УДК 004.422.6:510.21

В.Н. РЕДЬКО, Д.Б. БУЙ, Ю.А. ГРИШКО

СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ТЕОРИИ МУЛЬТИМНОЖЕСТВ С СУЩНОСТНОЙ ТОЧКИ ЗРЕНИЯ

Аннотация. Предлагаемая обзорная статья посвящена современному состоянию теории мультимножеств — математических моделей совокупностей с повторениями (дубликатами, экземплярами своих элементов). Соответствующая библиография разделена на категории: работы, посвященные общей теории мультимножеств, обзорные работы, работы по применению мультимножеств, в частности в компьютерных науках.

Ключевые слова: совокупность с повторениями, мультимножество.

ВВЕДЕНИЕ

Предлагаемая обзорная статья посвящена мультимножествам — моделям таких сущностей, как совокупности с повторениями (экземплярами, дубликатами своих элементов). Не вдаваясь в детальное обсуждение экстенсиональных и интенсиональных аспектов упомянутых сущностей, отметим только наиважнейшие: множественность и экземплярность.

Ставить вопрос о соотношении понятий множества и мультимножества на одном уровне абстракции (как это пытается сделать Д. Кнут) по меньшей мере принципиально некорректно, поскольку упомянутые понятия по своей сути находятся на разных уровнях абстракции. Здесь надо рассматривать их одновременно на двух уровнях абстракции (полиабстрактность, а не моноабстрактность на предметном уровне), рассматривать введение и исключение абстракции и т.д. Все эти глубинные сущностные вопросы выходят за рамки данной статьи, цель которой гораздо более локальная — показать фактическое современное состояние теории мультимножеств и ее применений. Другими словами, для указанной предметной области речь будет идти не о фактологии, а только о фактографии. Авторы сознательно отвлекаются от интерпретации обсуждаемых конкретных результатов применительно к мультимножествам.

Вкратце коснемся сущностного подхода. Такой подход, если говорить в общих чертах, предполагает рассмотрение не только экстенсиональных аспектов (т.е. аспектов, выделяющих рассматриваемую сущность в универсуме сущностей как абстракцию от замкнутости в актуальности универсума объектов), но и интенсиональных (т.е. аспектов, касающихся внутренней структуры рассматриваемой сущности; подробнее см. [1] и библиографию к ней).

Всеобъемлющее обсуждение этих аспектов в отдельности, а тем более их взаимодействия (интерфейса) выходит далеко за рамки данной статьи. Поэтому отметим только, что для мультимножеств экстенсиональность обуславливается множественностью, а интенсиональность — экземплярностью.

Говоря неформально, мультимножества — это совокупности с повторениями. Понятие мультимножества (особенно это относится к самому термину) появилось относительно недавно, хотя в практических задачах мультимножества используются довольно часто.

Отметим характерный штрих: в такой классической области, как комбинаторный анализ, мультимножества появились под названием сочетаний (combinations) с повторениями (см., например, [2–5]; при этом в [5] появляется сам термин «мультимножество» и дается его формальное определение как функции из канторовского множества в множество натуральных чисел без ноля), а в монографии [6], претендующей на фундаментальность, мультимножества появляются только один (!) раз и используются в интуитивном смысле.

В 60-х годах прошлого столетия Д. Кнут (D. Knuth) поднял вопрос об отсутствии адекватной терминологии и обозначений для такой глобальной концепции, как мультимножество. Впервые термин «мультимножество» (multiset, bag) предложил Н.Г. де Брейн (N. G. de Bruijn) в частной переписке с Д. Кнутом. В 70-х годах прошлого столетия этот термин приобрел широкое распространение и теперь является стандартным.

Долгое время понятие мультимножество профессионалами интерпретировалось по-разному. Общеизвестная статья В. Близарда (W. Blizard) [8] является попыткой систематизировать всю существующею на то время (1989 г.) информацию. В ней представлен развернутый обзор развития теории мультимножеств, который условно разделен на две части: «Математика и логика» и «Вычислительная математика». Автор в хронологическом порядке излагает основные идеи и достижения разных ученых, начиная от рассмотрения понятия множества и его мощности у Г. Кантора и заканчивая современными результатами (Д. Кнут, Р. Ягер (R. Yager) и др.).

