©2006. **Галина Лопушанська**

КРАЙОВІ ЗНАЧЕННЯ ІЗ $(C^\infty)'$ РОЗВ'ЯЗКІВ НАПІВЛІНІЙНИХ ЕЛІПТИЧНИХ РІВНЯНЬ

Встановлено розв'язність нормальної крайової задачі для еліптичного рівняння $Au = \mu|u|^q$ ($q > 0$, $\mu \in L_\infty$) порядку $2m$ в обмеженій області $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ з заданими на її межі узагальненими функціями із простору $(C^\infty)'$ та знайдено характер степеневих особливостей розв'язку.

Ключові слова: напівлінійне еліптичне рівняння, нормальна еліптична крайова задача, ваговий функціональний простір, узагальнена функція, функція Гріна, нелінійне інтегральне рівняння.
MSC (2000): 35J40, 35J60

У [1] на основі теорем про гомеоморфізми [2] встановлено розв'язність у просторах Соболєва загальних крайових задач для квазілінійних еліптичних рівнянь (з нульовими крайовими даними), а за певної структури нелінійної частини також регулярність розв'язку (розв'язність у повній шкалі соболєвських просторів).

У [3]-[9] та інших працях досліджується природа крайових значень розв'язків напівлінійних еліптичних рівнянь. У [3] доведено існування розв'язку задачі

$$Au = \mu(x)f(u), \; u > 0 \; x \in \Omega, \; u\,|_{\partial\Omega} = \infty,$$

який при $0 < \mu_1 \leq \mu(x) \leq \mu_2$, $f(u) = u^q, q > 1$ має асимптотику $O([dist(x, \partial\Omega)]^{-\frac{2}{q-1}})$ біля $\partial\Omega$, розв'язок єдиний при $q \geq 3$. Розв'язність задачі при $f(u) = u^2$ була встановлена в [4], а для рівняння $\Delta u = e^u$ – у працях Радемахера (1943 р.) та Бібербаха (1916).

У [5] для $q \in (1, q_c)$, $q_c = \frac{n+1}{n-1}$, у [6] для $q = 2$, у [7] для $q \in [q_c, 2]$, у [8] для $q > q_c$ (в т.ч. для $q > 2$) встановлена однозначна розв'язність задачі

$$\Delta u = |u|^{q-1}u, x \in \Omega, \; u\,|_{\partial\Omega} = g.$$

для довільної g із простору $\mathcal{M}(\partial\Omega)$ обмежених мір Бореля на $\partial\Omega$. Також встановлено, що для розв'язності цієї задачі ($g \in \mathcal{M}(\partial\Omega)$) у випадку $q \geq q_c$ необхідно і досить, щоб $g = 0$ на кожній такій борелевій множині E на $\partial\Omega$, для якої $C_{\frac{2}{q},q'}(E) = 0$ (остання умова рівнозначна умові $E = \emptyset$, якщо $q \in (1, q_c)$), зазначено, що при $q \geq 1 + \frac{2}{n-1}$ крайових значень-мір може не існувати.

У [10] доведено, що розв'язок лінійного однорідного рівняння набуває узагальнених крайових значень із простору $(C^\infty)'$ тоді і тільки тоді, коли він належить до певного вагового L_1-простору. Новий метод дослідження рівнянь з даними-мірами та крайових задач для нелінійних рівнянь у L_1- просторах запропонований у [11]-[17].

На основі вивчення лінійних крайових задач у просторах узагальнених функцій [10] розвинуто метод дослідження крайових задач для напівлінійних та квазілінійних з головною лінійною частиною еліптичних та параболічних рівнянь при інших, ніж у [11]-[17], випадках нелінійності та при заданих на межі області узагальнених функціях. Зокрема можна одержати умови, за яких регулярний всередині області розв'язок напівлінійного еліптичного рівняння набуває на межі S узагальнених значень $F \in (C^\infty(S))'$ та з ширших класів узагальнених функцій на S. Такі дослідження для еліптичних рівнянь 2-го порядку при крайових даних із $(C^\infty(S))'$ проведені в [18, 19], а у ширших просторах узагальнених функцій – у [10, 20].

З результатів [19] випливає, зокрема, розв'язність задачі

$$\Delta u = |u|^q, x \in \Omega,\ u\mid_{\partial\Omega} = g$$

у певному ваговому L_1-просторі при довільній узагальненій функції $g \in (C^\infty(S))'$ та $q \in (0, q_0)$, де $q_0 \in (0,1)$ та залежить від порядку сингулярності функції g.

У даній публікації знаходимо достатні умови розв'язності нормальної крайової задачі для напівлінійного еліптичного рівняння $Au = \mu|u|^q$ ($\mu \in L_\infty(\Omega)$, $q > 0$) в обмеженій області $\Omega \subset R^n$, $n \geq 3$ у класах функцій степеневого росту в окремих точках межі S області та на всій межі. Встановлюємо, в якому сенсі розв'язок рівняння набуває на межі заданих узагальнених крайових значень із $(C^\infty(S))'$ та залежність між порядками сингулярностей ([21], с.23) крайових значень розв'язку та числом q.

Використовуємо метод зведення такої узагальненої крайової задачі до еквівалентного інтегрального рівняння у ваговому L_1-просторі функцій з особливостями на межі області. Інтегродиференціальні рівняння у вагових L_1-просторах функцій з точковими особливостями в області досліджені у [22].

1. Позначення та формулювання задачі.

Нехай Ω – обмежена область в R^n з межею $\partial\Omega = S$ класу C^∞, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ – мультиіндекс, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, $D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$. В області Ω задано еліптичний диференціальний оператор $A(x, D) = \sum\limits_{|\alpha| \leq 2m} a_\alpha(x) D^\alpha$ порядку $2m$, вважаємо $a_\alpha \in C^\infty(\overline{\Omega})$. На межі задані крайові диференціальні вирази $B_j(x, D) = \sum\limits_{|\alpha| \leq m_j} b_{j\alpha}(x) D^\alpha$ порядків $m_j \leq 2m - 1$, $b_{j\alpha} \in C^\infty(S)$, $j = \overline{1, m}$, система $\{B_j(x, D)\}_{j=1}^m$ є нормальною і задовольняє умову Лопатинського щодо $A(x, D)$.

Існують (наприклад, [23, с. 139-146]) такі диференціальні вирази $T_j, \hat{B}_j, \hat{T}_j$ відповідно порядків $2m - m_j - 1, \hat{m}_j, 2m - \hat{m}_j - 1$ з нескінченно диференційовними коефіцієнтами на S, що правильна формула Гріна

$$\int\limits_\Omega (vAu - uA^*v)dx = \sum_{j=1}^m \int\limits_S (\hat{B}_j v \cdot T_j u - \hat{T}_j v \cdot B_j u) dS,\ \ u, v \in C^\infty(\overline{\Omega}).$$

Тут A^* – оператор, формально спряжений до оператора A.

Нехай $\hat{x}$ –довільна точка на S, $\varrho(\cdot, \hat{x})$ – визначена і нескінченно диференційовна в $\overline{\Omega}$ функція, додатна в $\overline{\Omega} \setminus \{\hat{x}\}$ і така, що має порядок функції $|\cdot - \hat{x}|$ в околі $\hat{x}$. Надалі вважатимемо $\varrho(x, \hat{x}) \leq 1$.

Нехай ε_1 – таке додатне число, що паралельні до S поверхні $S_\varepsilon \subset \Omega$ при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$ також є класу C^∞, Ω_ε – підобласть Ω, що має межею S_ε.

Позначаємо через $\varrho(x) = \varrho_1(d(x)))$ функцію, що є нескінченно диференційовною в $\overline{\Omega}$, додатною всередині Ω, має порядок функції $d(x) = dist(x, S)$ біля S та $\varrho(x) \leq 1$, $x \in \overline{\Omega}$, $\varrho(x) = 1$, $x \in \Omega_{\varepsilon_1}$.

