 Н.Н. Нефёдов, А.Г. Никитин

СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫЕ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В СЛУЧАЕ СБАЛАНСИРОВАННОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ

Рассмотрены решения сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных уравнений с внутренними переходными слоями в случае нелинейности "грубого"и сбалансированного типа. Обосновано асимптотическое разложение и устойчивость таких решений как стационарных решений соответствующей интегро- параболической задачи

Ключевые слова: сингулярные возмущения, интегро-дифференциальные уравнения
MSC (2000): 35B25, 45K05

В работе [1] нами были изучены решения сингулярно возмущенных интегро- дифференциальных уравнений с внутренним переходным слоем (т.н. контрастные структуры типа ступеньки) в пространственно одномерном случае. Обоснование полученных асимптотических разложений было получено с помощью развиваемого нами для нового класса задач асимптотического метода дифференциальных неравенств [1, 4]. В настоящей работе рассматриваются аналогичные задачи с решениями типа ступеньки в пространственно двумерном случае. Изучается вопрос об асимптотической устойчивости таких решений как стационарных решений соответствующей параболической задачи. Рассматривается следующая интегро-дифференциальная задача

$$\varepsilon^2 \Delta u = L(u, u, x, \varepsilon)\,,\ x = (x_1, x_2) \in \Omega, \tag{1}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0, \tag{2}$$

где $\varepsilon > 0$ - малый параметр, , $L(u, v, x, \varepsilon) \equiv \iint\limits_{\Omega} g(u(x), v(s), x, s)ds$. Под решением типа ступеньки мы будем понимать решение, имеющее следующий предельный вид

$$\lim_{\varepsilon \to 0} u(x, \varepsilon) = \begin{cases} \varphi_1(x)\,, x \in \Omega \backslash \Omega_i\,, \\ \varphi_3(x)\,, x \in \Omega_i, \end{cases} \tag{3}$$

где $\bar{\Omega}_i \subset \Omega$ и $\partial\Omega_i$ - гладкая замкнутая кривая. Потребуем выполнение следующих условий.

I. *Функция g является достаточно гладкой (При построении асимптотики с остаточным членом порядка* $\mathrm{O}(\varepsilon^{n+1})$ *достаточно потребовать, чтобы она была $n+2$ раза непрерывно дифференцируема).*

II. *Пусть вырожденное уравнение*

$$L(u, u, x, 0) = 0,\ x \subset \Omega$$

имеет разрывные решения следующего вида

$$\varphi(x, C_0) = \begin{cases} \varphi_1(x, C_0)\,, x \in \Omega \backslash \Omega_i\,, \\ \varphi_3(x, C_0)\,, x \in \Omega_i, \end{cases}$$

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, проект № 04-01-00710

где $C_0 \equiv \partial\Omega_i$ - произвольная гладкая кривая, принадлежащая области Ω, причем $\varphi_1(x_0, C_0) < \varphi_3(x_0, C_0)$ и $L_u(\varphi, \varphi, x, 0) > 0$ при $x \in \bar{\Omega}, x \notin C_0$, а также непрерывное решение $\varphi_2(x)$ такое что, $\varphi_1(x_0, C_0) < \varphi_2(x_0) < \varphi_3(x_0, C_0)$ и $L_u(\varphi_2, \varphi_2, x, 0) < 0$ при $x \in \bar{\Omega}$. Для определенности будем считать, что $\varphi_2 \equiv 0$ (здесь и далее обозначение x_0 означает, что $x \in C_0$).

В окрестностях кривой $\partial\Omega$ и неопределенной пока кривой C_0 стандартным образом вводятся локальные ортогональные системы координат. Асимптотическое разложение решения задачи (1),(2) будем искать с помощью алгоритма метода пограничных функций [3] в следующем виде

$$\begin{aligned} u(x,\varepsilon) &= \sum_{n=0} \varepsilon^n (\bar{u}_n(x) + P_n u(\eta, l) + \Pi_n u(\tau, m)) \equiv \\ &\equiv \bar{u}(x,\varepsilon) + Pu(\eta, l, \varepsilon) + \Pi u(\tau, m, \varepsilon), \end{aligned} \tag{4}$$

