©2006. **В.П. Орлов**

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ДИНАМИКИ ВЯЗКОУПРУГОЙ СРЕДЫ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ

Установлена локальная теорема существования и единственности сильных решений для системы уравнений вязкоупругой сплошной среды со свободной границей.

Ключевые слова: вязкоупругая сплошная среда, свободная граница,теорема существования и единственности
MSC (2000): 35Q35, 47H11

1. Введение.

Рассматривается начально-граничная задача

$$V_t + \sum_{i=1}^{n} V_i \partial V/\partial x_i - \mu \triangle V - \operatorname{Div} G(B_x(V)) - \nabla Q = F(t,x), \tag{1.1}$$

$$\nabla \cdot V(t,x) = 0, (t,x) \in \mathcal{Q}_{T_0};$$

$$V(0,x) = v^0(x),\ x \in \Omega_0,\ \tilde{T}(V,Q)n(x) = -n(x)P_0(t,x),\ (t,x) \in \mathcal{S}_{T_0}, \tag{1.2}$$

описывающая движение сплошной среды, занимающей в момент времени $t = 0$ положение Ω_0. Здесь $\Omega_t \in R^n$, $n \geq 2$ является семейством ограниченных областей с границей Γ_t, $\mathcal{Q}_{T_0} = \{(t,x) : t \in [0,T_0],\ x \in \Omega_t\}$, $\mathcal{S}_{T_0} = \{(t,x) : t \in [0,T_0],\ x \in \Gamma_t\}$, вектор-функция $V(t,x) = (V_1(t,x),...,V_n(t,x))$ означает скорость среды в точке x в момент t, скалярная функция $Q(t,x)$ — давление, μ - положительная константа, $G(Z)$ — $n \times n$ матрица с коэффициентами $g_{ij}(z_{11}, z_{12}, \ldots, z_{nn})$ (z_{ij} - коэффициенты матрицы Z), $n(x)$ - вектор внешней нормали к границе Γ_t в точке x, Div - дивергенция матрицы (см.[1]). Выражение $B(V)$ задается как $B(V) = z(0;t,x)$, где $z(\tau;t,x)$ определяется как решение задачи Коши (в интегральной форме)

$$z(\tau;t,x) = x + \int_t^{\tau} V(s, z(s;t,x))\,ds, \quad \tau \in [0,T_0], \quad (t,x) \in \mathcal{Q}_{T_0}, \tag{1.3}$$

а $B_x(V) = z_x(0;t,x)$ - матрица Якоби для $z(0;t,x)$. Матрица $B_x(V)$ характеризует деформацию окрестности частицы $y \in \Omega_0$, находящейся в точке x в момент времени t, при движении по траектории поля скоростей среды V. Тензор напряжений среды $\tilde{T}(V,Q)$ определяется как матрица с коэффициентами

$$\tilde{T}_{ij} = -\delta_{ij} Q + \mu(\partial V_i/\partial x_j + \partial V_j/\partial x_i) + g_{ij}(z_x(0;t,x)).$$

Таким образом, матрица $G(B_x(V))$ описывает упругие напряжения среды. Как следует из (1.1), среда помнит упругие напряжения вдоль траекторий поля скоростей в начальный момент времени, а не только в точке x в момент t. В задаче (1.1)-(1.2) искомыми являются вектор-функция V, скалярная функция Q и множество $\mathcal{Q}_{T_0}$.

Работа частично поддержана РФФИ (грант 04-01-00081)

Система (1.1)-(1.2) описывает движение вязкоупругой сплошной среды со свободной границей. В случае цилиндрической области $\mathcal{Q}_{T_0}$ ($\Omega_t \equiv \Omega_0$) в [1] установлена локальная теорема существования и единственности сильных решений задачи (1.1)-(1.2) в соболевских пространствах при необходимых условиях на данные. В [2] установлена нелокальная теорема существования и единственности сильных решений для одной модели вязкоупругости в соболевских пространствах при малых данных. В случае $G \equiv 0$ система (1.1)-(1.2) описывает движение ньютоновской сплошной среды со свободной границей. В [3] при условии дифференцируемости по x функций F и P_0 установлена локальная теорема существования и единственности сильных решений задачи (1.1)-(1.2) в гельдеровских пространствах. Ниже мы, опираясь на результаты [3], устанавливаем аналогичный результат для случая $G \not\equiv 0$. Мы ограничиваемся здесь простейшим случаем учета упругих напряжений в момент $t = 0$ в точке x, хотя тот же результат устанавливается аналогичным образом и для случая учета напряжений вдоль всей траектории $z(\tau; t, x)$ движения частицы $y = z(0; t, x)$ (как и в [4], в уравнении движения в этом случае появляется слагаемое $\int_0^t \operatorname{Div} G(z_x(s; t, x))\, ds$). В этой связи отметим ряд работ, посвященных доказательству существования слабых решений для таких сред (см.напр.[5]-[6]).

