1}R_{n-1}^0,\ \ i=\overline{1,d}.$$

Во временном интервале работы $[n-1,n]$ банк, привлекая депозиты и выполняя операционную деятельность, заработает капитал, который описываем случайной величиной Y_n^0, а выплату по обязательствам — случайной величиной Z_n^0. В конце n-го периода капитал, инвестированный в портфель $\delta_{n-1}=\{\delta_{n-1}^i\}_{i=1}^d$, примет вид

$$\widetilde{R}_n^0=\sum_{i=1}^d S_n^i\delta_{n-1}^i=R_{n-1}^0\left(1+\sum_{i=1}^d \gamma_i^{n-1}\rho_n^i\right).$$

Таким образом, в конце n-го периода капитал банка составит

$$R_n^0=R_{n-1}^0\left(1+\sum_{i=1}^d \gamma_i^{n-1}\rho_n^i\right)+Y_n^0-Z_n^0,\ \ n=\overline{1,\infty}.$$

Предположим, что существуют не зависящие от периода числа $\gamma_i\ge 0$, $i=\overline{1,d}$, такие, что

$$P\left(\sum_{i=1}^d \gamma_i^{n-1}\rho_n^i\ge\sum_{i=1}^d \gamma_i\rho_n^i\right)=1,\ \ n=\overline{1,\infty},\ \ \sum_{i=1}^d \gamma_i=1, \tag{48}$$

и, кроме того, существует $0< B_0 < \infty$ такое, что выполняется условие $P\left(B_0 \ge \sum_{i=1}^{d} \gamma_i \rho_n^i \ge -1 \right) = 1$. Введем в рассмотрение функцию распределения $\rho(x) = P\left(\sum_{i=1}^{d} \gamma_i \rho_n^i \le x \right)$ и будем полагать, что выполняется условие $i_e < 1$. Обозначим $\varphi_n^0 = \sum_{i=1}^{d} \gamma_i^{n-1} \rho_n^i$, $\varphi_n = \sum_{i=1}^{d} \gamma_i \rho_n^i$. Тогда в соответствии с (48) с вероятностью единица выполняются неравенства $\varphi_n^0 \ge \varphi_n$, $n = \overline{1, \infty}$. Рассмотрим теперь три последовательности случайных величин: $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\{Y_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{Z_j\}_{j=1}^{\infty}$, полагая, что они независимы между собой в совокупности и каждая из них является последовательностью независимых одинаково распределенных случайных величин таких, что $P(\varphi_i > -1) = 1$, $P(Y_k \ge 0) = 1$, $P(Z_j \ge 0) = 1$. Каждая случайная величина задается своей функцией распределения. Поэтому базисная модель работы банка будет задана, если будут заданы функции распределения $\rho(x)$, $F_1(x)$, $F_2(x)$ так, чтобы $\rho(x)$ была сосредоточена на интервале $[-1, B_0]$ и удовлетворяла условию благоприятного инвестирования $i_e < 1$, а функции $F_1(x)$, $F_2(x)$ следует выбрать так, чтобы они удовлетворяли условиям теоремы 6 или 8.

По этим последовательностям случайных величин построим последовательность капиталов базисной модели работы банка R_n по закону

$$R_n = R_{n-1}(1+\varphi_n) + Y_n - Z_n,\ n = 1,2,\ \ldots,\ R_0 = x,\ x > 0.$$

Далее изложим, каким образом можно построить последовательности случайных величин $\{\varphi_n^0\}_{i=1}^{\infty}$, $\{Y_k^0\}_{k=1}^{\infty}$, $\{Z_j^0\}_{j=1}^{\infty}$. Положим $\varphi_n^0 = \sum_{i=1}^{d} \gamma_i^{n-1} \rho_n^i$, а случайные величины

$$Y_n^0 = f_n(\varphi_1, Y_1, Z_1, \ldots, \varphi_n, Y_n, Z_n, \omega) Y_n,\ n = \overline{1, \infty}, \tag{49}$$

$$Z_n^0 = g_n(\varphi_1, Y_1, Z_1, \ldots, \varphi_n, Y_n, Z_n, \omega) Z_n,\ n = \overline{1, \infty}, \tag{50}$$

выберем такими, чтобы неравенства

$$f_n(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n, \omega) \ge 1,$$
$$g_n(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n, \omega) \le 1,\ n = \overline{1, \infty},$$