где $\bar{u}_i(x)$ - регулярные члены асимптотики, $P_i u(\eta, l, \varepsilon)$ - функции внутреннего переходного слоя, $\Pi_i u(\tau, m, \varepsilon)$ - функции пограничного слоя, соответственно. Здесь аргументы η и l связаны с локальной системой координат (r, l) , вводимой в окрестности кривой C_0 , определяемой условием

$$u|_{x \in C_*} = 0,$$

а - аргументы τ и m связаны с локальной системой координат $(\tilde{r}, m)$, вводимой в окрестности границы $\partial\Omega$. Кривая C_0 в локальной системе координат задается уравнением $r = 0$, а уравнение кривой C_* в этой системе координат будем искать в виде

$$r = f(l, \varepsilon) = \varepsilon r_1(l) + \varepsilon^2 r_2(l) + ...,$$

где $r_i(l)$ - достаточно гладкие периодические функции. Переменная η представляет собой растянутое с коэффициентом ε расстояние от кривой C_*: $\eta = (r - f(l, \varepsilon))/\varepsilon$. В качестве дополнительного условия, позволяющего определить коэффициенты $r_i(l)$ разложения для кривой C_*, будем использовать условие непрерывности производной по r функции u на кривой C_*

$$\frac{\partial u(x,\varepsilon)}{\partial r^+} = \frac{\partial u(x,\varepsilon)}{\partial r^-}$$

при $x \in C_*$ (под $\frac{\partial}{\partial r^-}$ и $\frac{\partial}{\partial r^+}$ здесь и далее мы будем понимать предельное значение производной при $x \to C$ соответственно из внешней области $\bar{\Omega} \backslash \bar{\Omega}_{\ i}$ и внутренней области $\Omega_{\ i}$).

Аналогичным образом в окрестности границы $\partial\Omega$ вводится локальная система координат (r_1, m), а $\tau = -r_1/\varepsilon$ является растянутым с коэффициентом ε расстоянием от границы области Ω. Введем в рассмотрение следующую функцию

$$J(x, C_0) = \int\limits_{\varphi_1(x,C_0)}^{\varphi_3(x,C_0)} L(u, \varphi, x, 0) du.$$

В случае "грубой"нелинейности кривую C_0 определим из следующего условия.

III. *Пусть на некоторой простой замкнутой кривой $C_0 \in \Omega$*

$$J(x, C_0) = 0$$

и

$$\frac{\partial J(x_0, C_0)}{\partial r_0} < 0.$$

Условие III позволяет построить гладкую функцию переходного слоя

$$\tilde{u}(\eta, l) = \begin{cases} \varphi_1(x, C_0) + P_0 u\,(\eta, l), \eta < 0, \\ 0, \eta = 0, \\ \varphi_3(x, C_0) + P_0 u\,(\eta, l), \eta > 0, \end{cases}$$

определяемую единообразно для любых значений η. Задача для $\tilde{u}$ будет иметь следующий вид

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \eta^2} = \iint\limits_{\Omega} g(\tilde{u}, \varphi\,(s\,, C_0), x_0\,, s, 0) ds, \quad -\infty < \eta < +\infty,$$

$$\tilde{u}\,(-\infty, l) = \varphi_1(x_0, C_0),$$
$$\tilde{u}(0, l) = \varphi_2(x_0) \equiv 0,\ \tilde{u}(+\infty, l) = \varphi_3(x_0, C_0).$$

Условие III для данной задачи означает, что на фазовой плоскости уравнения образуется ячейка, состоящая из двух седел $\varphi_1(x, C_0)$ и $\varphi_3(x, C_0)$ $(x \in C_0\ )$, соединенных сепаратрисами. Благодаря наличию ячейки существует решение данной задачи, описывающее движение по верхней сепаратрисе, стремящееся к $\varphi_1(x, C_0)$ при $\eta \to -\infty$ и к $\varphi_3(x, C_0)$ при $\eta \to +\infty$.

IV. *Пусть однородное уравнение*

$$L_u(\varphi, \varphi, x, 0)\bar{u}_1(x) + \iint\limits_{\Omega} g_v(\varphi(x), \varphi(s), x, s, 0)\bar{u}_1(s) ds = 0$$

имеет только тривиальное решение, а интегральное неравенство

$$L_u(\varphi, \varphi, x, 0)\gamma(x) + \iint\limits_{\Omega} g_v(\varphi(x), \varphi(s), x, s, 0)\gamma(s) ds > 0$$

имеет положительное решение.