Ниже мы рассматриваем упрощенную модель, заменяя в граничном условии $\tilde{T}(V, Q)$ на $T(V, Q)$, где $T(V, Q)$ матрица с коэффициентами

$$T_{ij} = -\delta_{ij} Q + \mu(\partial V_i/\partial x_j + \partial V_j/\partial x_i).$$

Доказательство результата для общего случая проводится по той же схеме, что и для упрощенного. Для формулировки основных результатов нам понадобится ряд вспомогательных результатов, которые приводятся в разделе 2. В разделе 3 вводятся необходимые функциональные пространства. В разделе 4 формулируются основной результат, а в разделе 5 проводится его доказательство. Возникающие в оценках различные константы, не зависящие от существенных параметров, обозначаются через M.

2. Задача (1.1)-(1.2) в лагранжевых координатах.

Пусть $v(t, y)$ гладкая вектор-функция на $Q_T = \{(t, y) : t \in [0, T],\ y \in \Omega_0\}$,

$$u(t, y) = y + \int_0^t v(s, y)\, ds,\ (t, y) \in Q_T, \tag{2.1}$$

$\Omega_t = \{x : x = u(t, y),\ y \in \Omega_0\}$, $S_T = \{(t, y) : t \in [0, T],\ y \in \Gamma_0\}$.

Соотношение (2.1) задает (по крайней мере для малых t) диффеоморфизм Ω_0 на Ω_t. Пусть $U(t, x)$ - обратное к $u(t, y)$ преобразование. Пусть $h(t, y)$ произвольная достаточно гладкая на Q_T вектор-функция. Поставим ей в соответствие определенную на $\mathcal{Q}_T$ вектор-функцию

$$H(t, x) = h(t, U(t, x)). \tag{2.2}$$

В дальнейшем пара функций (в том числе и скалярных), обозначенных большой и маленькой буквой (например H и h), предполагаются связанными соотношениями

$$H(t, x) = h(t, U(t, x),\ H(t, u(t, y)) = h(t, y). \tag{2.3}$$

Эти соотношения задают оператор $\mathcal{A}_v : \mathcal{A}_v(h) = H$ и обратный к нему оператор $\mathcal{B}_v$: $\mathcal{B}_v(H) = h$. В частности, для v и $\mathcal{B}_v(v) = V$ справедливы соотношения

$$V(t,x) = v(t, U(t,x), \ V(t, u(t,y)) = v(t,y). \tag{2.4}$$

Заметим, что

$$u_y(t,y) = U_x(t, u(t,y)), \ U_x(t,x) = u_y(t, U(t,x)), \tag{2.5}$$

и если $\nabla \cdot V(t,x) = 0$, то

$$\det U_x(t,x) = 1, \ \det u_y(t,y) = 1. \tag{2.6}$$

Перейдем в системе (1.1)-(1.2) от эйлеровых координат x к лагранжевым координатам y, сделав замену переменной

$$x = z(0; t, x) \equiv u(t,y), \ y \in \Omega_0. \tag{2.7}$$

Введем обозначение $v(t,y) = u_t(t,y)$. Тогда справедливы формулы (2.1), (2.4), (2.6). Сделав в (1.1)-(1.2) замену переменной (2.7), с учетом вышеупомянутых соотношений, получаем задачу

$$v_t - \mu \triangle_v v + \nabla_v q = F^{(v)}(t,y) + \psi^{(v)}(t,y), \ \mathrm{div}_v\, v = 0; \ (t,y) \in Q_{T_0}; \tag{2.8}$$

$$v(0,y) = v_0(y), \ y \in \Omega_0; \ T_v(v,q) n_v(y) = -P_0^{(v)}(t,y) n_v(y), \ (t,y) \in S_{T_0}. \tag{2.9}$$

