Нелинейные граничные задачи **16**, 222-225 (2006)

©2006. **Н.Е. Товмасян, О.А. Бабаян**

ЭФФЕКТИВНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В работе описывается эффективный метод решения задачи Коши для одного класса нелинейных дифференциальных уравнений, возникающих при изучении полета летательного аппарата по заданной траектории.

Ключевые слова: задача Коши; управление; нелинейное дифференциальное уравнение
MSC (2000): 34B60

При математическом описании оптимального управления полетом летательного аппарата по заданной траектории задача сводится к решению следующей задачи Коши:

$$\begin{cases} y'(x) = a(x)y(x) + z(x) + k(x) \\ y(0) = m_0 \end{cases}, \quad 0 \le x \le x^0 \tag{1}$$

где $m_0 > 0, k(x) \ge 0, 0 \le x \le x^0$, а $y(x)$ и $z(x)$ – искомые функции, удовлетворяющие условиям

$$y'(x) \ge 0, z(x) \ge 0, \quad 0 \le x \le x^0 \tag{2}$$

Рассмотрим также следующую задачу:

$$y'(x) = max(a(x)y(x) + k(x), 0) + \eta(x), \quad 0 \le x \le x^0, \tag{3}$$

$$y(0) = m_0 \tag{4}$$

$$z(x) = max(-a(x)y(x) - k(x), 0) + \eta(x), \quad 0 \le x \le x^0, \tag{5}$$

где $\eta(x)$ - заданная функция, $\eta(x) \ge 0$.

Имеют место следующие теоремы 1-2.

Теорема 1. *Если $(y(x), z(x))$ - решение задачи (1)-(2), то оно является решением задачи (3)-(5) при некотором $\eta(x) \ge 0$ и наоборот.*

Теорема 2. *Если $(y(x), z(x))$ - решение задачи (1)-(2), а $(y_0(x), z_0(x))$ - решение задачи (3)-(5) при $\eta(x) \equiv 0$, то*

$$y(x) \ge y_0(x), \quad z(x) \ge z_0(x), \quad 0 \le x \le x_0.$$

Согласно теореме 1, $(y_0(x), z_0(x))$ - также решение задачи (1)-(2). Исходя из физических соображений, это решение будем называть оптимальным.

Таким образом, задача (1)-(2) сведена к задаче Коши (3)-(4) для нелинейного уравнения (3). Ниже мы укажем эффективный метод решения задачи (3)-(4). Этим методом мы можем также найти оптимальное решение задачи (1)-(2).

Рассмотрим функцию $y_1(x) = y(x) - \int_0^x \eta(t)dt$. Легко видеть, что $y'(x) = y_1'(x) + \eta(x)$ и $y(0) = y_1(0) = m_0$. Подставляя $y_1(x)$ в (3), и обозначая

$$k_1(x) = a(x) \int_0^x \eta(t)dt + k(x), \tag{6}$$

получим следующую задачу Коши, эквивалентную задаче (3)-(4):

$$\begin{cases} y_1'(x) = max\Big(a(x)y_1(x) + k_1(x), 0\Big) \\ y_1(0) = m_0 \end{cases} \tag{7}$$

- В случае, если $k_1(x) > 0$, задача (7) представляет собой задачу (3), где в роли функции $k(x)$ выступает функция $a(x)\int\limits_0^x \eta(t)dt + k(x)$.

- В случае, если $k_1(x) \le 0$, учитывая, что $k(x) \ge 0$ и $\int\limits_0^x \eta(t)dt \ge 0$, получаем $a(x) \le 0$, следовательно, задача (7) принимает вид

$$\begin{cases} y_1'(x) = 0 \\ y_1(0) = m_0 \end{cases}$$

  с решением $y_1(x) = m_0$.

Возникает вопрос нахождения аналитического выражения для решения $y_1(x)$ задачи (3)-(4) при заданных $a(x), k(x), \eta(x)$. Предположим, сначала, что $a(x)$ и $k_1(x)$ ступенчатые функции, то есть существует разбиение отрезка $[0, x^0]$, $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = x^0$, такое, что

$$a(x) = a_i, \quad k_1(x) = k_{1_i}, \quad x \in (x_i, x_{i+1}), \quad i = 0, 1, ..., N-1. \tag{8}$$

Тот факт, то функциями такого вида можно приблизить произвольные непрерывные на $[0, x^0]$ функции, был доказан в [3]. Имеет место следующая

Теорема 3. *Пусть в (7) $a(x)$ и $k_1(x)$ ступенчатые функции (8). Если $y(x)$ – решение задачи (7), то обозначим $y_i(x) \equiv y(x)$ при $x \in [x_i, x_{i+1}]$ и $m_i = y(x_i)$. Тогда функции $y_i(x)$ при $i = \overline{0, N-1}$ имеют следующий вид:*

1. $a_i m_i + k_{1_i} > 0, \quad a_i \ne 0$

$$y_i(x) = \frac{k_{1_i}}{a_i}\left(e^{a_i(x-x_i)} - 1\right) + m_i e^{a_i(x-x_i)};$$

2. $a_i m_i + k_{1_i} \le 0$

$$y_i(x) = m_i;$$

3. $k_{1_i} > 0, \quad a_i = 0$

$$y_i(x) = k_{1_i}(x - x_i) + m_i.$$

Теорема 3 проверяется непосредственно, подставляя $y_i(x)$ в (7).

Оценим решение задачи (7) при непрерывных $a(x)$ и $k_1(x)$ с помощью построенных решений.

