©2006. **Р.В. Шамин, В.А. Дружинин**

О МОДЕЛИРОВАНИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В настоящей работе рассматривается первая смешанная задача для параболического дифференциально-разностного уравнения, содержащего ограниченную нелинейность. Доказанно существование и единственность этой задачи, а также обоснован метод построения приближенных решений.
Нелинейные эволюционные функционально-дифференциальные уравнения имеют важные приложения в нелинейной оптике.

Ключевые слова: краевые задачи для нелинейных параболических уравнений
MSC (2000): 35K60

1. Введение.

Нелинейные эволюционные функционально-дифференциальные уравнения возникают при исследовании нелинейных оптических систем с двумерной обратной связью [1—3].

В настоящей работе рассматривается первая смешанная задача для параболического дифференциально-разностного уравнения со сдвигами по пространственным переменным, содержащего ограниченную нелинейность. Доказано существование и единственность решений этой задачи, а также обоснован метод построения приближенных решений. Именно такие задачи возникают в приложениях нелинейной оптики. Параболические функционально-дифференциальные уравнения изучались в [4—8].

2. Постановка задачи.

Пусть $Q \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с границей $\partial Q = \bigcup\limits_i \overline{M_i}$ $(i = 1, ..., N_\circ)$, где M_i — (n-1)-мерные многообразия класса C^∞, которые являются открытыми и связными в топологии ∂Q. Пусть в окрестности каждой точки $g \in \partial Q \setminus \bigcup\limits_i M_i$ область Q — диффеоморфна n-мерному двугранному углу, если $n \geq 3$, и плоскому углу, если $n = 2$.

Мы будем обозначать через $H^k(Q)$ пространство Соболева комплекснозначных функций из $L_2(Q)$, имеющих все обобщенные производные вплоть до k-го порядка из $L_2(Q)$, с нормой

$$\|u\|_{H^k(Q)} = \left\{ \sum_{|\alpha| \leq k} \int\limits_Q |\mathcal{D}^\alpha u(x)|^2 dx \right\}^{1/2}.$$

Через $\mathring{H}^k(Q)$ обозначим замыкание множества финитных бесконечно дифференцируемых функций $\dot{C}^\infty(Q)$ в $H^k(Q)$, а через $H^{-1}(Q)$ обозначим пространство, сопряженное к $\mathring{H}^1(Q)$.

Введем ограниченный дифференциально-разностный оператор $A_R : \mathring{H}^1(Q) \to$

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ N 04-05-64784, N 04-01-00256 и Программой фундаментальных исследований Президиума РАН "Математические методы в нелинейной динамике".

$H^{-1}(Q)$ по формуле

$$A_R u = \sum_{i,j=1}^{n} (R_{ijQ} u_{x_j})_{x_i} + \sum_{i=1}^{n} R_{iQ} u_{x_i} + R_{0Q} u.$$

Здесь $R_{ijQ} = P_Q R_{ij} I_Q,\ R_{iQ} = P_Q R_i I_Q$,

$$R_{ij} u(x) = \sum_{h \in M} a_{ijh}(x) u(x+h)\ (i,j = 1,\dots,h),$$

$$R_i u(x) = \sum_{h \in M} a_{ih}(x) u(x+h)\ (i = 0,1,\dots,n),$$

$M \subset \mathbb{R}^n$ – конечное множество векторов с целочисленными координатами, a_{ijh}, $a_{ih} \in C^\infty(\overline{Q})$; $I_Q : L_2(Q) \to L_2(\mathbb{R}^n)$ — оператор продолжения функции из $L_2(Q)$ нулем в $\mathbb{R}^n \backslash Q$; $P_Q : L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(Q)$ — оператор сужения функции из $L_2(\mathbb{R}^n)$ на Q.

Определение 1. *Оператор $-A_R$ мы будем называть сильно эллиптическим, если существует константа $c_1 > 0$ такая, что для всех $u \in \dot{C}^\infty(Q)$*

$$-\operatorname{Re}(A_R u, u)_{L_2(Q)} \geq c_1 \|u\|^2_{H^1(Q)}. \tag{1}$$

Необходимые и достаточные условия сильной эллиптичности в алгебраической форме будут сформулированы в конце этого параграфа.

Будем рассматривать дифференциально-разностное уравнение

$$u_t(x,t) - A_R u(x,t) = f(u(x,t)) \qquad ((x,t) \in Q_T), \tag{2}$$

с краевым условием

$$u|_{\Gamma_T} = 0 \qquad ((x,t) \in \Gamma_T) \tag{3}$$

и начальным условием

$$u|_{t=0} = \psi(x) \qquad (x \in Q), \tag{4}$$

где $f : \mathbb{R} \to [-M, M]$, $0 < M < \infty$, – непрерывно дифференцируемая функция, $Q_T = Q \times (0,T)$, $\Gamma_T = \partial Q \times (0,T)$, $0 < T < \infty$, $\psi \in L_2(Q)$.