Здесь $v(t,y) = V(t, u(t,y))$, $q(t,y) = Q(t, u(t,y))$,

$$F^{(v)}(t,y) = F(t, u(t,y)); \ P_0^{(v)}(t,y) = P_0(t, u(t,y)); \ n_v(y) = n(u(t,y)); \tag{2.10}$$

$$T_v(v,q) = \mathcal{B}_v(T(V,Q)); \tag{2.11}$$

$$\psi^{(v)}(t,y) = \mathcal{B}_v(\mathrm{Div}\ G(B_x(V))). \tag{2.12}$$

При этом

$$\nabla_v\, p = \mathcal{B}_v(\nabla P), \ \triangle_v\, h = \mathcal{B}_v(\triangle H), \ \mathrm{div}_v\, v = \mathcal{B}_v(\nabla \cdot V)$$

для произвольных скалярной P и вектор-функции H. Если найдены функции $v(t,y)$ и $q(t,y)$ то функции $V(t,x)$ и $Q(t,x)$ определяются как

$$V(t,x) = v(t, U(t,x)), \ Q(t,x) = q(t, U(t,x)),$$

а область Ω_t как $\Omega_t = \{x : x = u(t,y), \ y \in \Omega_0\}$ (u определяется через (2.7)).

3. Функциональные пространства.

Для формулировки результатов нам понадобится ряд функциональных пространств (см.[3]). Будем далее предполагать, что $\partial\Omega_0 \in C^{2+\alpha}$. Обозначим через $C^{r+\alpha}(\Omega_0)$, $r \geq 0$ целое, банахово пространство функций, имеющих непрерывные производные в $\bar{\Omega}_0$ до порядка r включительно, с конечной нормой

$$\|u\|_{C^{r+\alpha}(\Omega_0)} = \|u\|_{C^r(\bar{\Omega}_0)} + \sum_{|k|=r} [D_k u]_{\alpha,\Omega_0},$$

$$[D_k u]_{\alpha,\Omega_0} = \sup_{x,y\in\Omega_0} |u(x)-u(y)||x-y|^{-\alpha}$$

Здесь $k = (k_1, k_2, \cdots < k_n)$, $|k| = \sum_{i=1}^n$, $D_k u = \partial^{|k|}u/\partial x^{k_1}, \ldots, \partial x^{k_n}$. Обозначим через $C^{r+\alpha}(Q_T)$ при $r = 0, 1, 2$ банахово пространство определенных на $\bar{Q}_T$ функций с конечной нормой

$$\|u\|_{C^\alpha(Q_T)} = \|u\|_{C(\bar{Q}_T)} + [u]_{\alpha,Q_T} \quad (r=0),$$

$$[u]_{\alpha,Q_T} = [u]_{\alpha,t,Q_T} + [u]_{\alpha,x,Q_T},$$

$$[u]_{\alpha,t,Q_T} = \sup_{t,\tau,x} |u(t,x)-u(\tau,x)||t-\tau|^{-\alpha/2},$$

$$[u]_{\alpha,x,Q_T} = \sup_{t,x,y} |u(t,x)-u(t,y)||x-y|^{-\alpha},$$

$$\|u\|_{C^{1+\alpha}(Q_T)} = \|u\|_{C\bar{(}Q_T)} + \sum_{i=1}^n [\partial u/\partial x_i]_{\alpha,Q_T} + [u]_{1+\alpha,t,Q_T} \quad (r=1),$$

$$\|u\|_{C^{2+\alpha}(Q_T)} = \|u\|_{C^1(\bar{Q}_T)} + \sum_{i,j=1}^n [\partial^2 u/\partial x_i \partial x_j]_{\alpha,Q_T} + [\partial u/\partial t]_{\alpha,Q_T} +$$

$$\sum_{i=1}^n [\partial u/\partial x_i]_{1+\alpha,t,Q_T} \quad (r=2).$$

Нам понадобится также банахово пространство $\widetilde{C}_\gamma^{1+\alpha}(Q_T)$, $\gamma \in (0,1)$, определенных на $\bar{Q}_T$ функций с конечной нормой

$$\|u\|_{\widetilde{C}_\gamma^{1+\alpha}(Q_T)} = \|u\|_{C(\bar{Q}_T)} + \sum_{i=1}^n [\partial u/\partial x_i]_{C^\alpha(Q_T)} +]u[,$$

$$]u[= \sup_{x,y,t,\tau} |u(t,x)-u(t,y)-u(\tau,x)+u(\tau,y)||t-\tau|^{-(1+\alpha-\gamma)/2}.$$