были справедливы с вероятностью единица, где случайные поля $f_n(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n, \omega)$, $g_n(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n, \omega)$, $n = \overline{1, \infty}$, являются измеримыми функциями относительно σ-алгебры $[B((-1, B_0]) \times B(R_+^1) \times B(R_+^1)]^n \times F$, $B((-1, B_0])$ — борелевская σ-алгебра подмножеств из $(-1, B_0]$, а $B(R_+^1)$ — борелевская σ-алгебра подмножеств из R_+^1. При таком выборе случайных величин $\{\varphi_n^0\}_{i=1}^{\infty}$, $\{Y_k^0\}_{k=1}^{\infty}$, $\{Z_j^0\}_{j=1}^{\infty}$ для эволюции капитала банка R_n^0, заданного формулой (6), удовлетворяются условия теоремы 1, т.е. $P(\varphi_n^0 \ge \varphi_n) = 1$, $P(Y_n^0 - Z_n^0 \ge Y_n - Z_n) = 1$. Пусть далее функции распределений $F_1(x) = P(Y_1 \le x)$, $F_2(x) = P(Z_1 \le x)$ удовлетворяют условиям теоремы 6 или условиям теоремы 8. Обозначим $\rho_n^0(x) = P(\varphi_n^0 \le x)$. Из неравенства $\varphi_n^0 \ge \varphi_n$ следуют неравенства $\rho_n^0(x) \le \rho(x)$, $n = \overline{1, \infty}$.

Укажем, каким образом можно связать полученные результаты с реальными характеристиками работы банка. Введенная нами базисная модель работы банка может служить системой отсчета, которую принимает тот или иной банк. В реальности имеем в каждый определенный период времени, например один год, ежедневные результаты доходности от инвестиционной деятельности, получение депозитов на счета банка и доход от его операционной деятельности, а также выполнение обязательств по выплатам. Выбор базисной модели означает, что мы выбираем функции распределения доходности $\rho(x)$, а также функции распределения $F_1(x)$ и $F_2(x)$, удовлетворяющие теореме 6 или 8, а в каждом периоде необходимым условием выполнения неравенств $\varphi_n^0 \geq \varphi_n$, $Y_n^0 \geq Y_n$, $Z_n^0 \leq Z_n$ для функций распределения

$$\rho_n^0(x) = P(\varphi_n^0 \leq x), \; P(Y_n^0 \leq x) = F_n^{0,1}(x), \; P(Z_n^0 \leq x) = F_n^{0,2}(x)$$

является выполнение неравенств

$$\rho_n^0(x) \leq \rho(x), \; F_n^{0,1}(x) \leq F_1(x), \; F_n^{0,2}(x) \geq F_2(x), \quad n = \overline{1, \infty}. \tag{51}$$

Пусть, например, функции распределения $\rho(x)$, $F_1(x)$, $F_2(x)$ удовлетворяют условиям теоремы 6. Для частотной проверки выполнения неравенств (51) будем предполагать дополнительно, что справедливы следующие предположения для $\rho_n^0(x)$, $\rho(x)$, $F_n^{0,1}(x)$, $F_1(x)$ и $F_n^{0,2}(x)$, $F_2(x)$: существуют плотности распределений на интервалах $[-1, B_0]$, $[C, C_1]$ и $[0, T_1]$ соответственно такие, что выполняются неравенства

$$[\rho_n^0(x)]' \geq [\rho(x)]', \; x \in [-1, B_0], \; \rho_n^0(-1) < \rho(-1), \; \rho_n^0(x) = \rho(x), \; x \in R^1 \setminus [-1, B_0],$$

$$[F_n^{0,1}(x)]' \geq [F_1(x)]', \; x \in [C, C_1], \; F_n^{0,1}(C) < F_1(C), \; F_n^{0,1}(x) = F_1(x),$$
$$x \in R^1 \setminus [C, C_1],$$

$$[F_n^{0,2}(x)]' \leq [F_2(x)]', \; x \in [0, T_1], \; F_n^{0,2}(0) > F_2(0), \; F_n^{0,2}(x) = F_2(x),$$