Для $k, l \in R$, подібно до [10], p.2, визначаємо такі функціональні простори:

$X_k(\overline{\Omega}, \hat{x}) = \{\varphi \in C^\infty(\overline{\Omega} \setminus \hat{x}) : A^*\varphi(\hat{x}) = O(\varrho^k(x, \hat{x})), |x - \hat{x}| \to 0\ \forall \hat{x} \in \hat{x},\ \hat{B}_j \varphi\mid_S = 0,\ j = \overline{1, m}\}$,

$M_k(\Omega, \hat{x}) = \{v \in L_{1,loc}(\Omega) : ||v||_k = \int\limits_\Omega \varrho^k(x, \hat{x})|v(x)|dx < +\infty\}$,

$\tilde{M}_l(\Omega,\hat{x}) = \{v \in C(\overline{\Omega}\setminus\hat{x}) : \varrho^{-l}(\cdot,\hat{x})v \in C(\overline{\Omega})\}$, $||v||'_{\tilde{M}_l(\Omega,\hat{x})} = ||v||'_l = \sup\limits_{x\in\overline{\Omega}} \varrho^{-l}(x,\hat{x})|v(x)|.$

$X_k(\overline{\Omega}) = \{\varphi \in C^\infty(\Omega) : A^*\varphi(x) = O(\varrho^k(x))$ при $d(x)\to 0,\ \hat{B}_j\varphi\mid_S = 0,\ j=\overline{1,m}\}$,

$M_k(\Omega) = \{v \in L_{1,loc}(\Omega) : ||v||_k = \int\limits_\Omega \varrho^k(x)|v(x)|dx < +\infty\}$,

$\tilde{M}_l(\Omega) = \{v \in C(\Omega) : \varrho^{-l}v \in C(\overline{\Omega})\}$,

$$||v||'_{\tilde{M}_l(\Omega)} = ||v||'_l = \sup_{x\in\overline{\Omega}} \varrho^{-l}(x)|v(x)| = \sup_{\xi\in(0,\varepsilon_1]}[\varrho_1^{-l}(\xi)\sup_{d(x)\geq\xi}|v(x)|].$$

Збіжність послідовності функцій $v_r, r\to\infty$ у просторі $\tilde{M}_l(\Omega,\hat{x})$ еквівалентна рівномірній збіжності на $\overline{\Omega}$ послідовностей функцій $\varrho^{-l}(x,\hat{x})|v_r(x)|,\ r\to\infty$. Зауважимо також, що $\tilde{M}_l(\Omega,\hat{x}) \subset M_k(\Omega,\hat{x})$ при $k+l>-n$.

В [10, лема 2.8] доведено, що для довільних $k\in Z_+$ та $k\in R,\ k>\max\limits_{1\leq j\leq m}(m_j-2m)$ простори $X_k(\overline{\Omega})$ та $X_k(\overline{\Omega},\hat{x})$ відповідно непорожні.

Використовуватимемо позначення:

$D(\overline{\Omega}) = C^\infty(\overline{\Omega})$,
$D(S) = C^\infty(S)$,
$\Phi'(S)$ – простір лінійних неперервних функціоналів (узагальнених функцій) на $\Phi(S)$,
$<\varphi,F>$ – значення узагальненої функції $F\in\Phi'(S)$ на основній функції $\varphi\in\Phi(S)$;
$s(F)\leq p\ \ (c(F)\leq p)$ – порядок сингулярності (c-сингулярності) узагальненої функції F не вищий p, тобто

$$<\varphi,F> = \int\limits_S \sum_{|\alpha|\leq p} D^\alpha\varphi f_\alpha dS \text{ для довільної } \varphi\in D(S),$$

де

$f_\alpha \in L_1(S)(C(S)),\ |\alpha|\leq p,$ якщо $p\in Z_+$
та $D^\alpha f\in L_1(S)(C(S))$ для всіх $\alpha, |\alpha|\leq -p,$ якщо $p\in Z_-$,

$D'_p(S) = \{F\in D'(S) : s(F)\leq p\}$.

При $\mu\in L_\infty(\Omega),\ q>0,\ F_j\in D'_{p_j}(S),\ j=\overline{1,m}$ розглядаємо крайову задачу

$$A(x,D)u(x) = \mu(x)|u(x)|^q,\ x\in\Omega, \tag{1}$$

$$B_j(x,D)u(x) = F_j(x),\ x\in S,\ j=\overline{1,m}. \tag{2}$$

Припущення (A). Відповідна задачі (1),(2) лінійна однорідна крайова задача має лише тривіальний розв'язок.

ОЗНАЧЕННЯ. *Розв'язком задачі (1),(2) у просторі $M_k(\Omega,\hat{x})$ ($M_k(\Omega)$) називається така функція $u\in M_k(\Omega,\hat{x})$ ($M_k(\Omega)$), що*

$$\int\limits_\Omega \psi\mu|u|^q dx < +\infty\quad \forall\psi\in X_k(\overline{\Omega},\hat{x})(X_k(\overline{\Omega})), \tag{3}$$

$$\int\limits_\Omega A^*\psi u dx = \int\limits_\Omega \psi\mu|u|^q dx + \sum_{j=1}^m <\hat{T}_j\psi, F_j> \quad \forall\psi\in X_k(\overline{\Omega},\hat{x})(X_k(\overline{\Omega})). \tag{4}$$

Як у [10] (теорема 1.4), доводиться, що для функції $u \in M_k(\Omega,\hat{x}) \cap C^{2m}(\Omega)$ $(u \in M_k(\Omega) \cap C^{2m}(\Omega))$, яка є регулярним розв'язком рівняння (1) всередині Ω, $B_j u$ набувають на S узагальнених крайових значень $F_j \in D'(S)$, тобто

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{S_\varepsilon} \varphi B_j u dS = <\varphi, F_j> \ \ \forall\varphi \in D(S),\ j=\overline{1,m},$$

тоді і тільки тоді, коли функція u задовольняє умову (3) при $k > s_0 - 1$. Звідси випливає, що за умови (3) формулювання задачі (1),(2) для регулярного всередині Ω розв'язку не залежить від вибору операторів $\hat{T}_j, \hat{B}_j,\ j=\overline{1,m}$. Цей факт також випливає з теореми існування розв'язку задачі.

Нехай $G(x,y) = (G_0(x,y), G_1(x,y), \ldots, G_m(x,y))$ – вектор-функція Гріна задачі (1), (2) [24,25]. За припущення (A) функція $G_0(x,y)$ визначена однозначно,

$$G_j(x,y) = \hat{T}_j(y,D)G_j(x,y),\ j=\overline{1,m}.$$

Аналогічно до [10, с. 86], враховуючи формули (2.1) із [10, с. 70], доводиться

Теорема 1. *Функція $u \in M_k(\Omega,\hat{x})$ $(M_k(\Omega))$ є розв'язком задачі (1),(2) у просторі $M_k(\Omega,\hat{x})$ $(M_k(\Omega))$ тоді і тільки тоді, коли вона є розв'язком у просторі $M_k(\Omega,\hat{x})$ $(M_k(\Omega))$ інтегрального рівняння*

$$u(x) = \int\limits_\Omega G_0(x,y)\mu(y)|u(y)|^q dy + \sum_{j=1}^m < G_j(x,y), F_j(y)>,\ x\in\Omega. \qquad (5)$$

2. Розв'язок інтегрального рівняння.

Нехай $r \in R$, $r+n>0$, функція $K(x,y)$ визначена при $(x,y) \in \overline{\Omega}\times\overline{\Omega}$, $x \neq y$, має неперервні похідні до порядку $s < r+n$ при $x\neq y$, а в околі діагоналі $x=y$ для довільних мульти-індексів α,γ, $|\alpha|+|\gamma| < r+n$ правильні оцінки

$$|D_x^\alpha D_y^\gamma \mathcal{K}(x,y)| \le A_{\alpha,\gamma}(|x-y|^{r-|\alpha|-|\gamma|} + \kappa_{r-|\alpha|-|\gamma|}|ln|x-y|| + 1), \qquad (6)$$

де $A_{\alpha,\gamma} = const > 0$, $\kappa_s \neq 0$ тільки при $s=0$, $\kappa_0 = 1$. Вважаємо далі $A_{\alpha,\gamma} = A$ для $|\alpha| = |\gamma| = 0$.