Аналогично определяются пространства $C^{r+\alpha}(\Pi_T)$, $\widetilde{C}_\gamma^{1+\alpha}(\Pi_T)$.

4. Формулировка результатов.

Определение 1.Решением задачи (2.8)-(2.9) называется пара (v,q), $v \in C^{2+\alpha}(Q_T)$, $q \in \widetilde{C}_\gamma^{1+\alpha}(Q_T)$, удовлетворяющая уравнениям (2.8) и условиям (2.9).

Теорема 1. *Пусть* F, $F_x \in C^{1+\alpha}(\Pi_{T_0})$, P_0, $(P_0)_x \in \widetilde{C}_\gamma^{1+\alpha}(\Pi_{T_0})$ *при некоторых* $\alpha, \gamma \in (0,1)$. *Тогда при достаточно малом* $T \in (0, T_0]$ *задача (2.8)-(2.9) имеет по крайней мере одно решение.*

Замечание 1. Величина T на самом деле зависит от $\|F\|_{C^{1+\alpha}(\Pi_{T_0})}$, $\|P_0\|_{\widetilde{C}_\gamma^{1+\alpha}(\Pi_{T_0})}$ и Ω_0 и может быть оценена через данные задачи.

Замечание 2. Мы, как и в [3], опускаем переформулировку результата в терминах задачи (1.1)-(1.2).

5. Доказательство теоремы 1.

5.1. Случай $G \equiv 0$.

Пусть дана пара (v, q), $v \in C^{2+\alpha}(Q_T)$, $\nabla_v \cdot v = 0$, $q \in \widetilde{C}_\gamma^{1+\alpha}(Q_T)$, удовлетворяющая условиям (2.9). Обозначим

$$\mathcal{L}(v, q) = v_t - \mu \triangle_v v + \nabla_v \cdot q. \tag{5.1}$$

Рассмотрим задачу

$$\mathcal{L}(v, q) = F^{(v)}(t, y). \tag{5.2}$$

В [3] установлена локальная разрешимость (5.2). Приведем этот результат в удобной для нас форме.

Лемма 1. *Пусть выполняются условия теоремы 1. Пусть*

$$\|F\|_{C^\alpha(\Pi_{T_0})} \leq R_1, \quad \|P_0\|_{\widetilde{C}_\gamma^{1+\alpha}(\Pi_{T_0})} \leq R_2.$$

Тогда найдется такое достаточно малое $T_1 = T_1(R_1, R_2)$, что при $T \leq T_1$ задача (5.2) имеет единственное решение (v, q), $v \in C^{2+\alpha}(Q_T)$, $\nabla_v \cdot v = 0$, $q \in \widetilde{C}_\gamma^{1+\alpha}(Q_T)$, и справедлива оценка

$$\|v\|_{C^{2+\alpha}(Q_T)} + \|q\|_{\widetilde{C}_\gamma^{1+\alpha}(Q_T)} \leq M(R_1, R_2). \tag{5.3}$$

Замечание 1. Условие на дифференцируемость функций F и P_0 использовалось лишь при доказательстве единственности решения.

Рассмотрим возмущенную задачу (5.2):

$$\mathcal{L}(v, q) = F^{(v)}(t, y) + \psi(t, y), \tag{5.4}$$

где $\psi(t, y) \in C^\alpha(Q_T)$.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия теоремы 1. Предположим, что*

$$\|\psi(t, y)\|_{C^\alpha(Q_T)} \leq R_3.$$

Тогда найдется такое достаточно малое число $T_2 = T_2(R_1, R_2, R_3) \leq T_0$, что при $T \leq T_2$ задача (5.4) имеет единственное решение (v, q), $v \in C^{2+\alpha}(Q_T)$, $\nabla_v \cdot v = 0$, $q \in \widetilde{C}_\gamma^{1+\alpha}(Q_T)$, и справедлива оценка

$$\|v\|_{C^{2+\alpha}(Q_T)} + \|q\|_{\widetilde{C}_\gamma^{1+\alpha}(Q_T)} \leq M_1(R_1, R_2, R_3). \tag{5.5}$$

Доказательство, по существу, повторяет доказательство леммы 1 (изящное, но связанное с весьма продолжительными выкладками, см.[3]). При этом возмущение $\psi(t, y)$, не зависящее от v, играет роль параметра, влияя лишь на величину T_2.