$$x \in R^1 \setminus [0, T_1].$$

В этом случае проверка выполнения первого неравенства (51) сводится к проверке выполнения того, что частота попадания доходности от инвестирования в n-м периоде его деятельности в каждый интервал $[x_1, x_2] \subset [-1, B_0]$ должна быть не меньше наибольшего значения $[\rho(x)]'$ в интервале $[x_1, x_2] \subset [-1, B_0]$. Проверка выполнения второго неравенства сводится к следующей проверке: частота попадания в каждый интервал $[x_1, x_2] \subset [C, C_1]$ получения депозитов и доходов от операционной деятельности банка в n-м периоде его деятельности должна быть не меньше наибольшего значения $[F_1(x)]'$ в интервале $[x_1, x_2] \subset [C, C_1]$. Проверка выполнения третьего неравенства (51) сводится к проверке выполнения того, что частота попадания в каждый интервал $[x_1, x_2] \subset [0, T_1]$ выплат по обязательствам банка в n-м периоде его деятельности должна быть меньше наименьшего значения $[F_2(x)]'$ в интервале $[x_1, x_2] \subset [0, T_1]$. При этом величину интервала $[x_1, x_2]$ во всех случаях следует выбирать небольшой. Для проверки гипотез о функциях распределения в каждом периоде работы банка можно привлечь и более сложные статистические критерии проверки гипотез.

Рассмотрим следующую простейшую базисную модель работы банка, для которой затем проведем численные расчеты с целью иллюстрации результатов. Будем полагать, что эволюция безрискового актива задана законом

$$S_n^1 = (1+\rho_n^1)S_{n-1}^1, \ \ n = \overline{1, \infty}, \tag{52}$$

где $\rho_n^1 = 0$, $n = \overline{1, \infty}$, с вероятностью единица, т.е, $S_n^1 = 1$, $n = \overline{1, \infty}$. Чтобы описать ситуацию, когда часть капитала в каждый период работы используется банком для выплаты дивидендов держателям акций или банк использует какую-то часть капитала для капитализации, инвестируем в актив, эволюция которого задана законом

$$S_n^2 = (1+\rho_n^2)S_{n-1}^2, \ \ n = \overline{1, \infty}, \tag{53}$$

где $\rho_n^2 = -1$, $n = \overline{1, \infty}$, с вероятностью единица. Наконец, кредитную политику банка рассматриваем как инвестирование в рисковые активы, эволюция которых описывается агрегированно законом

$$S_n^3 = (1+\rho_n^3)S_{n-1}^3, \ \ n = \overline{1, \infty}, \tag{54}$$

где ρ_n^3, $n = \overline{1, \infty}$, — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, принимающих конечное число значений $\upsilon_1, \ldots, \upsilon_M$ с вероятностями $p_1, \ldots, p_M$ соответственно; кроме того, $\sum_{i=1}^{M} p_i = 1$. Полагаем, что $-1 < \upsilon_1 < 0$, $\upsilon_1 < \upsilon_2 < \ldots < \upsilon_M$, $\upsilon_M > 0$.

Инвестиционную стратегию банка описываем следующим образом: в начале каждого периода работы банка часть капитала $\gamma_1 > 0$ он инвестирует в безрисковый актив; часть капитала $\gamma_2 > 0$ он использует для выплаты дивидендов или, например, для капитализации; часть капитала $\gamma_3 > 0$ он использует для кредитования. Части γ_i не зависят от периода работы банка. В этом случае случайная величина $\varphi_n^3 = \sum_{i=1}^{3} \gamma_i \rho_n^i$ принимает значения $b_i = (-\gamma_2 + \gamma_3 \upsilon_i) > -1$, $i = \overline{1, M}$. Пусть в нулевой момент времени начальный капитал банка составляет x. Эволюция капитала банка происходит в дискретные моменты времени $n = 1, 2, \ldots$ следующим образом: имея капитал x в нулевой момент времени, банк инвестирует этот капитал в некоторые активы в следующий период своей операционной деятельности. Положим

$$P(\varphi_k = b_i) = p_i, \ k = \overline{1, \infty}, \ \sum_{i=1}^{M} p_i = 1, \ \ p_i \geq 0, \ \ i = \overline{1, M}.$$

Считаем, что $0 \geq b_1 > -1$, $b_i \geq b_{i-1}$, $i = \overline{2, M}$.