Лема 1. *Правильні оцінки*

$$\int\limits_\Omega |D_x^\alpha D_y^\gamma \mathcal{K}(x,y)|\varrho^s(y,\hat{x})dx \le C'_{s\alpha}(\varrho^{s+r+n-|\alpha|}(y,\hat{x})+1),\ y\in\overline{\Omega}, \hat{x}\in\hat{x},\ |\alpha+\gamma| < r+n, s > -n,$$

$$\int\limits_\Omega |D_x^\alpha D_y^\gamma \mathcal{K}(x,y)|\varrho^s(x)dx \le C''_{s\alpha}(\varrho^{s+r+1-|\alpha|}(y)+1),\ y\in\overline{\Omega}, -1<s<0,\ |\alpha+\gamma| < r+1, s > -1,$$

де $C'_{s\alpha}$, $C''_{s\alpha}, \tilde{C}'_{s,\alpha}, \tilde{C}''_{s,\alpha}$ – додатні сталі.

Лема доводиться як лема 3 у [20]. Далі $C'_{s\alpha} = C'_s$, $C''_{s\alpha} = C''_s$ для $|\alpha| = 0$.

При $g \in \tilde{M}_l(\Omega, \hat{x})$ $(\tilde{M}_l(\overline{\Omega}))$, $\mu \in L_\infty(\Omega)$, $q > 0$ розглянемо інтегральне рівняння

$$u(x) = \int\limits_{\Omega} \mathcal{K}(x,y)\mu(y)|u(y)|^q dy + g(x),\ x \in \Omega. \tag{7}$$

Із розв'язності рівняння (7) у просторі $\tilde{M}_l(\Omega, \hat{x})$ $(\tilde{M}_l(\overline{\Omega}))$ при $k+l > -n$ $(k+l > -1)$ випливає його розв'язність у $M_k(\Omega, \hat{x})$ $(M_k(\Omega))$.

Лема 2. *При $q \in (0,1)$, $-\frac{n}{q} < l \le 0$ для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, що для довільної області $\omega \subset \Omega$, міра якої $m(\omega) \le \delta$, виконується*

$$I = \sup_{x\in\overline{\Omega}} \int\limits_{\Omega} \varrho^{-l}(x,\hat{x})|\mathcal{K}(x,y)|\varrho^{lq}(y,\hat{x})dy \le \varepsilon.$$

Доведення. Введемо позначення $\tilde{\mathcal{K}}(x,y,\hat{x}) = \varrho^{-l}(x,\hat{x})|\mathcal{K}(x,y)|\varrho^{lq}(y,\hat{x})$.

Нехай $r \in (-n, 0)$, $\hat{x} \in S$. При $|x-\hat{x}| \le d < 1$, розділяючи особливості функції $\tilde{\mathcal{K}}(x,y,\hat{x})$, як при доведенні леми 3 у [20], встановлюємо існування такої сталої $a' > 0$, що

$$I_1(d) = \sup_{x\in\overline{\Omega}:|x-\hat{x}|\le d<1} \int\limits_{\omega\cap\{y:|y-\hat{x}|<d\}} \tilde{\mathcal{K}}(x,y,\hat{x})dy \le a'd^{-l(1-q)+r+n}.$$

За заданим $\varepsilon > 0$ вибираємо $d_0 < (\frac{\varepsilon}{2a'})^{\frac{1}{-l(1-q)+r+n}}$. Тоді

$$I = I_1(d_0) + I_2(d_0) = I_1(d_0) +$$

$$+ \sup_{x\in\overline{\Omega}:|x-\hat{x}|\le d_0<1} \int\limits_{\omega\cap\{y:|y-\hat{x}|>d_0\}} \tilde{\mathcal{K}}(x,y,\hat{x})dy \le (a' + a''m(\omega))d_0^{-l(1-q)+r+n},\ a'' = const > 0.$$

Вибираючи $\delta > 0$ так, щоб $a''\delta d_0^{-l(1-q)+r+n} \le \frac{\varepsilon}{2}$, при $m(\omega) \le \delta$ одержуємо $I \le \varepsilon$.

При $|x-\hat{x}| > d_0$ подібно встановлюємо існування такої сталої $b' > 0$, що

$$I \le b'd_0^{lq+n}(1 + d_0^r m(\omega)) \text{ при } lq \le r,$$

$$I \le b'd_0^{r+n}(1 + d_0^{lq} m(\omega)) \text{ при } lq > r.$$

Звідси одержуємо залежність δ від заданого числа ε.

У випадку $r \ge 0$ твердження леми випливає з властивостей рівномірно збіжних інтегралів.

Припущення (Б). При $q \ge 1$ вважаємо $\mu_0 = \sup\limits_{x\in\Omega}|\mu(x)| < \hat{\mu}_0 = \hat{\mu}_0(q,l)$, де $\hat{\mu}_0 = \frac{1}{2C'_l}$ для $q = 1$, $\hat{\mu}_0 = \frac{(1-\frac{1}{q})^{q-1}}{2^{3-q}C'_{lq}C_1^{q-1}q}$ для $q > 1$, $\hat{\mu}_0 = \frac{(1-\frac{1}{q})^{q-1}}{2C'_{lq}C_1^{q-1}q} > \frac{(1-\frac{1}{q})^{q-1}}{2^{3-q}C'_{lq}C_1^{q-1}q}$ для $q \ge 2$, $\quad C_1 = ||g||'_l$.

Теорема 2. *Нехай*

$-\frac{n}{q} < l \le 0$ для всіх $q > 0$ при $r \ge 0$ та для $0 < q \le \frac{n}{-r}$ при $r \in (-n, 0)$,

$-\frac{r+n}{q-1} \le l \le 0$ при $q > \frac{n}{-r}$, $r \in (-n, 0)$, виконується припущення (Б).

Тоді існує розв'язок $u \in \tilde{M}_l(\Omega,\hat{x})$ інтегрального рівняння (7), єдиний при $q=1$.

Доведення. Нехай

$$(Pu)(x) = \int\limits_{\Omega} \mathcal{K}(x,y)\mu(y)|u(y)|^q dy + g(x),\ x \in \Omega.$$

Тоді рівняння (7) записується у вигляді $u = Pu$ і для доведення його розв'язності використаємо при $q \geq 1$ принцип стискуючих відображень, а при $q \in (0,1)$ принцип Шаудера [26].

При $v \in \tilde{M}_l(\Omega,\hat{x})$ розглянемо

$$||Pv||'_l = \sup_{x\in\overline{\Omega}} \varrho^{-l}(x,\hat{x})|(Pv)(x)| \leq \sup_{x\in\overline{\Omega}} \varrho^{-l}(x,\hat{x})|\int\limits_{\Omega} \mathcal{K}(x,y)\mu(y)|v(y)|^q dy| + C_1 \leq$$

$$\mu_0 \sup_{x\in\leq\overline{\Omega}} \varrho^{-l}(x,\hat{x}) \int\limits_{\Omega} |\mathcal{K}(x,y)|\varrho^{lq}(y,\hat{x})(\sup_{y\in\Omega} \varrho^{-l}(y,\hat{x})|v(y)|)^q dy + C_1 =$$

$$= \mu_0(||v||'_l)^q \sup_{x\in\overline{\Omega}} \varrho^{-l}(x,\hat{x}) \int\limits_{\Omega} |\mathcal{K}(x,y)|\varrho^{lq}(y,\hat{x})dy + C_1.$$

За лемою 1 при $lq > -n$ одержуємо

$$||Pv||'_l \leq \mu_0(||v||'_l)^q C'_{lq} \sup_{x\in\overline{\Omega}} \varrho^{-l}(x,\hat{x})[\varrho^{lq+r+n}(x,\hat{x})+1] + C_1.$$

Припускаючи, що

$$-l \geq 0,\ l(q-1)+r+n \geq 0, \qquad lq > -n, \tag{8}$$

за позначення $A_{lq} = 2\mu_0 C'_{lq}$ матимемо

$$||Pv||'_l \leq A_{lq}(||v||'_l)^q + C_1 < +\infty,\ v \in \tilde{M}_l(\Omega,\hat{x}). \tag{9}$$

За умов теореми, (8) виконується.