5.2. Случай $G \not\equiv 0$**.**

Для того, чтобы сократить выкладки, упростим в уравнении (2.8) слагаемое $\psi^{(v)}(t,y)$. В силу гладкости матричной функции G, с учетом структуры выражения $\mathcal{B}_v(\mathrm{Div}G\ (B_x(V)))$, мы можем в задаче (2.8)-(2.9), без ограничения общности, заменить выражение $\psi^{(v)}(t,y) = \mathcal{B}_v(\mathrm{Div}\ G(B_x(V)))$ на выражение

$$\psi^{(v)}(t,y) = \mathrm{Div}\, G\left((I + \int_0^t v_y(s,y)\,ds)(I + \int_0^t v_y^*(s,y)\,ds)^{-1}\right), \tag{5.6}$$

поскольку коэффициенты векторов в правых частях двух последних соотношений имеют одинаковую структуру. Здесь $*$ означает переход к сопряженной матрице. В частности, если $G(Z) \equiv Z$, то правая часть (5.6) совпадает с $\mathcal{B}_v(\mathrm{Div}\ B_x(V))$.

Итак, будем полагать в (2.8) выражение $\psi^{(v)}(t,y)$ определенным формулой (5.6).

Рассмотрим теперь задачу

$$\mathcal{L}(v,q) = F^{(v)}(t,y) + \psi^{(v)}(t,y). \tag{5.7}$$

Для доказательства ее разрешимости докажем ряд вспомогательных утверждений.

Лемма 2. *Пусть* $v \in C^{2+\alpha}(Q_T)$, $\|v\|_{C^{2+\alpha}(Q_T)} \le R_4$. *Тогда справедлива оценка*

$$\|\psi^{(v)}\|_{C^{2+\alpha}(Q_T)} \le \Phi(R_4)T^{1-\alpha}, \tag{5.8}$$

где $\Phi(x)$ *некоторая непрерывная функция от* $x \in [0,\infty)$.

Доказательство. Пусть

$$Z(v) = (I + \int_0^t v_y(s,y)\,ds)(I + \int_0^t v_y^*(s,y)\,ds)^{-1},$$

так что $\psi^{(v)} = \mathrm{Div}\, G(Z(v))$. Из условия $\|v\|_{C^{2+\alpha}(Q_T)} \le R_4$ вытекает, что коэффициенты z_{ij} матрицы $Z(v)$ лежат в некотором шаре пространства R^{n^2} радиуса $R_5 = R_5(R_4)$ с центром в нуле и являются непрерывной функцией аргументов $\int_0^t \partial v_k(s,y)/\partial y_m\,ds$, $k,m = 1,\ldots,n$.

Таким образом, коэффициенты $\tilde{g}_{ij}$ матрицы $G(Z(v))$ также имеют вид

$$\tilde{g}_{ij}(v) = r_{ij}\left(\int_0^t \partial v_1(s,y)/\partial y_1\,ds,\ldots,\int_0^t \partial v_n(s,y)/\partial y_n\,ds\right),$$

где $r_{ij}(p_{11},\ldots,p_{nn})$ - гладкие функции своих аргументов, а

$$\partial\tilde{g}_{ij}/\partial y_k = \sum_{l,m=1}^{n} \partial r_{ij}/\partial p_{lm}\left(\int_0^t \partial v_1(s,y)/\partial y_1\,ds,\ldots\right.$$

$$\left.\ldots,\int_0^t \partial v_n(s,y)/\partial y_n\,ds\right)\int_0^t \partial^2 v_l(s,y)/\partial y_k\partial y_m\,ds.$$