Проиллюстрируем доказанные теоремы расчетом величины начального капитала x, при котором вероятность банкротства банка мала. Пусть, как и выше, банк инвестирует в безрисковый актив, эволюция которого задана формулой (52). Он выплачивает дивиденды в соответствии с эволюцией доходности, заданной (53), и, наконец, эволюцию доходности рискового актива, стоимость которого эволюционирует в соответствии с формулой (52), зададим следующим образом:

$$\rho_n^3 = \begin{cases} 0{,}4, \ \ p = 0{,}6, \\ -0{,}1, \ 1 - p = 0{,}4, \end{cases} \quad n = \overline{1, \infty},$$

где p — вероятность дохода от кредитования экономики, $1 - p$ — вероятность потери части капитала в результате кредитования. Положим, что часть дохода, равную $\gamma_1 = 0{,}01$, он оставляет для обеспечения текущей ликвидности работы банка, часть дохода $\gamma_2 = 0{,}03$ направляет на выплату дивидендов и, наконец, часть дохода, равную $\gamma_3 = 0{,}96$, банк направляет на кредитование экономики. В результате вычисления случайной доходности φ_n^3 от такой инвестиции в каждом периоде получим

$$\varphi_n^3 = \begin{cases} 0{,}354, & p = 0{,}6, \\ -0{,}126, & 1 - p = 0{,}4, \end{cases} \quad n = \overline{1, \infty}.$$

Рассматриваемое инвестирование является благоприятным, поскольку

$$\frac{0{,}6}{1{,}354} + \frac{0{,}4}{0{,}874} = 0{,}9007963 < 1.$$

Применим теорему 6 для вычисления величины начального капитала x, при котором он с достаточно малой вероятностью банкротства функционирует достаточно долго. Чтобы получить ограничения для максимальных выплат, следует найти числа $\bar{\varepsilon}$ и ν. Число $\bar{\varepsilon}$, доставляющее максимум выражению (28), равно 1,9, а число ν = 0,091955. Если положить

$$(T_1 - C) / T_1 = 0{,}09,$$

то удовлетворим условие (41) теоремы 6. Вычислим начальный капитал банка x, при котором банк в течение бесконечного времени способен функционировать с вероятностью банкротства, не превышающей $\delta = 0{,}01$. Поскольку в этом простейшем случае оценка для начального капитала, фигурирующая в теореме 6, преобразуется в более точную оценку

$$x > \frac{(1 + b_1) A_0 + T_1 - C}{(1 + b_1) \left[1 - \sum_{i=1}^{2} \frac{p_i}{1 + b_i} \right] \delta} - A_0 ,$$

то будем иметь

$$x > \left(\frac{2 \cdot 0{,}874 + 1}{0{,}874 \cdot 0{,}0992027 \cdot 0{,}01} - 2 \right) (T_1 - C) \approx 3167 (T_1 - C) \approx 285 T_1.$$

Из последнего неравенства следует, что величина начального капитала, при котором вероятность банкротства не превышает $0{,}01$, зависит от величины максимальных выплат T_1.

Рассчитаем теперь значение минимальной величины поступления депозитов и доходов от операционной деятельности банка C, при которых выплаты банка могут быть сколь угодно большими. На основании формулы (46) для рассматриваемой модели при $i_e = 0.9007963$, $\delta = 0.01$, $\bar{\varepsilon} = 1.9$ получим $T_0 = 318.69$, а C удовлетворяет неравенству $C > 289.39$. Итак, если величина поступающих депозитов и доходов от операционной деятельности превышает величину 289.39, а начальный капитал банка x превышает величину 1248.3, то выплаты банка могут быть достаточно большими с вероятностью банкротства, не превышающей 0.01.

Следующие теоремы дают оценку вероятности банкротства банка, если его работа определяется некоторой базисной моделью.

Теорема 10. Предположим, что на вероятностном пространстве $\{\Omega, F, P\}$ последовательности случайных величин $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\{Y_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{Z_j\}_{j=1}^{\infty}$ в совокупности независимы и каждая из них является последовательностью независимых одинаково распределенных случайных величин с функциями распределения $\rho(x)$, $F_1(x)$, $F_2(x)$ соответственно, которые удовлетворяют условиям теоремы 6. Если эволюция капитала банка R_n^0 задана формулой (6), где $\{\varphi_i^0\}_{i=1}^{\infty}$, $\{Y_k^0\}_{k=1}^{\infty}$, $\{Z_j^0\}_{j=1}^{\infty}$ определены формулами (7) и удовлетворяют условиям теоремы 1, то для начального капитала x, удовлетворяющего неравенству

$$x > \frac{L[A_0 + Ci_e]}{C[1 - i_e]\delta} - A_0, \ \ A_0 = (1 + \bar{\varepsilon})(T_1 - C),$$

вероятность банкротства банка $\psi_0(x)$ удовлетворяет неравенству $\psi_0(x) \le \delta$.