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что оператор $-A_R$ — сильно эллиптический.

Для того, чтобы сформулировать условия сильной эллиптичности оператора $-A_R$, введем некоторые вспомогательные обозначения. Обозначим через G аддитивную абелеву группу, порожденную множеством M, а через Q_r открытые связные компоненты множества $Q \setminus \left(\bigcup_{h \in G} (\partial Q + h) \right)$.

Определение 2. *Множества Q_r мы будем называть подобластями, а совокупность $\mathcal{R}$ всевозможных подобластей Q_r — разбиением множества Q.*

Разбиение $\mathcal{R}$ естественным образом распадается на непересекающиеся классы : будем считать, что подобласти $Q_{r_1}, Q_{r_2} \in \mathcal{R}$ принадлежат одному классу, если существует $h \in G$ такое, что $Q_{r_2} = Q_{r_1} + h$. Обозначим подобласти Q_r через Q_{sl}, где s — номер класса

$(s=1,2,...)$, а l — порядковый номер подобласти в s-ом классе. В силу ограниченности области Q каждый класс состоит из конечного числа $N=N(s)$ подобластей Q_{sl} и $N(s)\le([diamQ]+1)^n$.

Для того, чтобы сформулировать необходимые условия сильной эллиптичности в алгебраической форме, мы введем матрицы $R_{ijs}(x)$ $(x\in\overline{Q}_{s1})$ порядка $N(s)\times N(s)$ с элементами

$$r^{ijs}_{kl}(x)=\begin{cases} a_{ijh}(x+h_{sk}) & , \quad (h=h_{sl}-h_{sk}\in M) \\ 0 & , \quad (h_{sl}-h_{sk}\notin M). \end{cases} \tag{5}$$

В силу теоремы 9.1, [9], если оператор $-A_R$ сильно эллиптический, то для всех $s=1,2,\dots,$ $x\in\overline{Q}_{s1}$ и $0\ne\xi\in\mathbb{R}^n$ матрицы

$$\sum_{i,j=1}^n(R_{ijs}(x)+R^*_{ijs}(x))\xi_i\xi_j$$

положительно определены.

Пусть теперь $x\in\overline{Q}_{s1}$ — произвольная точка. Рассмотрим все точки $x^l\in\overline{Q}$ такие, что $x^l-x\in G$. Поскольку область Q ограниченная, множество $\{x^l\}$ состоит из конечного числа точек $I=I(s,x)$ $\quad(I\ge N(s))$. Перенумеруем точки x^l так, что $x^l=x+h_{sl}$ для $l=1,\dots,N=N(s)$, $x^1=x$, где h_{sl} удовлетворяет условию $Q_{sl}=Q_{s1}+h_{sl}$. Введем матрицы $A_{ijs}(x)$ порядка $I\times I$ с элементами $a^{ijs}_{lk}(x)$ по формуле

$$a^{ijs}_{lk}(x)=\begin{cases} a_{ijh}(x^l) & , \quad (h=x^k-x^l\in M), \\ 0 & , \quad (x^k-x^l\notin M) \end{cases}$$

В силу теоремы 9.2, [9], если для всех $s=1,2,\dots,$ $x\in\overline{Q}_{s1}$ и $0\ne\xi\in\mathbb{R}^n$ матрицы

$$\sum_{i,j=1}^n(A_{ijs}(x)+A^*_{ijs}(x))\xi_i\xi_j$$

положительно определены, то оператор $-A_R$ — сильно эллиптический.

Очевидно, если $I=N$, то матрица $R_{ijs}(x)$ равна матрице $A_{ijs}(x)$. Если $N<I$, то матрица $R_{ijs}(x)$ получается из матрицы A_{ijs} вычеркиванием последних $I-N$ строк и столбцов.

Определим решение задачи (2)–(4).