Нехай $\tilde{M}_{l,C}(\Omega,\hat{x}) = \{v \in \tilde{M}_l(\Omega,\hat{x}) : ||v||'_l \leq C\}$. Це куля в $\tilde{M}_{l,C}(\Omega,\hat{x})$. Покажемо існування такої сталої $C > 0$, що $P : \tilde{M}_{l,C}(\Omega,\hat{x}) \to \tilde{M}_{l,C}(\Omega,\hat{x})$.

Із (9) одержуємо

$$||Pv||'_l \leq A_{lq}C^q + C_1,\ v \in \tilde{M}_{l,C}(\Omega,\hat{x}). \tag{10}$$

Якщо $q \in (0,1)$, то для довільних додатних A_{lq}, C_1 існує така стала $C_0 > 0$, що $A_{lq}C^q + C_1 < C$ при $C > C_0$. Тоді з (10) матимемо

$$P : \tilde{M}_{l,C}(\Omega,\hat{x}) \to \tilde{M}_{l,C}(\Omega,\hat{x}) \text{ при } q \in (0,1) \text{ та } C > C_0.$$

Якщо $q = 1$, то $A_l C + C_1 < C \Leftrightarrow C_1 < (1-A_l)C \Leftrightarrow C > \frac{C_1}{1-A_l} = C_0$ при $A_l < 1$. Умова $A_l < 1$ виконується за обмежень (Б) на значення μ_0 та при $-n < l < 0$. Отже, із (10) при $q = 1$, $\mu_0 < \frac{1}{2C'}$ та $C > \frac{C_1}{1-A_l}$ також матимемо $P : \tilde{M}_{l,C}(\Omega,\hat{x}) \to \tilde{M}_{l,C}(\Omega,\hat{x})$.

При $q > 1$ для існування таких додатних C, що

$$A_{lq}C^q + C_1 < C \tag{11}$$

достатньо (див.[26, с.320]) існування $\min\limits_{0\le t<+\infty}(A_{lq}t^q - t) < -C_1$. Далі покажемо, що за припущення (Б) такі сталі існують.

Для довільних $v_1, v_2 \in \tilde{M}_l(\Omega,\hat{x})$ розглянемо

$$||Pv_1 - Pv_2||_l' = \sup_{x\in\overline{\Omega}} \varrho^{-l}(x,\hat{x})|\int\limits_{\Omega} \mathcal{K}(x,y)\mu(y)[|v_1(y)|^q - |v_2(y)|^q]dy|.$$

При $q\in(0,1]$, $v_1, v_2 \in \tilde{M}_l(\Omega,\hat{x})$ матимемо

$$||Pv_1 - Pv_2||_l' \le \mu_0 \max_{\hat{x}\in S}\max_{x\in\overline{\Omega}} \varrho^{-l}(x,\hat{x}) \int\limits_{\Omega} |\mathcal{K}(x,y)||v_1(y)-v_2(y)|^q dy \le A_{lq}[||v_1-v_2||_l']^q,$$

а отже, оператор P неперервний на всьому просторі $\tilde{M}_l(\Omega,\hat{x})$, стиснений при $q=1$ та $A_l<1 \Leftrightarrow \mu_0 < \frac{1}{2C'}$.

При $q>1$, $v_1, v_2 \in \tilde{M}_{l,C}(\Omega,\hat{x})$, де l задовольняє (8), матимемо

$$||Pv_1 - Pv_2||_l' \le \mu_0 a(q)\max[(||v_1||_l')^{q-1}, (||v_2||_l')^{q-1}]\times$$

$$\times \sup_{x\in\overline{\Omega}} \varrho^{-l}(x,\hat{x}) \int\limits_{\Omega} |\mathcal{K}(x,y)|\varrho^{lq}(y,\hat{x})\cdot\varrho^{-l}(y,\hat{x})|v_1(y)-v_2(y)|dy \le$$

$$\le \mu_0 a(q) C^{q-1} \sup_{x\in\overline{\Omega}} \varrho^{-l}(x,\hat{x}) \int\limits_{\Omega} |\mathcal{K}(x,y)|\varrho^{lq}(y,\hat{x})dy||v_1-v_2||_l',$$

де $a(q) = 2^{2-q}q$ при $q\in(1,2)$, $a(q)=q$ при $q\ge 2$ (див. [27, с. 48]), звідки за лемою 1

$$||Pv_1 - Pv_2||_l' \le a(q)A_{lq}C^{q-1}||v_1-v_2||_l',\ v_1, v_2 \in \tilde{M}_{l,C}(\Omega,\hat{x}), \tag{12}$$

а отже, P - неперервний на $\tilde{M}_{l,C}(\Omega,\hat{x})$.

Якщо існує така стала C, що $A_{lq}\frac{a(q)}{q}C^q + C_1 < C$, то, враховуючи нерівність $a(q)\ge q$, також матимемо $A_{lq}C^q + C_1 \le A_{lq}\frac{a(q)}{q}C^q + C_1 < C$, тобто (11). Покажемо існування $\min\limits_{0\le t<+\infty}\hat{f}(t) < -C_1$, де $\hat{f}(t) = A_{lq}\frac{a(q)}{q}t^q - t$. Число $\hat{C} = (A_{lq}a(q))^{-\frac{1}{q-1}}$ є точкою мінімуму функції $\hat{f}(t)$. Знаходимо

$$\hat{f}(\hat{C}) = \hat{C}(A_{lq}\tfrac{a(q)}{q}\hat{C}^{q-1} - 1) = \hat{C}(A_{lq}\tfrac{a(q)}{q}\tfrac{1}{A_{lq}a(q)} - 1) = -\hat{C}(1-\tfrac{1}{q});$$

$$-\hat{C}(1-\tfrac{1}{q}) < -C_1 \Leftrightarrow \hat{C} > C_1\tfrac{q}{q-1} \Leftrightarrow (A_{lq}a(q))^{-\frac{1}{q-1}} > C_1\tfrac{q}{q-1} \Leftrightarrow \mu_0 < \frac{(1-\frac{1}{q})^{q-1}}{2C_{lq}'C_1^{q-1}a(q)} = \hat{\mu}_0.$$

Отже, при $\mu_0 < \mu_0' = \frac{(1-\frac{1}{q})^{q-1}}{2C_{lq}'C_1^{q-1}q}$ для $q\ge 2$ та при $\mu_0 < \hat{\mu}_0 \le \mu_0'$ для всіх $q>1$ існує таке $C>0$, що $P: \tilde{M}_{l,C}(\Omega,\hat{x}) \to \tilde{M}_{l,C}(\Omega,\hat{x})$.

Оскільки $a(q)A_{lq}C^{q-1} < 1 \Leftrightarrow C^{q-1} < (A_{lq}a(q))^{-1} = \hat{C}^{q-1} \Leftrightarrow C < \hat{C} \le (A_{lq}q)^{\frac{1}{q-1}} = \tilde{C}_0$, то за властивостями функції $\hat{f}$ для всіх $q>1$ при $\mu_0<\hat{\mu}$ існують такі значення C, які задовольняють (11) та при яких оператор P є стисненим на $\tilde{M}_{l,C}(\Omega,\hat{x})$. За принципом стискуючих відображень одержуємо розв'язність рівняння (7) у $\tilde{M}_l(\Omega,\hat{x})$ при $q\ge 1$, однозначну розв'язність при $q=1$.