Наличие положительного решения гарантируется, например, выполнением следующего условия на нелинейность

$$\min_{\bar{\Omega}}[L_u(\varphi, \varphi, x, 0) - \mid L_v(\varphi, \varphi, x, 0) \mid] > 0,$$

где

$$L_v(\varphi, \varphi, x, 0) = \iint\limits_{\Omega} g_v(\varphi(x, C_0), \varphi(s, C_0), x, s, 0) ds,$$

в этом случае можно выбрать $\gamma(x) = C > 0$ (C - постоянная). Для обоснования построенного асимптотического решения ведущую роль играет развиваемый нами для нового класса задач асимптотический метод дифференциальных неравенств [4]. Для его применения нам потребуется некоторые дополнительные условия.

V. *Пусть функция $g(u, v, x, s, \varepsilon)$ является монотонно невозрастающей по переменной v при любом фиксированном значении переменной и из некоторой области ее значений.*

Используем известное определение нижнего и верхнего решений ([2]).

Определение. Функции $\alpha(x,\varepsilon)$ и $\beta(x,\varepsilon)$ называются упорядоченными нижним и верхним решениями задачи (1), (2) соответственно, если

$$\alpha(x,\varepsilon), \beta(x,\varepsilon) \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^1(\bar{\Omega} \backslash C) \cap C^2(\bar{\Omega}_e / \partial\Omega) \cap C^2(\bar{\Omega}_i),$$

$$\alpha(x,\varepsilon) \leq \beta(x,\varepsilon), x \in \bar{\Omega},$$

$$\varepsilon^2 \Delta\beta \leq L(\beta, \beta, x, \varepsilon), \varepsilon^2 \Delta\alpha \geq L(\alpha, \alpha, x, \varepsilon), x \in \Omega,$$

$$\frac{\partial}{\partial r^+}\alpha \bigg|_{x \in C} - \frac{\partial}{\partial r^-}\alpha \bigg|_{x \in C} \geq 0 \,, \frac{\partial}{\partial r^+}\beta \bigg|_{x \in C} - \frac{\partial}{\partial r^-}\beta \bigg|_{x \in C} \leq 0$$

$$\frac{\partial}{\partial n}\beta \bigg|_{x \in \partial\Omega} \leq 0 \leq \frac{\partial}{\partial n}\alpha \bigg|_{x \in \partial\Omega}$$

Ниже мы будем использовать следующую теорему о дифференциальных неравенствах [2, теорема 7.2].

Теорема. *Пусть существуют нижнее и верхнее решения $\alpha(x,\varepsilon)$ и $\beta(x,\varepsilon)$ задачи* (1), (2) *и выполнено условие V при $u \in [\alpha, \beta]$. Тогда существует решение задачи* (1), (2) *$u(x,\varepsilon)$ такое, что*

$$\alpha(x,\varepsilon) \leq u(x,\varepsilon) \leq \beta(x,\varepsilon).$$

Доказательство существования контрастной структуры проводится на основе конструктивного метода построения нижнего и верхнего решений. Функции $\beta(x,\varepsilon)$ и $\alpha(x,\varepsilon)$ представляются следующими выражениями

$$\beta(x,\varepsilon) = \bar{u}_0(x) + \varepsilon\bar{u}_{1\beta}(x) + P_0 u(\eta_\beta, l) + \varepsilon P_{1\beta} u(\eta_\beta, l) + \varepsilon^2 P^*_{1\beta} u(\eta_\beta, l, \varepsilon) +$$

$$+\varepsilon \Pi_1 u(\tau, m) + \varepsilon^2 \exp(-k\tau) D(\rho),$$

$$\alpha(x,\varepsilon) = \bar{u}_0(x) + \varepsilon\bar{u}_{1\alpha}(x) + P_0 u(\eta_\alpha) + \varepsilon P_{1\alpha} u(\eta_\alpha, l) + \varepsilon^2 P^*_{1\alpha} u(\eta_\alpha, l, \varepsilon) +$$
$$+\varepsilon \Pi_1 u(\tau, m) + \varepsilon^2 \exp(-k\tau) D(\rho),$$