Определение 3. *Мы будем называть функцию $u\in L_2(0,T;\mathring{H}^1(Q))$ обобщенным решением задачи (2)–(4), если для любой функции $v\in\{H^1(Q_T):v|_{\Gamma_T}=0,v|_{t=T}=0\}$ выполнено интегральное тождество*

$$\int\limits_{Q_T}(-u\overline{v}_t+\sum_{i,j=1}^n R_{ijQ}u_{x_j}\overline{v}_{x_i}-\sum_{i=1}^n R_{iQ}u_{x_i}\overline{v}-R_{0Q}u\overline{v})dxdt=\int\limits_{Q_T}f(u)\overline{v}dxdt+\int\limits_{Q}\psi\overline{v}|_{t=0}dx. \tag{6}$$

Введем неограниченный оператор $\mathcal{A}_R:D(\mathcal{A}_R)\subset L_2(Q)\to L_2(Q)$, действующий в пространстве распределений $D'(Q)$ по формуле $\mathcal{A}_Ru=A_Ru$ $(u\in D(\mathcal{A}_R)=\{u\in\mathring{H}^1(Q):\mathcal{A}_Ru\in\ L_2(Q)\})$.

Определение 4. *Обобщенное решение задачи (2)–(4) и мы будем называть классическим операторным решением, если* $u \in C([0,T]; L_2(Q)) \cup C^1((0,T); L_2(Q))$, $u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_R)$ *для всех* $0 < t < T$.

3. Существование и единственность.

Для доказательства существования и единственности воспользуемся методами теории полугрупп. Приведем соответствующие определения.

Определение 5. *Пусть* X *— банахово пространство. Однопараметрическое семейство линейных ограниченных операторов* $T_t : X \to X \quad (t \geq 0)$ *называется сильно непрерывной полугруппой или* C_0*-полугруппой, если*

1) $T_0 = I$*;*

2) $T_{t+s} = T_t T_s \quad (t, s \geq 0)$*;*

3) $\lim\limits_{t\searrow 0} T_t x = x$ *(для любого* $x \in X$*).*

Определение 6. *Полугруппа класса* C_0 *называется сжимающей, если* $\|T_t\| \leq 1$ $(t \geq 0)$.

Определение 7. *Линейный оператор* $A : X \supset D(A) \to X$*, определенный по формуле*

$$Ax = \lim_{t\searrow 0} \frac{T_t x - x}{t} \quad \left(x \in D(A) = \{x \in X : \lim_{t\searrow 0} \frac{T_t x - x}{t} \text{ существует}\}\right)$$

называется инфинитезимальным производящим оператором сильно непрерывной полугруппы $\{T_t\}$.

Обозначим $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : \varphi_1 < \arg z < \varphi_2\}$, где $\varphi_1 < 0 < \varphi_2$.

Определение 8. *Однопараметрическое семейство линейных ограниченных операторов* $T_z : X \to X \quad (z \in \Delta)$ *называется аналитической полугруппой в* Δ*, если*

1) функция $z \to T_z$ *является аналитической в* Δ*;*

2) $T_0 = I$ *и* $\lim\limits_{z\to 0, z\in\Delta} T_z x = x$ *(для любого* $x \in X$ *);*

3) $T_{z_1+z_2} = T_{z_1} T_{z_2}$ *(для любых* $z_1, z_2 \in \Delta$ *).*

Полугруппа T_t *называется аналитической, если она аналитическая в некотором секторе* Δ*, содержащем положительную вещественную полуось.*

Теорема 1. *Пусть оператор* $-A_R$ *сильно эллиптический,* $f \in C^1(R^1)$, $|f(y)| \leq M$, $|f'(y)| \leq M$, $0 < M < \infty$, $\psi \in D(A_R)$. *Тогда задача (2)–(4) имеет единственное классическое операторное решение.*

Доказательство. В силу теоремы 3.2 из [5] оператор A_R является генератором аналитической полугруппы. Следовательно, по теореме 1.5 гл.6 [10] задача (2)–(4) имеет единственное классическое операторное решение.

4. Приближенные решения.

Введем полуторалинейную форму в пространстве $\mathring{H}^1(Q)$

$$a[u,v] = \sum_{i,j=1}^{n} (R_{ijQ} u_{x_j}, v_{x_i})_{L_2(Q)} - \sum_{i=1}^{n} (R_{iQ} u_{x_i}, v)_{L_2(Q)} - (R_{0Q} u, v)_{L_2(Q)}.$$

В силу сильной эллиптичности оператора $-A_R$ для формы a выполнено неравенство

$$\operatorname{Re} a[u,u] \geq c_1 \|u\|^2_{\mathring{H}^1(Q)}. \tag{7}$$

для любой $u \in \mathring{H}^1(Q)$.

Пусть u — классическое операторное решение задачи (2)–(4). Тогда u удовлетворяет задаче

$$(u_t, v)_{L_2(Q)} + a[u, v] = (f(u), v)_{L_2(Q)}, \tag{8}$$

$$(u|_{t=0}, v)_{L_2(Q)} = (\psi, v)_{L_2(Q)} \tag{9}$$

для любой $v \in \mathring{H}^1(Q)$.