У випадку $q \in (0,1)$ використовуватимемо принцип Шаудера. Було показано неперервність оператора P на $\tilde{M}_{l,C}(\Omega,\hat{x})$, а також, що $P:\tilde{M}_{l,C}(\Omega,\hat{x}) \to \tilde{M}_{l,C}(\Omega,\hat{x})$ при $C > C_0$. Доведемо компактність оператора P на $\tilde{M}_{l,C}(\Omega,\hat{x})$, тобто відносну компактність множини $\{Pu : u \in \tilde{M}_{l,C}(\Omega,\hat{x})\}$ в $\tilde{M}_l(\Omega,\hat{x})$.

Із (10) випливає рівномірна обмеженість $||Pv||'_l$ на $\tilde{M}_{l,C}(\Omega,\hat{x})$. Покажемо одностайну неперервність множини $\{Pv : v \in \tilde{M}_{l,C}(\Omega,\hat{x})\}$ в $\tilde{M}_l(\Omega,\hat{x})$. Вважаємо $\varrho(x+z,\hat{x}) = 0$, якщо $x+z \notin \Omega$. При $x,z \in \Omega$, $v \in \tilde{M}_l(\Omega,\hat{x})$

$$||(Pv)(x+t)-(Pv)(x)||'_l = \sup_{x\in\overline{\Omega}} |\varrho^{-l}(x+z,\hat{x})(Pv)(x+z) - \varrho^{-l}(x,\hat{x})(Pv)(x)| \leq$$

$$\leq \mu_0 \sup_{x\in\overline{\Omega}} \{\int_{\Omega} |\varrho^{-l}(x+z,\hat{x})\mathcal{K}(x+z,y) - \varrho^{-l}(x,\hat{x})\mathcal{K}(x,y)||v(y)|^q dy +$$

$$+|\varrho^{-l}(x+z,\hat{x})g(x+z) - \varrho^{-l}(x,\hat{x})g(x)|\} \leq \sup_{x\in\overline{\Omega}} |\varrho^{-l}(x+z,\hat{x})g(x+z) - \varrho^{-l}(x,\hat{x})g(x)| +$$

$$\mu_0 C^q \sup_{x\in\overline{\Omega}} \int_{\Omega} |\varrho^{-l}(x+z,\hat{x})\mathcal{K}(x+z,y) - \varrho^{-l}(x,\hat{x})\mathcal{K}(x,y)|\varrho^{lq}(y,\hat{x})dy = J_1(z) + J_2(z).$$

Із рівномірної неперервності функції $\varrho^{-l}(x,\hat{x})g(x)$ $(x \in \overline{\Omega})$ випливає існування для довільного $\varepsilon > 0$ такого $\delta' = \delta'(\varepsilon) > 0$, що для довільних $x \in \overline{\Omega}, z \in \Omega, |z| \leq \delta', \hat{x} \in S$ виконується $J_1(z) \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Нехай $\tilde{\mathcal{K}}(x,y,\hat{x}) = \varrho^{-l}(x,\hat{x})\mathcal{K}(x,y)\varrho^{lq}(y,\hat{x})$.

За лемою 2 для довільного $\varepsilon > 0$ існує $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon) > 0$, існує відповідне η_0, такі що $m(\Omega \setminus \Omega_{\eta_0}) \leq \delta_0$ та для всіх $z \in \Omega$

$$I_{21}(z) = \mu_0 C^q \sup_{x\in\overline{\Omega}} \int\limits_{\Omega\setminus\Omega_{\eta_0}} |\tilde{\mathcal{K}}(x,y,\hat{x})|dy + \mu_0 C^q \sup_{x\in\overline{\Omega}} \int\limits_{\Omega\setminus\Omega_{\eta_0}} |\tilde{\mathcal{K}}(x+z,y,\hat{x})|dy \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

Вибираємо також $\eta_0 < (\frac{\varepsilon}{4L_0\mu_0C^q})^{\frac{1}{-l(1-q)}}$, де $L_0 = \sup\limits_{x\in\overline{\Omega}} \int\limits_{\Omega} |\mathcal{K}(x,y)|dy$.

Далі через ω^z позначаємо зсув множини ω на вектор z. Зрозуміло, що $m^z(\omega) = m^{-z}(\omega) = m(\omega)$. Нехай σ_n – площа поверхні одиничної сфери в R^n.

Виберемо $\eta_1 < \min\{\frac{1}{2}\eta_0, (\frac{\delta_0}{\sigma_n})^{\frac{1}{n}}\}$.

Для $x \in \Omega_{\frac{1}{2}\eta_0}$ визначимо множини $\omega_{\eta_1}(x) = \{\xi \in \Omega_{\eta_0} : |\xi - x| < \eta_1\}$. Маємо $m(\omega_{\eta_1}(x)) = \sigma_n\eta_1^n < \delta_0$. Тоді, за лемою 2, $I_{22} = \mu_0 C^q \sup\limits_{x\in\overline{\Omega}} \int\limits_{\omega_{\eta_1}(x)} |\tilde{\mathcal{K}}(x,y,\hat{x})|dy \leq \frac{\varepsilon}{12}$.

Виберемо $\delta_1 = \min\{\sigma_n\eta_1^n, \delta_0, \frac{1}{2}\eta_1\}$. Якщо $x \in \Omega_{\frac{1}{2}\eta_0}$, $z \in \Omega$, $|z| \leq \delta_1 (< \frac{1}{4}\eta_0)$, то $x+z \in \Omega_{\frac{1}{4}\eta_0} \subset \Omega$, $\omega_{\eta_1}^{-z}(x) \subset \Omega$, а за лемою 2

$$I_{23}(z) = \mu_0 C^q \sup_{x\in\overline{\Omega}_{\frac{\eta_0}{2}}} \int\limits_{\omega_{\eta_1}(x)} |\tilde{\mathcal{K}}(x+z,y,\hat{x})|dy = \mu_0 C^q \sup_{x\in\overline{\Omega}_{\frac{\eta_0}{2}}} \int\limits_{\omega_{\eta_1}^{-z}(x)} |\tilde{\mathcal{K}}(x,y,\hat{x})|dy \leq \frac{\varepsilon}{12}.$$

При $x \in \Omega_{\frac{1}{2}\eta_0}$, $y \in \Omega_{\eta_0} \setminus \omega_{\eta_1}(x)$, $z \in \Omega$, $|z| \leq \delta_1 (< \frac{1}{4}\eta_0)$ маємо $x+z \in \Omega_{\frac{1}{4}\eta_0} \subset \Omega$, $|y-x| \geq \eta_1$, $|y-(x+z)| \geq |y-x| - |z| \geq \eta_1 - \delta_1 \geq \frac{1}{4}\eta_0 \geq \frac{1}{2}\eta_1$, а отже, $y \neq x$ та $y \neq x+z$. За рівномірною неперервністю функції $\tilde{\mathcal{K}}(x,y,\hat{x})$ на замкненій множині $V =$

$\overline{\Omega_{\frac{1}{4}\eta_0}}\times\overline{(\Omega_{\eta_0}\setminus\omega_{\eta_1}(x))}\times\hat{x}$ одержуємо: для довільного $\varepsilon>0$ існує таке $\delta_2=\delta_2(\varepsilon)\in(0,\delta_1]$, що для довільних $(x,y,\hat{x})\in V_1=\overline{\Omega}_{\frac{1}{2}\eta_0}\times\overline{(\Omega_{\eta_0}\setminus\omega_{\eta_1}(x))}\times\hat{x}\subset V$, $z\in\overline{\Omega}$, $|z|\le\delta_2$ виконується

$$|\tilde{\mathcal{K}}(x+z,y,\hat{x})-\tilde{\mathcal{K}}(x,y,\hat{x})|\le\frac{\varepsilon}{12\mu_0C^qm(\Omega)},$$