где $\eta_\beta = (r - \varepsilon r_\beta(l))/\varepsilon$, $\eta_\alpha = (r - \varepsilon r_\alpha(l))/\varepsilon$, $r_\alpha(l) = r_1(l) + \delta$, $r_\beta(l) = r_1(l) - \delta$, $\bar{u}_{1\alpha}(x) = \bar{u}_1(x) - \gamma(x)$ и $\bar{u}_{1\beta}(x) = \bar{u}_1(x) + \gamma(x)$. Здесь $\bar{u}_1(x)$ - регулярный член первого порядка разложения (4), в котором функция $f(r,l)$ в первом случае заменена на r_α, а во втором на r_β, $\gamma(x) > 0$ - положительное решение неравенства из условия IV, $k > 0$ и $\delta > 0$ - некоторые постоянные. Функции $P_0 u(\eta_\beta, l)$ и $P_0 u(\eta_\alpha, l)$ находятся как решение задач для $P_0 u(\eta, l)$, в которых η заменено на η_β и η_α соответственно. Аналогично функции $P_{1\beta} u(\eta_\beta, l)$ и $P_{1\alpha} u(\eta_\alpha, l)$ есть решения задач для $P_1 u(\eta, l)$, где η заменено на η_β, r_1 на r_β и η заменено на η_α, r_1 на r_α соответственно. Функции $P_{1\beta} u(\eta_\beta, l)$ и $P_{1\alpha} u(\eta_\alpha, l)$ могут быть выписаны явно и имеют экспоненциальную оценку. В свою очередь, функции $P^*_{1\beta} u(\eta_\beta, l, \varepsilon)$ и $P^*_{1\alpha} u(\eta_\alpha, l, \varepsilon)$ выбираются из условия непрерывности $\beta(x,\varepsilon)$ и $\alpha(x,\varepsilon)$ на кривых C_β и C_α соответственно (под кривыми C_β и C_α понимаются кривые, уравнения которых отличаются от уравнения кривой C_* тем, что функция f заменяется на r_β и r_α соответственно), при этом $P^*_{1\beta}u$ и $P^*_{1\alpha}u$ являются решениями однородных уравнений для $P_{1\beta}u$ и $P_{1\alpha}u$. Функция $D(\rho)$ - срезающая функция. Для гладкого продолжения пограничных функций и функций переходного слоя на всю область Ω их также нужно умножать на соответствующие срезающие функции. Будем считать, что эта стандартная процедура, не изменяющая порядок и свойства асимптотики, выполнена (см. [3]). Отметим, что функции $\beta(x,\varepsilon)$ и $\alpha(x,\varepsilon)$ непрерывны во всей области $\bar{\Omega}$, но не являются гладкими (имеют скачок производной по нормали) на кривых C_β и C_α соответственно, где для них выполняется условие скачка производной с нужным знаком из определения верхнего и нижнего решений.

Тем же методом доказывается локальная единственность решения задачи (1), (2) и асимптотическая устойчивость по Ляпунову построенного асимптотического решения как стационарного решения соответствующей интегро-параболической краевой задачи

$$\partial u/\partial t = \varepsilon^2 \Delta u - L(u,u,x,\varepsilon)\,,\ x=(x_1,x_2)\in\Omega, \tag{4}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0 \tag{5}$$

с начальными условиями, лежащими в окрестности построенного асимптотического решения. Для доказательства предлагаются следующие барьерные функции

$$\tilde{\beta}(x,t,\varepsilon) = u_s + (\beta - u_s)\exp(-\lambda t),$$

$$\tilde{\alpha}(x,t,\varepsilon) = u_s + (\alpha - u_s)\exp(-\lambda t),$$

где u_s - стационарное решение задачи (4). Параметр $\lambda > 0$ - достаточно малый, зависящий от ε параметр. Результаты для случая грубой нелинейности можно сформулировать в виде следующих утверждений. Обозначим через $U_0(x,\varepsilon)$ частичную сумму нулевого порядка асимптотического ряда (4), в котором правая часть уравнения для кривой C_* заменена $\varepsilon r_1(l)$.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия I - V. Тогда для достаточно малыхε существует решение задачи (1), (2), удовлетворяющее неравенству*

$$\max_{\bar{\Omega}} |u(x,\varepsilon) - U_0(x,\varepsilon)| \le C\varepsilon.$$