Из последней формулы вытекает, что коэффициенты $\psi_i^{(v)}$ вектор-функции $\psi^{(v)}$ имеют вид

$$\psi_i^{(v)} = \sum_{j=1}^{n}\partial\tilde{g}_{ij}/\partial y_j = \sum_{j=1}^{n}\sum_{l,m=1}^{n}\partial r_{ij}/\partial p_{lm}\left(\int_0^t \partial v_1(s,y)\,ds/\partial y_1,\ldots\right. \tag{5.9}$$

$$\ldots, \int_0^t \partial v_n(s,y)/\partial y_n)\,ds\Big) \int_0^t \partial^2 v_l(s,y)/\partial y_j \partial y_m\,ds.$$

Используя легко проверяемые неравенства

$$\|\varphi\psi\|_{C^\alpha(Q_T)} \le M\|\varphi\|_{C^\alpha(Q_T)}\|\psi\|_{C^\alpha(Q_T)}, \tag{5.10}$$

$$\|f(\varphi)\|_{C^\alpha(Q_T)} \le M\|\varphi\|_{C^\alpha(Q_T)}, \tag{5.11}$$

где φ, ψ - произвольные функции из $C^\alpha(Q_T)$, а f - некоторая гладкая функция, получаем, что для оценки $\|\psi\|_{C^\alpha(Q_T)}$ достаточно оценить нормы

$$\|\int_0^t \partial v_l(s,y)\,ds/\partial y_j\,ds\|_{C^\alpha(Q_T)},\ \|\int_0^t \partial^2 v_l(s,y)/\partial y_j \partial y_m\,ds\|_{C^\alpha(Q_T)}.$$

Используя элементарные соображения, имеем

$$\|\int_0^t \partial v_l(s,y)\,ds/\partial y_j\,ds\|_{C^\alpha(Q_T)} \le MT^{1-\alpha}\|v\|_{C^{1+\alpha}(Q_T)}, \tag{5.12}$$

$$\|\int_0^t \partial^2 v_l(s,y)/\partial y_j \partial y_m\,ds\|_{C^\alpha(Q_T)} \le MT^{1-\alpha}\|v\|_{C^{2+\alpha}(Q_T)}. \tag{5.13}$$

Из оценок (5.10)-(5.13) и (5.9) в силу гладкости функций r_{ij} вытекает, что

$$\|\psi^{(v)}\|_{C^\alpha(Q_T)} \le M_3(R_4)T^{1-\alpha},$$

откуда следует (5.8) с $\Phi(x) = M_3(R_4)T^{1-\alpha}$. Лемма доказана.

Перейдем теперь непосредственно к доказательству разрешимости задачи (5.7).

Теорема 3.*Пусть выполняются условия теоремы 1. Тогда при достаточно малом $T \in (0, T_0]$ задача (5.7) имеет единственное решение.*

Доказательство. Пусть

$$u \in B(R_0) = \{u : u \in C^{2+\alpha}(Q_T),\ T \le T_0,\ \|u\|_{C^{2+\alpha}(Q_T)} \le R_0\}.$$

Рассмотрим задачу

$$\mathcal{L}(v,q) = F^{(v)}(t,y) + \psi^{(u)}(t,y), \tag{5.14}$$

при произвольной $u \in B(R_0)$. Из (5.8) следует, что

$$\|\psi^{(u)}\|_{C^\alpha(Q_T)} \le T^{1-\alpha}\Phi(R_0) \equiv R_3. \tag{5.15}$$

В силу теоремы 2 при фиксированных F и P_0, получаем существование и единственность решения (v,q) задачи (5.14) на промежутке $[0,T]$, $T \le T_2(R_1, R_2, T^{1-\alpha}\Phi(R_0))$, причем

$$\|v\|_{C^{2+\alpha}(Q_T)} + \|q\|_{\widetilde{C}^{2+\alpha}_\gamma(Q_T)} \le M_1(R_1,R_2,R_3) = M_1(R_1,R_2,T^{1-\alpha}\Phi(R_0)).$$

Считая R_3 постоянным, выберем R_0 настолько большим, а T_3 настолько маленьким, чтобы при $T \le T_3$ выполнялось неравенство

$$\|v\|_{C^{2+\alpha}(Q_T)} + \|q\|_{\widetilde{C}^{1+\alpha}_{\gamma}(Q_T)} \le R_0. \tag{5.16}$$

Обозначим через $\mathcal{R}$ оператор, ставящий в соответствие $u \in B(R_0)$ решение v задачи (5.14). Последнее неравенство означает, что оператор $\mathcal{R}$ переводит шар $B(R_0)$ в себя.