В одних работах, рассмотренных В. Близардом, мультимножества представлены как математические объекты, в других они исследуются с точки зрения некоторого специфического применения. Анализируются не только мультимножества с конечной и бесконечной кратностью элементов, но и мультимножества с отрицательной кратностью (так называемы гибридные множества). В настоящей работе рассматриваются также нечеткие (fuzzy) и так называемые жесткие (rough) мультимножества. Кроме того, уделяется внимание применению мультимножеств в теории категорий и комбинаторике; приведены философские аспекты теории мультимножеств.

В большинстве работ определение мультимножества формулируется на платформе классической канторовской теории множеств или же в терминах исчисления предикатов первого порядка.

Отметим, что некоторые работы развивают теорию видов (theory of sorts), которая радикально отличается от классической математики своей трехуровневой (tripatitous) природой: объекты могут быть одинаковые, разные или двойственные.

Существует более современная (2007 г.) обзорная статья [18], которая отталкивается от работ В. Близарда. В ней насчитывается более 80 источников по теории мультимножеств и ее применению. В первой части работы рассматриваются методы представления мультимножеств, определяются операции объединения, пересечения и сложения мультимножеств и приводятся некоторые их свойства. Вторая часть [18] посвящена использованию мультимножеств в различных сферах (в основном в компьютерных науках). Однако мультимножества используются не только в математике и компьютерных науках, а и во многих других областях.

Всю библиографию, посвященную мультимножествам, можно условно разделить на такие категории:

— общая теория мультимножеств,

— обзоры,

— применение мультимножеств.

Кроме этого, отделим работы, посвященные применению мультимножеств в компьютерных науках. Таким образом, имеем четыре раздела. Информация в каждом разделе представлена в хронологическом порядке.

1. ОБЩАЯ ТЕОРИЯ МУЛЬТИМНОЖЕСТВ

В монографии [31] авторы приводят содержательное определение мультимножества. Отмечается, что мультимножество можно рассматривать как последовательности пар, при этом каждая пара состоит из элемента и его кратности. Поэтому, как и для последовательностей, наилучший способ представления мультимножеств существенно зависит от операций, которые над ними выполняются.

Дж. Алберт (J. Albert) в работе [7] приводит формальные определения мультимножеств и операций над ними, а также рассматривает алгебраические свойства мультимножеств.

Во втором томе фундаментальной монографии [25] Д. Кнут дает только содержательное определение понятия мультимножество и вводит также операции объединения, пересечения и сложения мультимножеств.

В [20] подытоживается фактография теории мультимножеств. Статья состоит из шести разделов. Первый раздел — вступительный, второй посвящен определению мультимножеств и операций над ними, третий описывает гибридные множества, в четвертом разделе мультимножества рассматриваются в терминах теории категорий, пятый и шестой посвящены соответственно нечетким и частично упорядоченным мультимножествам.

Автор определяет мультимножество, допуская, что элементы могут повторяться конечное число раз. Далее приводится три способа формального определения мультимножества: представление мультимножества в виде списка (мультимножество определяется путем задания всех его элементов), представление в виде правила (the rule method, мультимножество определяется некоторым свойством, присущим его элементам) и представление через характеристическую функцию (по сути мультимножество отождествляется с его характеристической функцией).

Автор различает понятие мультимножества (с различимыми элементами, которые повторяются) и действительного (real) мультимножества (с неразличимыми элементами, которые повторяются) и приводит формальные определения.

Во втором разделе также представлены определения опорного множества и подмультимножества. Заданы понятие мощности мультимножества и операции над мультимножествами (сложение, разность, объединение и пересечение), указаны некоторые свойства этих операций. Кроме того, вводится достаточно специфическая операция, которая не имеет аналога для множеств — бинарная операция мультипересечения, одним аргументом которой выступает мультимножество, а другим — множество.