а тоді

$$I_{24}(z)=\mu_0C^q\sup_{x\in\Omega_{\frac{\eta_0}{2}}}\int\limits_{\Omega_{\eta_0}\setminus\omega_{\eta_1}(x)}|\tilde{\mathcal{K}}(x+z,y,\hat{x})-\tilde{\mathcal{K}}(x,y,\hat{x})|dy\le\frac{\varepsilon m(\Omega_{\eta_0}\setminus\omega_{\eta_1}(x))}{12m(\Omega)}<\frac{\varepsilon}{12}.$$

Отож, для довільного $\varepsilon>0$ існує таке δ_2, що для довільного $z\in\overline{\Omega}$, $|z|\le\delta_2$

$$\sup_{x\in\Omega_{\frac{\eta_0}{2}}}\int\limits_{\Omega_{\eta_0}}|\tilde{\mathcal{K}}(x+z,y,\hat{x})-\tilde{\mathcal{K}}(x,y,\hat{x})|dy\le I_{22}+I_{23}(z)+I_{24}(z)\le\frac{\varepsilon}{4}.$$

При $x\in\Omega\setminus\Omega_{\frac{\eta_0}{2}}$, $y\in\Omega_{\eta_0}$, $z\in\Omega$, $|z|\le\delta_1$ та $x+z\in\Omega_{\frac{1}{4}\eta_0}\subset\Omega$ маємо $y\ne x$, $y\ne x+z$, також $|y-\hat{x}|\ge\frac{1}{2}\eta_0\ge\eta_1$. Тому $\varrho^{-lq}(y,\hat{x})\le b_0=const$, а за рівномірною неперервністю функції $\tilde{\mathcal{K}}(x,y,\hat{x})$ на замкненій множині $V'=(\overline{\Omega\setminus\Omega_{\frac{3}{4}\eta_0}})\times\overline{\Omega_{\eta_0}}\times\hat{x}$, враховуючи, що $-l\ge0$, $\varrho^{-l}(x,\hat{x})\le1$, одержуємо: для довільного $\varepsilon>0$ існує таке $\delta_3\in(0,\delta_1]$, що для довільних $(x,y,\hat{x})\in V_1'=(\overline{\Omega\setminus\Omega_{\frac{1}{2}\eta_0}})\times\overline{\Omega_{\eta_0}}\times\hat{x}\subset V'$, $z\in\overline{\Omega}$, $|z|\le\delta_3$ виконується

$$|\tilde{\mathcal{K}}(x+z,y,\hat{x})-\tilde{\mathcal{K}}(x,y,\hat{x})|dy\le\frac{\varepsilon}{4b_0\mu_0C^qm(\Omega)},$$

звідки

$$I_{22}'(z)=\mu_0C^q\sup_{x\in\overline{\Omega\setminus\Omega_{\frac{\eta_0}{2}}}}\int\limits_{\Omega_{\eta_0}}|\tilde{\mathcal{K}}(x+z,y,\hat{x})-\tilde{\mathcal{K}}(x,y,\hat{x})|dy\le\frac{\varepsilon}{4}.$$

Для тих $x\in\Omega\setminus\Omega_{\frac{\eta_0}{2}}$, $y\in\Omega_{\eta_0}$, $z\in\Omega$, $|z|\le\delta_1$, для яких $x+z\notin\Omega$, матимемо

$$I_{22}''(z)=\mu_0C^q\sup_{x\in\overline{\Omega\setminus\Omega_{\frac{\eta_0}{2}}}}\int\limits_{\Omega_{\eta_0}}|\tilde{\mathcal{K}}(x+z,y,\hat{x})-\tilde{\mathcal{K}}(x,y,\hat{x})|dy=$$

$$\mu_0C^q\sup_{x\in\overline{\Omega\setminus\Omega_{\frac{\eta_0}{2}}}}\int\limits_{\Omega_{\eta_0}}|\tilde{\mathcal{K}}(x,y,\hat{x})|dy\le\mu_0C^q\eta_0^{-l+lq}\sup_{x\in\overline{\Omega\setminus\Omega_{\frac{\eta_0}{2}}}}\int\limits_{\Omega_{\eta_0}}|\mathcal{K}(x,y)|dy\le$$

$$\le\mu_0C^q\eta_0^{-l(1-q)}\sup_{x\in\overline{\Omega}}\int\limits_{\Omega}|\mathcal{K}(x,y)|dy=\mu_0C^q\eta_0^{-l(1-q)}L_0\le\tfrac{\varepsilon}{4}$$

(остання нерівність виконується згідно з вибором числа η_0).

Отже, $J_2(z)\le I_{21}(z)+\max\{I_{22}+I_{23}(z)+I_{24}(z),\max\{I_{22}'(z),I_{22}''(z)\}\}\le\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}=\frac{\varepsilon}{2}$ при $z\in\Omega$, $|z|\le\delta''=\min\{\delta_2,\delta_3\}$.

В результаті одержуємо: для довільного $\varepsilon>0$ існує таке $\delta=\min\{\delta',\delta''\}>0$, що для довільного $z\in\overline{\Omega}, |z|\le\delta$ виконується $||(Pv)(x+z)-(Pv)(x)||_l'\le J_1(z)+J_2(z)\le\varepsilon$. Ми показали виконання умов принципу Шаудера при $q\in(0,1)$. Теорема доведена. Так само доводиться

Теорема 2. *Нехай*

$-\frac{1}{q} < l \le 0$ *для всіх* $q > 0$ *при* $r \ge 0$ *та для* $0 < q \le \frac{1}{-r}$ *при* $r \in (-n, 0)$,

$-\frac{r+1}{q-1} \le l \le 0$ *для* $q > \frac{1}{-r}$ *при* $r \in [-1, 0)$, *виконується припущення (Б).*

Тоді існує розв'язок $u \in \tilde{M}_l(\overline{\Omega})$ *інтегрального рівняння (7), єдиний при* $q = 1$.

3. Розв'язок задачі (1),(2).

Введемо позначення

$s_0 = \max\limits_{1 \le j \le m} \{p_j - m_j\}$,
$l_1 = -\min\{s_0 + n - 2, 0\}$, якщо $s_0 + n - 2 \ne 0$, $l_1 < 0$, якщо $s_0 + n - 2 = 0$,
$l_2 = -\min\{s_0 + n - 1, 0\}$, якщо $s_0 + n - 1 \ne 0$, $l_2 < 0$, якщо $s_0 + n - 1 = 0$,
$g_0 = \sum\limits_{j=1}^{m} g_{0j} = \sum\limits_{j=1}^{m} < G_j(\cdot, y), F_j(y) >$.

Лема 3. *Нехай* $F_j \in D'_{p_j}(S)$, $j = \overline{1, m}$. *При* $l \le l_2$ $\quad g_0 \in \tilde{M}_l(\Omega)$. *При* $supp\, F_j = \hat{x}$, $j = \overline{1, m}$ *та* $l \le l_1$ $\quad g_0 \in \tilde{M}_l(\Omega, \hat{x})$.