Пусть $v^0(t,y) = v_0(y)$, T и R_0 таковы, что $\mathcal{R}\,B(R_0) \subset B(R_0)$, а $v^0 \in B(R_0)$. Пусть v^n, q^n - последовательность решений уравнения (5.14) при $u = v^{n-1}$, $n = 1, 2, \cdots$. Так как $v^n = \mathcal{R}v^{n-1}$, то $v^n = B(R_0)$. Следуя [3], покажем, что последовательность v^n сходится в норме $C^{2+\alpha'}(Q_T)$, а q^n - в норме $\widetilde{C}^{2+\alpha'}_{\gamma'}(Q_T)$. Здесь $\alpha' \in (0,\alpha)$ - произвольное число, а $\gamma' = \max(\gamma, 1+\alpha'-\alpha)$. Справедлива

Лемма 3.*При произвольном $\varepsilon > 0$ имеет место неравенство*

$$\|v^n - v^{n-1}\|_{C^{2+\alpha'}(Q_T)} + \|q^n - q^{n-1}\|_{\widetilde{C}^{2+\alpha'}_{\gamma'}(Q_T)} \le M(\varepsilon\|v^n - v^{n-1}\|_{C^{2+\alpha'}(Q_T)} + \tag{5.17}$$

$$+C(\varepsilon)\int_0^T \|v(s,y)\,ds\|_{C^{2+\alpha}(Q_s)}\,ds + \|\psi^{(v^{n-1})} - \psi^{(v^{n-2})}\|_{C^{\alpha}(Q_T)}).$$

При доказательстве нужно повторить рассуждения, проведенные при доказательстве единственности в теореме 5 из [3]. При этом дополнительные слагаемые в правой части (5.14), содержащие $\psi^{(u^2)}$ и $\psi^{(u^1)}$, обусловливают появление последнего слагаемого в (5.17).

Лемма 4. *Пусть даны произвольные функции $v^1, v^2 \in B(R_0)$. Тогда справедливо неравенство*

$$\|\psi^{(v^2)} - \psi^{(v^1)}\|_{C^{\alpha'}(Q_T)} \le M_4(R_0)T^{1-\alpha}\|v^2 - v^1\|_{C^{2+\alpha'}(Q_T)}. \tag{5.18}$$

Доказательство. Из формулы (5.9) следует, что

$$\Delta_i = \psi_i^{(v^2)} - \psi_i^{(v^1)} = \sum_{j=1}^n \sum_{l,m=1}^n \left[\frac{\partial r_{ij}}{\partial p_{lm}}\left(\int_0^t \partial v_1^2(s,y)\,ds/\partial y_1, \ldots,\right.\right.$$

$$\left.\left.\int_0^t \partial v_n^2(s,y)/\partial y_n\,ds\right) - \frac{\partial r_{ij}}{\partial p_{lm}}\left(\int_0^t \partial v_1^1(s,y)\,ds/\partial y_1, \ldots, \int_0^t \partial v_n^1(s,y)/\partial y_n\,ds\right)\right]$$

$$\int_0^t \partial^2 v_l^2(s,y)/\partial y_j \partial y_m\,ds +$$

$$\sum_{j=1}^n \sum_{l,m=1}^n \frac{\partial r_{ij}}{\partial p_{lm}}\left(\int_0^t \partial v_1^1(s,y)\,ds/\partial y_1, \ldots, \int_0^t \partial v_n^1(s,y)/\partial y_n)\,ds\right)$$

$$\left[\int_0^t \partial^2 v_l^2(s,y)/\partial y_j \partial y_m\,ds - \int_0^t \partial^2 v_l^1(s,y)/\partial y_j \partial y_m\,ds\right].$$

Используя неравенства (5.10) и (5.11) для оценки $C^{\alpha'}(Q_T)$ нормы от Δ_i, так же, как при доказательстве леммы 2, получаем, что

$$\|\Delta_i\|_{C^{\alpha'}(Q_T)} \le MT^{1-\alpha}\|v^2 - v^1\|_{C^{2+\alpha'}(Q_T)}(\|v^2\|_{C^{2+\alpha'}(Q_T)} + \|v^1\|_{C^{2+\alpha'}(Q_T)}).$$

Отсюда следует (5.18). Лемма доказана.