Как отмечалось выше, третий раздел статьи посвящен гибридным множествам — совокупностям, кратность элементов которых может быть как неотрицательной, так и отрицательной. Автор формализует понятие гибридное множество, вводит операции объединения, пересечения и суммы над введенными объектами. Также дано определение подмножества гибридного множества.

В четвертом разделе рассматривается категорная модель мультимножества. Приводятся определения двух категорий всевозможных мультимножеств: MSet и Bags.

В пятом разделе статьи описываются нечеткие мультимножества. Автор дает формальное определение нечеткого мультимножества, представления нечетких мультимножеств в виде ранговой последовательности. Кроме того, вводятся операции объединения и пересечения нечетких мультимножеств, рассматривается определение подмультимножества нечеткого мультимножества, равенства нечетких мультимножеств и операции α-ограничения нечеткого мультимножества.

Последний раздел посвящен частично упорядоченным мультимножествам (partial ordered multiset — pomset). Приведены определения частично упорядоченного мультимножества и рассмотрены три основные операции над ними: специальное пересечение (concurrence), специальное соединение (concatenation) и так называемое ортопересечение (orthoconcurrence).

В своей первой небольшой монографии, посвященной мультимножествам [28], А.Б. Петровский вводит основные определения теории мультимножеств: определение мультимножества, характеристической функции мультимножества (функции кратности), операций над мультимножествами. Кроме того, рассматриваются свойства основных операций над мультимножествами, методы графического представления мультимножеств и приводится краткий обзор применения мультимножеств в различных областях. В следующей монографии [29] автор рассматривает метрические пространства множеств и мультимножеств, описывает новые метрики.

2. АНАЛИЗ ОБЗОРНЫХ СТАТЕЙ

Как отмечалось выше, В. Близард в работе [8] приводит развернутый обзор теории мультимножеств по состоянию на 1989 г. Работа состоит из двух частей: теория мультимножеств и ее применения. В первой части работы автор формулирует разнообразные определения понятия мультимножества разными авторами, начиная от Кантора и его определения понятия множества. Во второй части работы мультимножества рассматриваются, в первую очередь, как объекты некоторых практических задач.

В работе [18] рассматриваются различные представления мультимножеств (в мультипликативной, линейной формах, в виде последовательности, как семейство множеств, в виде числовой последовательности). Определяются операции над мультимножествами и рассматриваются некоторые их свойства. Также приводится краткий обзор применений мультимножеств в математике, компьютерных науках и других областях.

3. ПРИМЕНЕНИЕ МУЛЬТИМНОЖЕСТВ В КОМПЬЮТЕРНЫХ НАУКАХ

Л. Либкин (L. Libkin) и Л. Вонг (L. Wong) в первой работе [13] рассмотрели теоретические вопросы, касающиеся реляционных баз данных (БД), основой модели данных которых выступают мультимножества. Построен язык запросов для мультимножеств BQL (Bag Query Language) и исследована связь между полученным языком и так называемой вложенной реляционной алгеброй (nested relation algebra). Вторая работа [14] посвящена выразительной силе языка запросов для мультимножеств, а также использованию некоторых конструкций для мультимножеств, множеств и списков.

В статье [23] Д.Б. Буй и С.А. Поляков рассматривают функции над таблицами, при этом таблицы понимаются как мультимножества, основами которых являются множества односхемных строк: объединение, пересечение, разность (вводятся как ограничения одноименных операций над мультимножествами), декартово соединение и удаления дубликатов.

Второй раздел статьи посвящен уточнению таблиц как мультимножеств строк. Сначала вводится определение строки (как кортежа и как именного множества) и рассматриваются основные функции на строках: разыменования, именования, объединения и доступа к элементу строки по номеру либо имени. Далее таблица формализуется как конечное мультимножество строк одной схемы. Описывается общая процедура распространения теоретико-множественных операций над таблицами, которые состоят из кортежей, до операций над таблицами, которые состоят из строк. Определяется соответствие между строками и кортежами, а также между таблицами строк и таблицами кортежей.