В пространстве $\mathring{H}^1(Q)$ выберем базис φ_k. Множество линейных комбинаций $\sum\limits_{k=1}^{N} \alpha_k \varphi_k$ образует конечномерное подпространство $H^N \subset \mathring{H}^1(Q)$. Приближенное решение будем искать в виде

$$u^N(x,t) = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k(t) \varphi_k(x),$$

где коэффициенты α_k определяются из задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(\sum_{k=1}^{N} \alpha_k'(t)\varphi_k, \varphi_i)_{L_2(Q)} + a[\sum_{k=1}^{N} \alpha_k(t)\varphi_k, \varphi_i] = (f(\sum_{k=1}^{N} \alpha_k(t)\varphi_k), \varphi_i)_{L_2(Q)}, \tag{11}$$

$$(\sum_{k=1}^{N} \alpha_k(0)\varphi_k - \psi, \varphi_i)_{L_2(Q)} = 0, \tag{12}$$

$$i = 1, \ldots, N.$$

Задачу Коши (11)-(12) можно переписать в матричном виде

$$B\vec{\alpha}' + A\vec{\alpha} = F(\vec{\alpha}), \tag{11'}$$

$$B\vec{\alpha}(0) = \vec{\alpha}_0, \tag{12'}$$

где $\vec{\alpha}(t) = (\alpha_1(t), \ldots, \alpha_N(t))^T$, $F(\vec{\alpha}) = ((f(\sum\limits_{k=1}^{N} \alpha_k\varphi_k)\varphi_1), \ldots, (f(\sum\limits_{k=1}^{N} \alpha_k\varphi_k)\varphi_N))^T$, $\vec{\alpha}_0 = ((\psi, \varphi_1), \ldots, (\psi, \varphi_N))^T$, $B = ((\varphi_i, \varphi_j)_{L_2(Q)})$, $A = (a[\varphi_i, \varphi_j])$. Поскольку φ_k являются базисом, матрица B невырождена. А в силу предположения относительно f правая часть уравнения (11') ограничена. Следовательно, задача Коши (11')-(12') имеет единственное решение при $t \in [0, T]$.

Получим априорную оценку для приближенного решения $u^N(x,t)$. Для этого умножим каждое уравнение (11) на $\alpha_i(t)$ и сложим результаты по $i = 1, \ldots, N$. Получим

$$(u_t^N, u^N)_{L_2(Q)} + a[u^N, u^N] = (f(u^N), u^N)_{L_2(Q)}. \tag{13}$$

Интегрируя по t, имеем

$$\frac{1}{2}\|u^N\|^2_{L_2(Q)}(t) + \int_0^t a[u^N, u^N]dt' = \int_0^t (f(u^N), u^N)dt' + \frac{1}{2}\|u^N\|^2_{L_2(Q)}(0). \tag{14}$$

Используя неравенство (7) и неравенство Гельдера, получаем

$$\|u^N\|^2_{L_2(Q)}(t)+\int\limits_0^t \|u^N\|^2_{\mathring{H}^1(Q)}(t')dt' \leq c_2((\int\limits_0^t f(u^N)dt')^{1/2}\cdot(\int\limits_0^t \|u^N\|^2_{L_2(Q)}(t')dt')^{1/2}+\|\psi\|^2_{L_2(Q)}).$$

Из последнего соотношения в силу неравенства $|ab|\leq a^2(4\varepsilon)^{-1}+\varepsilon b^2$ получаем

$$\|u^N\|^2_{L_2(Q)}(t)+\int\limits_0^t \|u^N\|^2_{\mathring{H}^1(Q)}(t')dt' \leq c_3(1+\|\psi\|^2_{L_2(Q)}).$$

Таким образом, имеем следующую априорную оценку:

$$\max_{t\in[0,T]}\|u^N\|^2_{L_2(Q)}(t)+\int\limits_0^T \|u^N\|^2_{\mathring{H}^1(Q)}(t')dt' \leq c_4(1+\|\psi\|^2_{L_2(Q)}). \tag{15}$$

В силу (15) из последовательности $\{u^N\}$ можно извлечь подпоследовательность, сходящуюся к u слабо в $L_2(0,T;\mathring{H}^1(Q))$.

Замечание 1. В дальнейшем мы покажем, что u есть единственное решение задачи (2)–(4), следовательно и сама u^N будет сходиться к u.