Предположим, что на вероятностном пространстве $\{\Omega, F, P\}$ последовательности случайных величин $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}, \{Y_k\}_{k=1}^{\infty}, \{Z_j\}_{j=1}^{\infty}$ в совокупности независимы и каждая из них является последовательностью независимых одинаково распределенных случайных величин с функциями распределения $\rho(x)$, $F_1(x)$, $F_2(x)$ соответственно, которые удовлетворяют условиям теоремы 8. Если эволюция капитала банка R_n^0 задана формулой (6), где $\{\varphi_\iota^0\}_{i=1}^{\infty}, \{Y_k^0\}_{k=1}^{\infty}, \{Z_j^0\}_{j=1}^{\infty}$ определены формулами (7) и удовлетворяют условиям теоремы 1, то для начального капитала x, удовлетворяющего неравенству

$$x > \frac{L[\gamma_0 T_0 + Ci_e]}{C[1 - \delta - \lambda_0 i_e]\varepsilon_0} - \gamma_0 T_0, \ \ \frac{t_0}{\bar{\varepsilon}} + \frac{C}{T_0} = 1, \ \ \gamma_0 = \frac{t_0(1 + \bar{\varepsilon})}{\bar{\varepsilon}},$$

вероятность банкротства банка $\psi_0(x)$ на временном интервале $[0, \infty)$ удовлетворяет неравенству $\psi_0(x) \le \varepsilon_0$, где ε_0 достаточно мало.

Теорема 11. Предположим, что на вероятностном пространстве $\{\Omega, F, P\}$ последовательности случайных величин $\{\varphi_\iota\}_{i=1}^{\infty}, \{Y_k\}_{k=1}^{\infty}, \{Z_j\}_{j=1}^{\infty}$ в совокупности независимы и каждая из них является последовательностью независимых одинаково распределенных случайных величин с функциями распределения $\rho(x)$, $F_1(x)$, $F_2(x)$ соответственно, которые удовлетворяют условиям теоремы 9. Если эволюция капитала банка R_n^0 задана формулой (6), где $\{\varphi_\iota^0\}_{i=1}^{\infty}, \{Y_k^0\}_{k=1}^{\infty}, \{Z_j^0\}_{j=1}^{\infty}$ определены формулами (7) и удовлетворяют условиям теоремы 1, то вероятность банкротства банка $\psi_m^0(x)$ на временном интервале $[0, m]$ удовлетворяет неравенству $\psi_m^0(x) \le \varepsilon_0$ при условии, что начальный капитал банка x удовлетворяет неравенству