Последний раздел посвящен уточнению «упорядоченных» таблиц, которое заключается в рассмотрение таблицы как мультимножества с бинарным отношением, которое индуцируется фразой оператора запросов ORDER BY. Другими словами, в SQL-подобных языках таблица уточняется как модель, носителем которой является таблица в предыдущем понимании, а сигнатура содержит единственный предикатный символ.

Монография [30] принадлежит к разделу «Применения мультимножеств в компьютерных науках», хотя ее также можно отнести к разделу «Общая теория мультимножеств», так как в ней приводятся определения, которые соответствуют непосредственно теории мультимножеств. Авторы дают формальные уточнения мультимножества и его характеристической функции. Вводится понятие 1-мультимножества — мультимножества, областью значений которого является синглтон {1} (кратность каждого элемента равна 1, т.е. {1}-мультимножество изоморфно множеству). Определяются операции объединения, пересечения и разности над мультимножествами в терминах характеристических функций. Авторы различают операции $\cup_{All}, \cap_{All}, \setminus_{All}$, которые учитывают кратность, и операции $\cup_1, \cap_1, \setminus_1$, которые кратность игнорируют. Последние строят 1-мультимножества, основы которых получаются соответственно теоретико-множественными операциями объединения, пересечения и разности основ мультимножеств-аргументов.

В [30] также вводится операция $Dist(\alpha)$, которая строит 1-мультимножество, основа которого совпадает с основой исходного мультимножества, рассматривается операция декартова соединения двух мультимножеств и аналог полного образа (множества относительно функции) для мультимножеств.

Объемная работа [12] посвящена вопросу расширения возможностей БД за счет использования мультимножеств. Авторы отмечают, что современные коммерческие реляционные БД позволяют проводить мультимножественно-ориентированные манипуляции над таблицами даже если они основаны на формальной множественно-ориентированной модели. В статье приводятся определения операций проекции, селекции, произведения, соединения (natural и theta-), переименования таблиц как мультимножества строк, а также определения аналогов теоретико-множественных операций (объединения, пересечения и разности).

В работе [26] С.Д. Кузнецов рассматривает существование такого структурного типа, как мультимножество (BAG) в декларативном языке ограничений OCL (Object Constraint Language). Это тип является разновидностью коллекции и имеет соответсттвующие операции.

Начиная со стандарта SQL:2003 [19] в язык SQL был введен конструктор типа `MULTISET`. Значения мультимножества задаются специальной конструкцией `multiset value constructor`. Кроме того, для мультимножеств вводятся операции объединения, пересечения и разности (`multiset union`, `multiset intersect`, `multiset except` соответственно), а также новые агрегатные функции (`collect`, `fusion`, `intersect`).

В работе [17] К.А. Росса (K.A. Ross) и Ю. Стоянович (J. Stoyanovich) симметрическая связь между k-арными сущностями БД представлена как мультимножество мощности k, где k — натуральное число. Обосновывается необходимость поддержки БД мультимножеств, ограниченных по мощности (cardinality-bounded multisets), которые естественным образом возникают при решении реальных задач. Предлагаются способы реализации. Описан синтаксис расширения SQL, что дает возможность формулировать запросы над такими симметричными связями.

В [24] Г. Гарсиа-Молина (H. Garcia-Molina), Дж. Ульман (J. Ullman), Дж. Уидом (J. Widom) приводят определения мультимножеств в терминах табличных алгебр. Также над мультимножествами вводятся основные (объединение, пересечение, разность, проекция, селекция, декартово произведение) и дополнительные (агрегирование, сортировка, группирование) операции.

В статье [11] Д. Кнут применяет мультимножества в контекстно-свободных мультиязыках: приводится определение мультимножества, а также некоторых операций над мультимножествами (в частности, объединения, пересечения, сложения, умножения и т.д.). Определяется мультиязык как мультимножество слов (тогда как классический формальный язык — множество слов) и контекстно-свободный мультиязык. Д. Кнут считает, что замена множества слов на мультимножество слов более естественна с точки зрения программирования.