Доведення. $F_j \in L_\infty(\Omega)$ при $p_j \ge 0$, тому

$$|g_{0j}(x)| = |\int\limits_S G_j(x, y) F_j(y) dS| < +\infty, x \in \overline{\Omega}.$$

Нехай $p_j > 0$ та $suppF_j = \hat{x}_j$, $j = \overline{1, m}$. Відомо [21, с.86], що довільна узагальнена функція $F_j \in D'(S)$ з носієм у точці $\hat{x}$ має вигляд $F_j = \sum\limits_{|\alpha| \le s_j} a_\alpha D^\alpha \delta(x - \hat{x})$, де a_α, s_j – певні числа. Також відомо, що $s(\delta) = 1$, тому $s_j = p_j - 1$ при $F_j \in D'_{p_j}(S)$. Тоді

$$g_{0j}(x) =< G_j(x, y), \sum_{|\alpha| \le p_j - 1} a_\alpha D^\alpha \delta(x - \hat{x}) >= \sum_{|\alpha| \le p_j - 1} (-1)^{|\alpha|} a_\alpha D_y^\alpha G_j(x, \hat{x}).$$

З оцінок похідних вектор-функції Гріна [24, 25]

$$||g_{0j}||'_l \le \tilde{C}_j \sup_{x \in \overline{\Omega}} \varrho^{-l}(x, \hat{x}) \sum_{|\alpha| \le p_j - 1} [|x - \hat{x}|^{m_j - n + 1 - |\alpha|} + 1 + \kappa_{m_j - n + 1 - |\alpha|} |ln|x - \hat{x}||] \le$$
$$\le \tilde{C}_{0j} \sup_{x \in \overline{\Omega}} (\varrho^{-l + m_j - p_j + 2 - n}(x, \hat{x}) + \varrho^{-l}(x, \hat{x}) + \kappa_{m_j - n + 2 - p_j} \varrho^{-l}(x, \hat{x}) |ln \varrho(x, \hat{x})|) \le C_{0j}$$

при $l \le 2 - n - (p_j - m_j)$, якщо $p_j - m_j > 2 - n$, при $l \le 0$. якщо $p_j - m_j < 2 - n$, при $l < 0$, якщо $p_j - m_j = 2 - n$. Отож, $||g_0||'_l \le C_1 = \max\limits_{j \le m} C_{0j} < +\infty$ при $l \le l_2$.

У загальному випадку $F_j \in D'_{p_j}(S)$, $p_j > 0$ маємо

$$g_{0j}(x) = \sum_{|\alpha| \le p_j} \int\limits_S D_y^\alpha G_j(x, y) f_{j\alpha}(y) dS,$$

де $f_{j\alpha} \in L_1(S)$. З оцінок похідних вектор-функції Гріна

$$||g_{0j}||'_l \le \hat{C}_j \sup_{x \in \overline{\Omega}} \varrho^{-l}(x) \int\limits_S \sum_{|\alpha| \le p_j} [|x - y|^{m_j - n + 1 - |\alpha|} + 1 + \kappa_{m_j - n + 1 - |\alpha|} |ln|x - y||] |f_{j\alpha}(y)| dS.$$

Звідси

$$||g_{0j}||'_l \le \hat{C}_{0j} \text{ при } p_j < m_j + 1 - n,$$

$$||g_{0j}||'_l \le \hat{C}_{0j}(\varrho^{-l+m_j+1-n-p_j}(x)+1)\int_S |f_{j\alpha}(y)|dS \le C_{0j}$$
$$\text{при } p_j > m_j + 1 - n \text{ та } l \le 1 - n - (p_j - m_j),$$

$$||g_{0j}||'_l \le \hat{C}_{0j} \text{ при } p_j = m_j + 1 - n \text{ та } l < 0.$$

Отож, $||g_0||'_l \le C_1 < +\infty$ при $l \le l_1$.

Введемо позначення $k_0 = \max\{\max\limits_{1\le j\le m}(2m - m_j - 1), 2m - n + 1\}$,

Теорема 4. *Нехай $F_j \in D'_{p_j}(S)$, $supp\, F_j = \hat{x}$, $j = \overline{1,m}$, $\quad k \ge k_0$,*

$s_0 < \frac{n}{q} - n + 2$, $k \ge \max\{k_0, s_0 - 2\}$, $-\min\{k+n, \frac{n}{q}\} < l \le l_1$ для $q > 0$ при $2m \ge n$ та для $q \in (0, \frac{n}{n-2m}]$ при $2m < n$,

$s_0 \le \frac{2m}{q-1} - n + 2$, $-\frac{2m}{q-1} \le l \le l_1$ при $q > \frac{n}{n-2m}$, $2m < n$,

виконуються припущення (А), (Б) при $C_1 = ||g_0||'_l$. Тоді існує розв'язок $u \in \tilde{M}_l(\Omega, \hat{x}) \subset M_k(\Omega, \hat{x})$ крайової задачі (1),(2), єдиний при $q = 1$.

Доведення. Перевіримо виконання умови (3). Функція $\psi \in X_k(\overline{\Omega}, \hat{x})$ є розв'язком задачі

$$A^*(x,D)\psi(x) = O(\varrho^k(x,\hat{x})),\ x \in \Omega,\ \hat{B}_j\psi\,|_S = 0,\ j = \overline{1,m}.$$

Тому $\psi(y) = O(\int\limits_\Omega \varrho^k(x,\hat{x})G_0(x,y)dx)$. За лемою 1 $\int\limits_\Omega \psi(y)|u(y)|^q dy$ є скінченним. За теоремою 1 тепер достатньо довести розв'язність інтегрального рівняння (5) у $\tilde{M}_l(\Omega, \hat{x}) \subset M_k(\Omega, \hat{x})$. Використовуємо теорему 2 при $r = 2m - n$ за лемою 3 $g_0 \in \tilde{M}_l(\Omega, \hat{x}) \subset M_k(\Omega, \hat{x})$, тобто задовольняє умови теореми 2. Умови теореми 2 разом з умовами леми 3 щодо l набувають вигляду умов теореми 4.

Зауваження. З теореми 4 випливає, що s_0 може бути досить великим числом при достатньо малому q, $s_0 \ge 0$ можливо при $q < \frac{n}{n-2}$ (тобто допускається $p_j \ge m_j + 1 - n$, $j = \overline{1,m}$), $s_0 < 2$ для всіх $q > 1$ при $2m \ge n$, $s_0 \le 0$ для всіх $q \in [1, \frac{n}{n-2m}]$ у випадку $2m < n$, $s_0 < 2 - 2m$ при всіх $q > \frac{n}{n-2m}$, якщо $2m < n$.

З результатів [18, 19] випливає, що при $q \in (0,1)$, $s_0 < \frac{1}{q} + 1 - n$, $k > s_0 - n$ крайова задача (1)-(2) розв'язна у просторі $M_k(\Omega)$.

Так само, як теорема 4, доводиться така теорема.

Теорема 5. *Нехай $F_j \in D'_{p_j}(S)$, $j = \overline{1,m}$,*

$s_0 < \frac{1}{q} + 1 - n$, $k \ge \max\{k_0, s_0 + n - 1\}$, $-\min\{\frac{1}{q}, k+1\} < l \le l_2$ при $q > 0$, $2m \ge n$ та $q \in (0, \frac{1}{n-2m})$, $2m < n$,

$s_0 < -2m$, $k \ge \max\{k_0, s_0 + n - 1\}$, $l = 0$ при $q > 1$ та $n = 2m + 1$,

виконуються припущення (А), (Б) при $C_1 = ||g_0||'_l$. Тоді існує розв'язок $u \in \tilde{M}_l(\Omega) \subset M_k(\Omega)$ задачі (1)-(2), єдиний при $q \ge 1$.

Зауваження. Враховуючи, що $s(F) \le c(F) \le s(F) + n$ ([21, с.25,131]), одержані результати можна сформулювати за допомогою порядків c-сингулярностей заданих узагальнених функцій F_j, $j = \overline{1,m}$.