Теорема 4. *Пусть для некоторого разбиения $\{x_i\}_0^N$ отрезка $[0, x^0]$ функции $a(x)$ и $k_1(x)$ заменяются ступенчатыми функциями $\overline{a}(x)$, $\overline{k_1}(x)$, $\underline{a}(x)$, $\underline{k_1}(x)$, постоянными на каждом отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ так, чтобы*

$$\underline{a}(x) \le a(x) \le \overline{a}(x) \qquad \underline{k_1}(x) \le k_1(x) \le \overline{k_1}(x)$$

Тогда эти неравенства верны и для соответствующих решений задачи (7), то есть:

$$\underline{y}(x) \leq y(x) \leq \overline{y}(x) \tag{9}$$

Доказательство. При $k_{1_i} > 0$ утверждение вытекает из теоремы из [3]. При $k_{1_i} \leq 0$ $\underline{y}(x) = y(x) = \overline{y}(x)$. Теорема доказана.

Из неравенств (9) следует, что вместо оценки разности между решениями $y(x)$ и $\underline{y}(x)$, которая возникает когда мы заменяем непрерывные функции $a(x)$ и $k_1(x)$ на кусочно-непрерывные функции $\overline{a}(x)$, $\overline{k_1}(x)$, $\underline{a}(x)$, $\underline{k_1}(x)$, можно оценить разницу между решениями $\underline{y}(x)$ и $\overline{y}(x)$, что гораздо легче. Будем предполагать, что разбиение выбрано так, что

$$\|\overline{a}(x) - \underline{a}(x)\| \leq \varepsilon \quad \|\overline{k_1}(x) - \underline{k_1}(x)\| \leq \varepsilon. \tag{10}$$

Сначала оценим решение задачи (7). Задача (7) эквивалентна следующему интегральному уравнению

$$y_1(x) = m_0 + \int\limits_0^x max\Big(a(t)y_1(t) + k_1(t), 0\Big)dt. \tag{11}$$

Поскольку функции $a(x)$ и $k_1(x)$ кусочно-непрерывные, то на замкнутом интервале $[0, x^0]$ верны неравенства

$$|a(x)| \leq A, \quad |k_1(x)| \leq K, \quad x \in [0, x^0]. \tag{12}$$

Повторяя рассуждения, проделанные в [3], приходим к следующей оценке для решения задачи (7) при кусочно-непрерывных коэффициентах $a(x)$ и $k_1(x)$

$$|y_1(x)| \leq e^{Ax}(Kx + m_0), \quad 0 \leq x \leq x^0. \tag{13}$$

Теперь оценим разницу между решениями $\underline{y}_1(x)$ и $\overline{y}_1(x)$. Используя неравенство $|max(\alpha, 0) - max(\beta, 0)| \leq |\alpha - \beta|$, получаем

$$\Big|max\Big(\overline{a}(x)\overline{y_1}(x) + \overline{k}_1(x), 0\Big) - max\Big(\underline{a}(x)\underline{y_1}(x) + \underline{k}_1(x), 0\Big)\Big| \leq$$

$$\leq A(\overline{y}_1(x) - \underline{y}_1(x)) + \varepsilon\big|\underline{y}_1(t)\big| + \varepsilon \tag{14}$$

Используя следствие из неравенства Гроноулла [4], получаем, что

$$\big|\overline{y}_1(x) - \underline{y}_1(x)\big| \leq z(x),$$

где $z(x)$ решение следующей задачи Коши

$$\begin{cases} z'(x) = Az(x) + \varepsilon + \varepsilon\big(m_0 + Kx\big)e^{Ax} \\ z(0) = 0 \end{cases} \tag{15}$$

Решение задачи (15) определяется формулой

$$z(x) = \frac{\varepsilon}{A}\big(e^{Ax} - 1\big) + \frac{\varepsilon}{2}e^{Ax}x\big(2m_0 + Kx\big). \tag{16}$$

Используя (16) и неравенство $e^{Ax} - 1 \le e^{Ax}Ax$, окончательно получаем оценку

$$\left|\overline{y}_1(x) - \underline{y}_1(x)\right| \le \varepsilon x e^{Ax}\big(a + m_0 + 0.5Kx\big), \qquad x \in [0, x^0]. \tag{17}$$

Обобщая вышесказанное, получаем, что при замене функций $a(x)$ и $k_1(x)$ на кусочно-непрерывные функции $\overline{a}(x), \overline{k_1}(x), \underline{a}(x), \underline{k_1}(x)$, на интервале $[0, x^0]$ разница между соответствующими решениями будет оцениваться формулой (17).

1. *Н.Е.Товмасян* Задача Коши для одного класса нелинейных дифференциальных уравнений и ее применение для оптимального управления летательных аппаратов // "Нелинейные граничные задачи", вып.15, 2005, с.204-210.
2. *О.А.Бабаян* Об одном дифференциальном неравенстве, связанным с оптимальным управлением полетом летательных аппаратов // Математика в высшей школе, №1, Ереван, 2004, с.47-50.
3. *О.А.Бабаян* Об эффективном решении задачи Коши для одного нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения // Математика в высшей школе, т.1, №1, Ереван, 2005, с.40-48.
4. *Ф.Хартман* Обыкновенные дифференциальные уравнения // М. Мир. 1970.

Государственный Инженерный Университет Армении,
Департамент Математики,
ул. Теряна 105,
375009, Ереван, Армения
armenak@web.am

Получено 22.12.2005