В работах [15, 16] Дж. В. Ллойд (J.W. Lloyd) представил новый способ поддержки мультимножества в декларативном языке программирования. Сначала вводится определение мультимножества, затем мультимножество определяется соответствующими средствами языка. Приводится реализация операций над мультимножествами: сложения, разности, объединения, пересечения и ряда вспомогательных функций: функция, которая определяет, является ли заданный элемент членом мультимножества; функция конвертирования списка в мультимножество; функция определения суммы кратностей всех элементов мультимножества (т.е. определяется мощность мультимножества); функция, которая устанавливает, является ли заданное мультимножество подмультимножеством мультимножества (по сути, речь идет о бинарном предикате); функция удаления дубликатов; функция установления равенства двух мультимножеств; функция удаления элементов мультимножества; функция стандартизации (применяется для представления мультимножества в некотором стандартном виде). Все идеи реализовано на языке программирования Escher. Статья дополнена примерами.

В работах В.А. Башкина и И.А. Ломазовой [22, 32] мультимножества используются для определения основных понятий сетей Петри.

В [9] рассмотрен случай представления информации в терминах мультимножеств и кодирования информации с помощью мультимножеств. Сначала дается краткий обзор теории информации Шеннона. Дискретный информационный ресурс продуцирует мультимножественные сообщения (с мультимножеством символов). Также исследуется норма энтропии мультимножества информационного ресурса. Затем рассматривается кодирование мультимножеств, которое включает кодирование строки и кодирование длины, и для каждого кодирования определяется пропускная способность канала.

О.А. Славин использует мультимножества в задачах распознавания символов [33]. Различные с точки зрения изображения типы символов могут содержать несколько графем, т.е. типов изображений, которые отвечают одному символу. Алфавит обучения как множество классов является носителем мультимножества всех допустимых графем. Кратность элемента этого мультимножества является количеством графем, неразличимых с точки зрения алфавита обучения.

4. ДРУГИЕ ПРИМЕНЕНИЯ МУЛЬТИМНОЖЕСТВ

Х. Барендрегт в [21] вводит понятие мультимножества для сильно эквивалентных рекурсий в теории λ-исчисления. Основами таких мультимножеств выступают конечные множества натуральных чисел. Для мультимножеств рассматриваются ординалы.

Г.В. Сухольский используют мультимножества при рассмотрении математических методов в психологии [34] (речь даже идет о так называемой математической психологии). Автор дает содержательное определение понятия мультимножество, а также на примерах описывает различные операции над мультимножествами: обобщение, конкретизация, адамарово умножение, степень и деление и т.д. Следует отметить, что рассмотренные автором операции обобщения и конкретизации введены для решения конкретных практических задач и поэтому допускается даже отрицательные значения кратности элементов. Отметим, что для операции адамарова умножения, степени и деления примеры применений отсутствуют.

В работах Г.Г. Малинецкого и С.А. Науменко [10, 27] мультимножества используются в такой новой области знаний, как вычисления на ДНК — раздел так называемых молекулярных вычислений (нового междисциплинарного направления исследований на стыке молекулярной биологии и компьютерных наук).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе в систематизированном виде представлен обзор современной литературы по теории мультимножеств и их применению.

Все работы из библиографии разделены на четыре группы: общая теория мультимножеств, обзорные работы, применение мультимножеств в компьютерных науках и другие применения мультимножеств. Библиография по каждой из групп приведена в хронологическом порядке. По каждой работе приводится перечень основных результатов.

Анализ литературы позволяет сделать следующие выводы.

1. Понятие мультимножества является естественным и применяется во многих разнообразных областях.

2. Современная теория мультимножеств имеет фрагментарный характер, поэтому пока нельзя говорить о существовании систематической развитой общей теории мультимножеств, построенной на единой методологической основе.

3. Несмотря на многочисленные применения мультимножеств (от теории сложности вычислений, баз данных до психологии), пока преждевременно говорить о едином адекватном подходе при рассмотрении приложений мультимножеств.