В силу (13) для любой функции $v\in\{\mathring{H}^1(Q),\ v|_{\Gamma_T}=0,\ v|_{t=T}=0\}$ верно следующее равенство:

$$\int\limits_0^T(-(u^N,v_t)_{L_2(Q)}+a[u^N,v])dt=\int\limits_0^T(f(u^N),v)_{L_2(Q)}dt+(\psi^N,v|_{t=0})_{L_2(Q)}, \tag{16}$$

где $\psi^N=\sum\limits_{k=1}^N(\psi,\varphi_k)_{L_2(Q)}\varphi_k$.

Покажем, что в (16) можно перейти к пределу при $N\to\infty$. В силу слабой сходимости в $L_2(0,T;\mathring{H}^1(Q))$ последовательности u^N к u, нетривиальным является предельный переход только в нелинейном члене. В силу предположений относительно функции f имеем

$$\|f(u^N)\|_{L_2(Q_T)}\leq(\operatorname{mes}Q_TM)^{1/2}.$$

Поэтому из $\{f(u^N)\}$ можно извлечь подпоследовательность, слабо сходящуюся в $L_2(Q_T)$. Без ограничения общности можно считать, что и сама $f(u^N)$ слабо сходится к $f(u)$.

Переходя к пределу в (11) при $N\to\infty$, получаем, что u^N сходится к обобщенному решению задачи (2)–(4) слабо в $L_2(0,T;\mathring{H}^1(Q))$.

Пример 1. Пусть $Q=(0,2)\times(0,1)$. Рассмотрим дифференциально-разностный оператор

$$A_R=\Delta Ru,$$

$$R=u(x_1,x_2)+\alpha u(x_1+1,x_2)+\beta u(x_1-1,x_2),$$

где $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Предположим, что выполнено соотношение $|\alpha+\beta|<2$, тогда оператор $-A_R$ будет сильно эллиптическим. Рассмотрим задачу

$$u_t(x,t)-\Delta Ru(x,t)=\cos(u(x,t)),\quad ((x,t)\in Q_T)$$

$$u|_{\Gamma_T} = 0,$$
$$u|_{t=0} = (x_1 x_2 (2 - x_1)(1 - x_2))^2, \quad (x \in Q).$$

Поскольку начальная функция $u|_{t=0}$ принадлежит пространству $\mathring{H}^2(Q)$, следовательно, согласно лемме 3.2 [6] принадлежит и $D(\mathcal{A}_R)$. Таким образом для рассматриваемого примера существует классическое операторное решение, и приближенные решения получаемые по методу, предложенному в настоящей работе, сходятся к обобщенному решению.

1. *M.A. Vorontsov, J.C. Ricklin, G.W. Carhart* Optical simulation of phase-distorted imaging systems : nonlinear and adaptive optics approach. Optical Engineering, 1995, v.34, N 11, P. 3229–3238.
2. *А.Л. Скубачевский* О некоторых свойствах эллиптических и параболических функционально-дифференциальных уравнений. УМН, 1996, т.51, вып.1, С. 169–170.
3. *A.L. Skubachevskii* Bifurcation of periodic solutions for nonlinear parabolic functional differential equations arising in optoelectronics. Nonlinear Analysis, 1998, V. 32, N 2, P. 261—278.
4. *Р.В. Шамин* О пространствах начальных данных для дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве. // Математический сборник, том 194, 2003, вып. 9, с. 1411–1426.
5. *А.Л. Скубачевский , Р.В. Шамин* Первая смешанная задача для параболического дифференциально-разностного уравнения // Математические заметки, т. 66, вып. 1, 1999, с. 145–153.
6. *A.L. Skubachevskii , R.V. Shamin* The mixed boundary value problem for parabolic differential-difference equation // Functional differential equations, vol. 8, 2001, N 3–4, p. 407–424.
7. *А.Л. Скубачевский , Р.В. Шамин* Параболические дифференциально-разностные уравнения второго порядка // Доклады РАН, 2001, т. 379, вып. 5, стр. 735–738.
8. *Р.В. Шамин* Пространства начальных данных для параболических функционально-дифференциальных уравнений // Математические заметки, 2002, т. 71, вып. 4, с. 636–640
9. *A.L. Skubachevskii* Elliptic functional differential equations and applications. Basel–Boston–Berlin, Birkhauser, 1997.
10. *A. Pazy* Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations. New York–Berlin–Heidelberg, Springer, 1983.

Лаборатория нелинейных волновых процессов,
Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН,
Нахимовский проспект, д.36
117997, Москва,

кафедра "Дифференциальные уравнения",
Московский авиационный институт
(государственного технического университета),
Волоколамское шоссе, д.4
125993, г.Москва, А-80, ГСП-3

roman@shamin.ru

Получено 16.12.2005