Теорема 6. *Нехай виконуються умови теореми 4 або теореми 5 та $\mu \in C(\Omega)$, $u-$ розв'язок задачі (1),(2). Тоді $u \in C^{2m-1}(\Omega)$ при $q \in (0,1)$, $u \in C^{2m}(\Omega)$ при $q \geq 1$ та у випадку $q \in (0,1)$ за умови знакосталості.*

Доведення. Нехай $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$. Запишемо

$$u(x) = \int\limits_{\Omega_{\frac{\varepsilon}{2}}} G_0(x,y)\mu(y)|u(y)|^q dy + \int\limits_{\Omega \setminus \Omega_{\frac{\varepsilon}{2}}} G_0(x,y)\mu(y)|u(y)|^q dy + g_0(x),\ x \in \Omega_\varepsilon. \tag{13}$$

Оскільки $\mu \in C(\Omega)$, функція $u \in \tilde{M}_l(\Omega, \hat{x})(\tilde{M}_l(\Omega))$, а отже, неперервна й обмежена в $\overline{\Omega}_{\frac{\varepsilon}{2}}$, то перший доданок у (13) має в Ω_ε неперервні похідні до порядку $t < 2m$. Функція G_0 нескінченно диференційовна при $x \in \overline{\Omega}_\varepsilon$, $y \in \Omega \setminus \Omega_{\frac{\varepsilon}{2}}$, за умов теореми інтеграл $\int\limits_\Omega |u(y)|^q dy$ збігається, тому другий доданок у (13) є нескінченно диференційовним в Ω_ε. За властивостями узагальнених функцій, залежних від параметрів також $g_0 \in C^\infty(\Omega)$. Отож, із (13) одержуємо $u \in C^{2m-1}(\Omega_\varepsilon)$. При $|\alpha| = 2m-1$

$$\int\limits_{\Omega_{\frac{\varepsilon}{2}}} D_x^\alpha \frac{\partial}{\partial x_i} G_0(x,y)|u(y)|^q dy = \int\limits_{\Omega_{\frac{\varepsilon}{2}}} D_x^\alpha\big(-\frac{\partial}{\partial y_i}G_0(x,y) + (\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial y_i})G_0(x,y)\big)|u(y)|^q dy =$$

$$= -\int\limits_{S_{\frac{\varepsilon}{2}}} D_x^\alpha G_0(x,y)|u(y)|^q \nu_i(y) dS + \int\limits_{\Omega_{\frac{\varepsilon}{2}}} D_x^\alpha G_0(x,y) q|u(y)|^{q-1} sign u(y) u_{y_i}(y) dy +$$

$$+ \int\limits_{\Omega_{\frac{\varepsilon}{2}}} D_x^\alpha (\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial y_i})G_0(x,y)\big)|u(y)|^q dy.$$

Оператор $\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial y_i}$ не збільшує порядку особливості ядра $\mathcal{G}_0(x,y)$. Звідси та з обмеженості u на $S_{\frac{\varepsilon}{2}}$, u та u_{y_i} в $\overline{\Omega}_{\frac{\varepsilon}{2}}$ випливає неперервність цих інтегралів, а отже, неперервність похідних порядку $2m$ функції u за умов теореми.

1. *Крейн С.Г. Симонов А.С.* Теорема о гомеоморфизмах и квазилинейные уравнения//Докл. АН СССР.-1966.-Т. 167,N 6.-С.1226-1229.
2. *Березанский Ю.М., Крейн С.Г., Ройтберг Я.А.* Теорема о гомеоморфизмах и локальное повышение гладкости вплоть до границы решений эллиптических уравнений//Докл. АН СССР.-1963.-Т. 148,N 4.-С.745-748.
3. *Kondrat'ev V.A. and Nikishkin V.A.* Asymptotic, near the boundary, of a solution of a singular boundary-value problem for a semilinear elliptic equation//Diff. uravn.-1990.-26, N 3.- P.465-468.
4. *Похожаев С.* О задаче Дирихле для уравнения $\Delta u = u^2$//ДАН СССР.- 1960.-134, N. 4.-P.769-772.
5. *Gmira A., Veron L.* Boundary singularities of solutions of some nonlinear elliptic equation//Indiana Math. J.- 1991.-64.-P. 271-324.
6. *Le Gall J.-F.* The Brounian snake and the solutions of $\Delta u = u^2$ in a domain//Probab. Theory Related Fields.-1995.-102.-P.393-432.
7. *Dynkin E.B., Kuznetsov S.E.* Trace on the boundary for solutions of nonlinear equations// Trans. Amer. Math. Soc.-1998.-350.-P. 4499-4519.
8. *Marcus M., Veron L.* Removable singularities and boundary traces// J. Math. Pures Appl.- 2001.- 80, N 1.- P, 879-900.
9. *Bidaut-Veron and C. Yarur* Semilinear elliptic equations and systems with measure data: existence and a priori estimates//Advanced in Diff. Equ. -2002.- 7.-P.257-296.
10. *Лопушанська Г.П.* Крайові задачі у просторі узагальнених функцій D': Монографія.- Львів: Вид. центр ЛНУ імені Івана Франка, 2002.- 287 с.

11. *Boccardo L., Gallovet Th.* Non-linear elliptic and parabolic equations involving measure data// J. Funct. Anal.-1989.-V.87.-P.149-169.
12. *Boccardo L., Gallovet* Th. Non-linear elliptic equations with right-hand side measures // Comm. Partial Dif. Eqns.-1992.-V.17.-P.641-655.
13. *Rakotoson J.M.* Generalized solutions in a new-type of sets for problems with measures as data//Diff. Integral Eqns.-1993.-V.6.-P.27-36.
14. *Alvino A., Ferone V., Trombetti G.* Nonlinear elliptic equations with lower-order terms// Diff. Int. Equations.- 2001.- 14.- P. 1169-1180.
15. *Benilan Ph., Boccardo L.,Gallouet T., Gariepy R., Pierre M., Vazquez J.L.* An L_1-theory of existence and uniquenessof solutions of nonlinear elliptic equations// Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.- 1995.- 22.- P. 241-273.
16. *Kovalevskii A.A.* Integrability of solutions of nonlinear elliptic equations with right-hand sides from classes close to L^1// Math Notes.- 2001.-70.- P. 337-346.
17. *Poretta A.* Nonlinear equations with natural growth terms and measure data// 2002-Fez Conference on Partial Differentials Equations. Electron. J. Diff. Eqns. Conf.09,2002.- P. 183-202.
18. *Лопушанська Г.П.* Задача Діріхле для квазілінійних еліптичних рівнянь у просторах розподілів // Вісник Львівського ун-ту. Сер. мех.-мат. - 1990. - Вип. 35. - С. 26-31.
19. *Лопушанська Г.П., Жидик У.В.* Про узагальнені граничні значення розв'язків квазілінійного еліптичного рівняння 2-го порядку// Вісник Львівського ун-ту. Сер. мех.-мат. - 2001. - Вип. 59. - С. 126-138.
20. *Лопушанська Г.П.* Узагальнені крайові задачі для лінійних та напівлінійних еліптичних рівнянь// Укр. матем. вісник. - 2005. - Т.2,N3.- С. 377-394.
21. *Шилов Г.Е.* Математический анализ. Второй спецкурс.- М.: Наука, 1965.-328 с.
22. *Жидик У.В., Лопушанська Г.П.* Розв'язки інтегро-диференціальних рівнянь у класах функцій із степеневими особливостями // Науковий вісник Чернівецького університету.- Вип. 160. Математика.- 2003.- С.65-72.
23. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения.- М.: Мир, 1971.- 372с.
24. *Березанский Ю.М., Ройтберг Я.А.* Теорема о гомеоморфизмах и функция Грина для общих єллиптических граничных задач//Укр. матем. журн.- 1967.-19, N 5.- С. 3-32.
25. *Красовский Ю.П.* Свойства функций Грина и обобщенные решения эллиптических граничных задач//Изв. АН СССР. Сер. мат. - 1969.- 184, N 3.- С. 534-537.
26. Функциональный анализ./ Под общей ред. С.Г. Крейна. СМБ. - М.: Наука, 1972. - 544 с.
27. *Ушаков Р.П., Хацет Б.І.* Опуклі функції та нерівності. - К.: Вища школа, 1986. - 112 с.

Ivan Franko Lviv National University,
Universitetskaya str., 1,
79000 Lviv, Ukraine
`gp_lopushanska@franko.lviv.ua (lhp@ukr.net)`

Отримано 14.12.2005