Сделаем еще ряд замечаний. В работах [35–40] авторы внесли вклад в развитие общей теории мультимножеств: построена алгебраическая система мультимножеств, сигнатурные операции которой, с одной стороны, выступают аналогами канторовских теоретико-множественных операций, а с другой, отражают специфику мультимножеств (экземплярность). Что касается единственного сигнатурного отношения, то оно является аналогом теоретико-множественного включения. Для указанной алгебраической системы установлены основные свойства операций (ассоциативность, коммутативность, идемпотентность, взаимная дистрибутивность, аналоги законов де Моргана и т.д.), а для соответствующего частично упорядоченного множества мультимножеств — его структура; кроме того, построена полурешетка мультимножеств и рассмотрены два естественных ее вложения в полные решетки. В терминах примитивных программных алгебр решен вопрос описания класса вычислимых функций над мультимножествами (точнее говоря, рассматриваются конечные мультимножества натуральных чисел).

В качестве нетривиальных приложений указанных результатов отметим только задание денотационной семантики рекурсивной формы так называемых CTE-выражений (Common Table Expressions) в современных SQL-подобных языках [40].

Упомянутые вопросы будут освещены в последующих публикациях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Редько В.Н., Редько И.В., Гришко Н.В. Концептуальные основания сущностной платформы // Дев’ята міжнар. конф. «Теоретичні та прикладні аспекти побудови програмних систем» TAAPSD 2012 (3–7 грудня 2012 р.). Праці конференції. — Кіровоград: ФОП Александрова М.В., 2012. — С. 256–258.
2. Риордан Дж. Введение в комбинаторный анализ: пер. с англ. — М.: Изд-во иностр. лит., 1963. — 287 с.
3. Холл М. Комбинаторика: пер. с англ. — М.: Мир, 1970. — 424 с.
4. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. — М.: Физ.-мат. лит., 1986. — 384 с.
5. Стенли Р. Перечислительная комбинаторика: пер. с англ. — М.: Мир, 1990. — 440 с.
6. Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика. Основания информатики: пер. с англ. — М.: Мир, 1998. — 703 с.
7. Albert J. Algebraic properties of bag data types // Seventeenth Intern. Conf. on Very Large Data Bases. — Barcelona, Spain, 1991. — P. 211–219.
8. Blizard W.D. The development of multiset theory // Notre Dame J. of Formal Logic. — 1989. — **30**, N 1. — P. 36–66.
9. Bonchis C., Izbasa C., Ciobanu G. Information theory over multiset // Comput. and Informat. — 2008. — **27**. — P. 441–451.
10. DNA computing: Wikipedia, the free encyclopedia. — http://en.wikipedia.org/wiki/DNA_computing.
11. Knuth D. Context-free multilanguages // Theoret. Stud. in Comput. Sci. — San Diego: Academ. Press Professional, Inc., 1992. — P. 1–13.
12. Lamperti G., Melchiori M., Zanella M. On multisets in database systems // Multiset Processing: Mathemat., Comput. Sci. and Molecular Comput. Points of View. Lecture Notes in Comput. Sci. — 2001. — **2235**. — P. 147–215.
13. Libkin L., Wong L. Query language for bags and aggregates function // J. Comput. and System Sci. — 1997. — **55**, N 1. — P. 241–272.
14. Libkin L., Wong L. Some properties of query language for bags // Proc. of 4th Intern. Workshop on Database Program. Lang. — New York, 1993. — P. 97–114.
15. Lloyd J. Programming with multisets // Department of Comput. Sci. Uni. of Bristol, 1998.
16. Lloyd J. Programming with sets and multisets // Ibid. — 1998.
17. Ross K., Stoyanovich J. Symmetric relations and cardinality-bounded multisets in database systems // Proc. of Intern. Conf. “Very Large Database Endowment”: August 31 – September 03, 2004. — 2004. — **30**. — P. 912–923.

18. Singh D., Ibrahim A., Yohanna T., Singh J. An overview of the applications of multisets // Novi Sad J. of Mathemat. — 2007. — **37**, N 2. — P. 73–92.