Из оценок (5.17) и (5.18) следует, что

$$\|v^n - v^{n-1}\|_{C^{2+\alpha'}(Q_T)} + \|q^n - q^{n-1}\|_{\widetilde{C}^{2+\alpha'}_{\gamma'}(Q_T)} \leq M \Big(\varepsilon \|v^n - v^{n-1}\|_{C^{2+\alpha'}(Q_T)} + \tag{5.19}$$

$$C_\varepsilon \int_0^T \|v(s,y)\|_{C^{2+\alpha}(Q_s)}\, ds + M_4(R_0) T^{1-\alpha} \|v^{n-1} - v^{n-2}\|_{C^{2+\alpha'}}(Q_T) \Big).$$

Воспользовавшись тем, что $\|v\|_{C^{2+\alpha}(Q_s)} \leq \|v\|_{C^{2+\alpha}(Q_T)}$ при $s \leq T$, полагая $\varepsilon > 0$ и $T > 0$ достаточно малыми, получаем из (5.19), что

$$\|v^n - v^{n-1}\|_{C^{2+\alpha'}(Q_T)} + \|q^n - q^{n-1}\|_{\widetilde{C}^{2+\alpha'}_{\gamma}(Q_T)} \leq \frac{1}{2} \|v^{n-1} - v^{n-2}\|_{C^{2+\alpha'}(Q_T)}. \tag{5.20}$$

Из (5.20) следует, что последовательности v^n и q^n сходятся к некоторым функциям $v \in C^{2+\alpha'}(Q_T)$ и $q \in \widetilde{C}^{2+\alpha'}_{\gamma'}(Q_T)$ соответственно. Равномерная ограниченность норм $\|v^n\|_{C^{2+\alpha}(Q_T)}$ $\|q^n\|_{\widetilde{C}^{2+\alpha}_{\gamma}(Q_T)}$ влечет (см.[3]) включения $v \in C^{2+\alpha}(Q_T)$ и $q \in \widetilde{C}^{2+\alpha}_{\gamma}(Q_T)$. Ясно, что пара (v, q) является решением уравнения (5.7). В силу неравенства (5.18) доказательство единственности с небольшими несущественными изменениями повторяет доказательство единственности в теореме 5 из [3] для задачи (5.2). Теорема 3 доказана.

Нетрудно видеть, что однозначная разрешимость уравнения (5.7) равносильна однозначной разрешимости задачи (2.8)-(2.9).

Теорема 1 доказана.

1. Орлов В.П., Соболевский П.Е. *Исследование математических моделей вязкоупругости* // ДАН УССР. сер.А. - 1989. - N 10. - C. 31-35.
2. Орлов В.П. *Устойчивость нулевого решения математической модели вязкоупругой жидкости* // Известия Вузов. Математика. - 1995. - N 3. - C. 82-84.
3. Солонников В.А. *Разрешимость задачи о движении вязкой несжимаемой жидкости, ограниченной свободной поверхностью* // Известия АН СССР. сер. мат. - 1977. - Т. 41. - N 6. - C. 1388–1424.
4. Orlov V.P., Sobolevskii P.E. *On mathematical model of viscoelasticity with a memory* // Differential and Integral Equations. - 1991. - V.4. - N 1. - P. 89-101.
5. Звягин В.Г., Дмитриенко В.Т. *О слабых решениях начально-граничных задач для уравнений движения вязкоупругой жидкости* // Докл. РАН. - 2001. - Т. 380. - No 3. - C. 308–311.
6. Dmitrienko V.T., Zvyagin V.G. *Topological degree method in the equations of Navier-Stokes type* // Abstract and Applied Analysis. - 1997. - V. 1–2. - P. 1–45.

Воронежский государственный университет,
математический факультет,
Университетская пл., 1,
394 006 Воронеж, Россия
orlov_vp@mail.ru

Получено 13.12.2005