Теорема 2. *При выполнении условий I -V и достаточно малых ε существует локально единственное асимптотически устойчивое стационарное решение u_s задачи (4), (5), удовлетворяющее неравенству*

$$\max_{\bar{\Omega}} |u_s - U_0(x,\varepsilon)| \le C\varepsilon.$$

В отличие от случая несбалансированной ("грубой") нелинейности, когда условие гладкости функции, описывающей внутренний переходный слой в нулевом приближении, являлось условием отбора кривой C_0, для сбалансированной нелинейности вместо условия III требуется выполнение следующего условия.

IIIa. *Пусть на любой простой замкнутой кривой $C_0 \in \Omega$ выполняется равенство*

$$J(x, C_0) = 0$$

при $x \in C_0$.

Условие IIIa обеспечивает возможность построения гладкой функции переходного слоя $\tilde{u}(\eta, l)$ на произвольной замкнутой кривой $C_0 \in \Omega$. Для любой замкнутой кривой C_0 введем следующую функцию

$$V(x, C_0) = -k(x, C_0)m(x) + F(x, C_0),$$

где

$$m(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\tilde{u}'_\eta)^2(\eta, l) d\eta,$$

$$F(x, C_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} (L_r \eta + L_\varepsilon)|_{u=\tilde{u}(\eta,l)} \tilde{u}_\eta d\eta.$$

IVa. *Пусть существует такая кривая $C_0 \in \Omega$*, что

$$V(x, C_0) \equiv 0$$

при $x \in C_0$.

Введем дифференциальный оператор

$$A^{C_0} R(l) \equiv \frac{\partial}{\partial l}(m|_{x\in C_0} \frac{\partial}{\partial l} R(l)) + G(l)R(l),$$

где

$$G(l) = -k(x_0, C_0)\; m_r|_{x\in C_0} + F_r(x_0, C_0)\;.$$

Va. *Пусть задача на собственные значения*

$$A^{C_0} R(l) = \lambda R(l),$$

с условием периодичности

$$R(l + l_0) = R(l),$$

имеет главное собственное значение $\lambda_0 < 0$.

Верхнее и нижнее решения для данного случая строятся аналогично тому, как это было проделано для случая "грубой"нелинейности, но в качестве $r_\beta(l)$ и $r_\alpha(l)$ берутся следующие функции

$$r_\alpha(l) = r_1(l) + \delta(l),$$

$$r_\beta(l) = r_1(l) - \delta(l),$$

где $\delta(l)$ - положительное решение неравенства

$$A^{C_0}\delta(l) < 0.$$

Заметим, что выполнение требования Va гарантирует существование таких решений. Сформулируем полученные результаты.

Теорема 3. *При выполнении условий I, II, IIIa - Va задача (1), (2) имеет решение, имеющее предельный вид (3).*

Теорема 4. *Решение указанного в теореме 3 типа является асимптотически устойчивым стационарным решением следующей интегро-параболической задачи*

$$\partial u/\partial t = \varepsilon^2 \Delta u - L(u, u, x, \varepsilon)\,,\ x = (x_1, x_2) \in \Omega,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0.$$

1. *Нефедов Н.Н., Никитин А.Г.* Развитие асимптотического метода дифференциальных неравенств для решений типа ступеньки в сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных уравнениях // ЖВМ и МФ, 2001, т.41, № 7, с. 1057 -1066.
2. *Pao C.V.* Nonlinear parabolic and elliptic equations. New York and London, 1992. *Нефедов Н.Н., Никитин А.Г.* Метод дифференциальных неравенств для сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения, 2000, т. 36, № 10, с. 1398-1404.
3. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М., 1990.
4. *Нефедов Н.Н.* Метод дифференциальных неравенств для некоторых сингулярно возмущенных задач с внутренними слоями // Дифференциальные уравнения, 1995, т. 31, № 7, с. 1132-1139.

Ленинские горы, МГУ, физический факультет
119992, Москва, Россия
nefedov@phys.msu.su
nikitin@singul.phys.msu.su

Получено 15.12.2005