19. SQL: Операции. — http://articles. org.ru/docum/sql_oper.php.

20. Syropoulos A. Mathematics of multisets // Multiset Processing: Mathemat., Comput. Sci., and Molecular Comput. Points of View. Lecture Notes in Comput. Sci. — 2001. — **2235**. — P. 347–358.

21. Барендрегт Х. Лямбда-исчисление. Его синтаксис и семантика: пер. с англ. — М.: Мир, 1985. — 606 с.

22. Башкин В.А., Ломазова И.А. Подобие обобщенных ресурсов в сетях Петри. — http://lvk.cs.msu.su/files/ mco2005/ bashkin.pdf.

23. Буй Д.Б., Поляков С.А. Композиційна семантика SQL-подібних мов: мультимножини, рядки, впорядковані таблиці // Вісн. Київ. ун-ту. Сер.: фіз.-мат. науки. — 1999. — Вип. 2. — С. 183–194.

24. Гарсиа-Молина Г., Ульман Д., Уидом Дж. Системы баз данных: пер. с англ. — М.: Вильямс, 2004. — 1088 с.

25. Кнут Д. Искусство программирования: пер. с англ. — М.: Вильямс, 2000. — Т. 2. — 832 с.

26. Кузнецов С.Д. Оптимизация запросов: вечнозеленая область. — http://citforum.ru/database/articles/sql_optimization.shtml.

27. Малинецкий Г.Г., Науменко С.А. Вычисления на ДНК. Эксперименты. Модели. Алгоритмы. Инструментальные средства. — http://www.keldysh.ru/papers/2005/prep57/prep2005_57.html.

28. Петровский А.Б. Основные понятия теории мультимножеств. — М.: Едиториал УРСС, 2002. — 80 с.

29. Петровский А.Б. Пространства множеств и мультимножеств. — М.: Едиториал УРСС, 2003. — 248 с.

30. Редько В.Н., Брона Ю.Й., Буй Д.Б., Поляков С.А. Реляційні бази даних: табличні алгебри та SQL-подібні мови. — Київ: Академперіодика, 2001. — 198 с.

31. Рейнгольд Э., Нивергельт Ю., Део Н. Комбинаторные алгоритмы: теория и практика. — М.: Мир, 1980. — 476 с.

32. Сети Петри. — http://www.iacp.dvo. ru/lab_11/otchet/ot2000/pn3.html#top.

33. Славин О.А. Использование мультимножеств в распознавании символов // Тр. Ин-та системного анализа российской академии наук. — 2006. — 23. — С. 198–205.

34. Сухольский Г.В. Математические методы в психологии. — Харьков: ФОЛИО, 2004. — 282 с.

35. Богатирьова Ю.О. Обчислюваність на скінченних множинах та мультимножинах // Вісн. Київ. нац. ун-ту імені Тараса Шевченка. Сер.: фіз.-мат. науки. — 2010. — № 4. — С. 88–96.

36. Богатырёва Ю.А. Мультимножества: обзор библиографии, построение решетки мультимножеств // Проблеми програмування. — 2010. — № 2. — С. 68–71.

37. Богатырёва Ю.А. Мультимножества: библиография, решетка мультимножеств // Матеріали 6-ї Міжнар. конф. «Теоретичні та прикладні аспекти побудови програмних систем» (TAAPSD’2009, Київ, 8–10 грудня 2009 р.). — 2009. — **2**. — С. 13–20.

38. Буй Д.Б., Богатырёва Ю.А. Структура частично упорядоченного семейства мультимножеств // Inform. Model of Knowledge. — ITHEA. — 2010. — **19**. — P. 387–391.

39. Буй Д.Б., Богатырёва Ю.А. Теория мультимножеств: библиография, применение в табличных базах данных // Радіоелектронні і комп’ютерні системи. — 2010. — № 7(48). — С. 56–62.

40. Поляков С.А., Буй Д.Б. Рекурсивні запити в SQL-подібних мовах: приклади, змістовна і формальна семантика // Проблеми програмування. — 2010. — № 2–3. — С. 434–439.

Поступила 07.10.2014