$$x > L\frac{(r^m - 1)(A_0 + i_e C)}{C(r - 1)\varepsilon_0} - A_0, \ \ r = \int_{-1}^{(C-T)/A_0} \frac{d\rho(b)}{1 + b} + \left[1 - \rho\left(\frac{C - T}{A_0}\right)\right]\frac{A_0}{A_0 + C - T}.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для успешной и длительной работы банка необходимы ограничения для инвестирования в активы экономики, надлежащая политика привлечения депозитов на счета банка, определенные требования к величине стартового капитала, соответствующая политика выплат по обязательствам. Все эти составляющие успешной работы банка в реальных условиях регулируются по-разному. Известные базельские рекомендации по обеспечению ликвидной работы банков не гарантируют от банкротства [45–48]. В настоящей статье введена базисная модель работы банка, которая должна служить базисной системой отсчета и с которой должны сравниваться реальные динамические характеристики банка. В доказанных теоремах установлены условия, гарантирующие достаточно длительную работу банка с достаточно малой вероятностью банкротства, и эти условия сводятся к ограничениям на такие вероятностные характеристики, как функция распределения величины депозитов на счетах банка, функция распределения величины выплат по обязательствам. Найдены ограничения на разность между максимальной величиной выплат по обязательствам и минимальной величиной депозитов, а также на величину стартового капитала банка. Все эти ограничения следуют из доказанных теорем. Итак, чтобы обеспечить стабильную работу банка в течение достаточно длительного интервала времени, необходимо задать базисную модель работы банка, определяющую, в свою очередь, динамику инвестиционной стратегии, имея ограниченную информацию об инвестиционной среде [44]. Кроме того, инвестирование как в рисковые, так и безрисковые активы должно быть благоприятным. В каждый период эволюции динамика привлечения депозитов, описываемая последовательностью случайных величин, должна быть ограничена снизу строго положительной константой (см. теоремы 6, 8). В соответствии с теоремой 10 при начальном капитале, определенном в этой теореме, банк может функционировать произвольно долго с достаточно малой вероятностью банкротства, если динамика стратегии инвестирования, привлечение депозитов на счета банка, выплаты по обязательствам банка удовлетворяют условиям этой теоремы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Asmussen S., Perry D. On cycle maxima, first passage problems and extreme value theory for queues // Stochastic Models. — 1992. — **8.** — P. 421–458.
2. Dickson D.C.M., Gray J.R. Exact solutions for ruin probability in the presence of an upper absorbing barrier // Scand. Act. J. — 1984. — P. 174–186.
3. Dickson D.C.M., Gray J.R. Approximations to the ruin probability in the presence of an upper absorbing barrier // Scand. Act. J. — 1984. — P. 105–115.
4. Gerber H.U. Martingales in risk theory // Mitt. Ver. Schweiz. Vers. Math. — 1973. — **73.** — P. 205–216.
5. Gerber H.U. An Introduction to mathematical risk theory. — University of Pennsylvania: S.S. Huebner Foundation Monographs, 1979. — 164 p.
6. Dassios A., Embrechts P. Martingales and insurance risk // Stoch. Models. — 1989. — **5.** — P. 181–217.
7. Grandell J. Aspects of risk theory. — Berlin: Springer-Verlag, 1990. — 185 p.
8. Grandell J. Finite time ruin probabilities and martingales // Informatica. — 1992. — **2.** — P. 3–32.
9. Schmidli H. Martingales and insurance risk // Lecture Notes of the 8th Summer School on Probability and Mathematical Statistics (Varna). — Singapore: Science Culture Technology Publishing, 1996. — P. 155–188.
10. Schmidli H. On the Gerber-Shiu function and change of measure // Insurance: Mathematics and Economics. — 2010. — **46.** — P. 3–11.
11. Kesten H. Renewal theory for functionals of a Markov chain with general state space // Ann. Probab. — 1974.— **2.** — P. 355–386.
12. Goldie C.M. Implicit renewal theory and tails of solutions of random equations // Ann. Probab. — 1991. — **1.** — P. 126–166.
13. Nyrhinen H. On the ruin probabilities in a general economic environment // Stoch. Proc. Appl. — 1991. — **83.** — P. 319–330.
14. Nyrhinen H. Finite and infinite time ruin probabilities in a stochastic economic environment // Stoch. Proc. Appl. — 2001. — **92.** — P. 265–285.
15. Cai J. Ruin probability with dependent rates of interest // J. Appl. Probab. — 2002. — **39.** — P. 312–323.
16. Cai J., Dickson D.C.M. On the expected discounted penalty function at ruin of a surplus process with interest // Insurance: Mathematics and Economics. — 2002. — **30.** — P. 389–404.
17. Lundberg F. Approximerad framstilling av sannolikhetsfunktionen II. Aterforsakring av kollektivrisker, Almquist & Wiksell, Uppsala, 1903.
18. Lundberg F. Some supplementary researches on the collective risk theory // Skandinavisk Aktuarietidskrift. — 1932. — **15.** — P. 137–158.
19. Cramer H. Collective risk theory. The Jubilee Volume of Forsakringsbolaget Scandia. — Stockholm, 1955.
20. Segerdahl C.O. Uber einige risikotheoretische fragestellungen // Skandinavisk Aktuartidsskrift. — 1942. — **25.** — P. 43–83.
21. Gerber H.U. Der einfluss von zins auf die ruinwahrscheinlichkeit // Mitteilungen der Schweizerischer Vereinigung der Versicherungsmatematiker, 1971. — P. 63–70.
22. Harrison J.M. Ruin problems with compounding assets // Stochastic Processes and their Applications. 1977. — **5.** — P. 67—79.

23. Delbaen F., Haezendonck J. Classical risk theory in an economic environment // Insurance, Mathematics and Economics. — 1987. — **6.** — P. 85–116.

24. Asmussen S. Ruin probabilities. — Singapore: World Scientific, 2000. — 601 p.

25. Rolski T., Schmidli H., Schmidt V. and Teugels J.L. Stochastic processes for insurance and finance. — Chichester: Wiley, 1999. — 661 p.

26. Paulsen J. Ruin models with investment income // Probab. Surv. —2008. — **5.** — P. 416–434.

27. Леоненко М.М., Мішура Ю.С., Пархоменко Я.М., Ядренко М.Й. Теоретико-ймовірносні та статистичні методи в економетриці та фінансовій математиці. — К.: Інформтехніка, 1995. — 380 с.

28. Гусак Д.В. Процеси з незалежними приростами в теорії ризику. — Київ: Ін-т математики, 2011. — 544 с.

29. Гончар М.С. Фондовий ринок і економічний ріст. — Київ: Обереги, 2001. — 826 с.

30. Гончар Н.С. Финансовая математика, экономический рост. — Киев: Рада, 2000. — 640 с.

31. Наконечный А.Н. Оценка Монте-Карло для вероятности разорения в сложной пуассоновской модели теории риска // Кибернетика и системный анализ. — 1995. — № 6. — С. 160–162.

32. Норкин Б.В. Необходимые и достаточные условия существования и единственности решений интегральных уравнений страховой математики // Кибернетика и системный анализ. — 2006. — № 5. — С. 157–164.

33. Норкин Б.В. О решении основного интегрального уравнения актуарной математики методом последовательных приближений // Украинский математический журнал. — 2007. — **59**, № 12. — С. 112–127.

34. Норкин Б.В. Стохастический метод последовательных приближений для оценки риска неплатежеспособности страховой компании // Кибернетика и системный анализ. — 2008. — № 6. — С. 116–130.

35. Бондарев Б.В., Рагулина Е.Ю. О вероятности неразорения страховой компании на конечном интервале времени при инвестировании капитала на финансовом (B,S)-рынке // Кибернетика и системный анализ. — 2012. — № 5. — С. 112–125.

36. Бондарев Б.В., Сосницкий О.Е. Некоторые задачи для модели Кларка. I. Оценка вероятности неразорения страховой компании // Кибернетика и системный анализ. — 2013. — № 2. — С. 139–149.

37. Андрощук М.О., Мішура Ю.С. Оцінка ймовірності банкрутства страхової компанії, яка функціонує на BS-ринку // Украинский математический журнал. — 2007. — **59**, № 11. — С. 1443–1453.

38. Cramer H. On the mathematical theory of risk // Skandia Jubilee Volume. — Stockholm, 1930. — 40 p.

39. Cai J. Discrete time risk models under rates of interest // Probability in the Engineering and Informational Sciences. — 2002. — **16.** — P. 309–324.

40. Гончар Н.С. Теорема о капитализации банков // Проблемы управления и информатики. — 2012. — № **1.** — С. 126–140.

41. Гончар М.С., Каплуненко Д.О. Ймовірність банкрутства банку за необмежених виплат // Доповіді НАН України. — 2012. — **3.** — С. 14–18.

42. Gonchar N.S. Bank capitalization theorem // Journal of Automation Sciences. — 2012. — **44.** — P. 65–80.

43. Гончар Н.С. Динамическая модель риска с инвестированием в активы // Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики». — 2014. — № 3. — С.109–127.

44. Gonchar N.S. Mathematical foundations of information economics. — Kiev: Institute for Theoretical Physics, 2008. — 468 p.

45. Altman E. Financial ratios, discriminant analysis and the prediction of corporate bankruptcy // Journal of Finance. — 1968. — **23.** — P. 589–609.

46. Artzner P., Delbaen F., Eber J.-M., Heath D. Coherent measures of risk // Mathematical Finance. — 1999. — **9.** — P. 203–228.

47. Duffie D., Pan J. An overview of value at risk // J. of Derivatives. — 1997. — **4.** — P. 7–49.

48. Merton R. On the pricing of corporate debt: the risk structure of interest rates // J. of Finance. — 1974. — **29.** — P. 449–470.

Поступила 24.09.2013