©2006. **Р.М. Джафаров**

РАЗРЕШИМОСТЬ АНИЗОТРОПНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Для анизотропного нелинейного элиптического уравнения четвертого порядка получен результат о существовании слабого решения.

Ключевые слова: геометрия горного перевала, анизотропная теорема вложения
MSC (2000): 35J35

1. Введение.

Мы будем рассматривать вопрос о существовании решения анизотропной нелинейной эллиптической задачи четвертого порядка в гладкой ограниченной области $\Omega \in \mathbf{R}^n$

$$\begin{cases} \sum\limits_{i,j=1}^{n} \partial_{ij}(|\partial_{ij}u|^{m_{ij}-2}\partial_{ij}u) = \lambda|u|^{p-2}, & x \in \Omega, \\ u \geq 0, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{1}$$

Отличительной особенностью исследований анизотропных эллиптических уравнений даже в линейном случае является привлечение анизотропных теорем вложения. Наличие анизотропии, по всей вероятности, ухудшает дифференциальные свойства решений. По крайней мере, не удается получить ту же гладкость решения, что и в неанизотропном случае. Хотя известно, к примеру, что соответствующая регуляризованная задача имеет классическое решение из $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, для анизотропного p–лапласа со степенной нелинейностью доказаны разрешимость и глобальная ограниченность решения ([2]).

Локальные свойства решения анизотропного p–лапласа рассматривались в [3]. Используя итерационную технику без привлечения теорем вложения автором получены локальные квалифицированные оценки градиента решения.

Интересно отметить, что исследование несуществования решения анизотропных задач привело к обобщению понятия звездности области, которое обычно требуется при доказательстве несуществования решения. При этом анизотропия приводит к таким условиям на геометрию области, что область, вообще говоря, звездной может не быть.

Мы получаем результат о разрешимости следуя технике, развитой в [2]. Для этого используется теорема о горном перевале [1]. Мы покажем, что нелинейный функционал, соответствующий задаче (1), обладает геометрией горного перевала и применим теорему о горном перевале.

Пусть $m = (m_{ij})_{i,j=1}^{n}$. Обозначим через $\overset{\circ}{W}{}^2_m(\Omega)$ замыкание $C_0^\infty(\Omega)$ по норме

$$\|u\|_{\overset{\circ}{W}{}^2_m(\Omega)} = \sum_{i,j=1}^{n} \|\partial_{ij}u\|_{m_{ij}},$$

где $\|\cdot\|_p$ —обычная L_p–норма, ∂_{ij} — вторая производная по i–й и j–й координатам.

Обозначим

$$m_- = \min\{m_{11}, m_{12}, \ldots, m_{nn}\}, \quad m_+ = \max\{m_{11}, m_{12}, \ldots, m_{nn}\},$$

$$m_* = \frac{n^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}(\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{1}{m_{ij}} - 2)}.$$

Предположим, показатели удовлетворяют ограничениям:

$$m_{ij} > 1, \quad i,j = \overline{1,n}; \qquad \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{m_{ij}} > 2, \quad i = \overline{1,n}; \qquad m_+ < m_*. \tag{2}$$

Если нарушено условие $m_+ < m_*$, то может быть построен пример неограниченной последовательности удовлетворяющей условию Пале-Смейла, аналогичный построенному в [2].

Теорема 1. *Пусть $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ — открытая ограниченная область с липшицевой границей и выполнены условия (2). Тогда $\overset{\circ}{W}{}^2_m(\Omega) \subset L_q(\Omega)$ ограничено для всех $q \in [1, m_*]$. Для $q < m_*$ вложение компактно.*

Эта теорема является непосредственным следствием теоремы 1 из [2].

Определение. Назовем $u \in \overset{\circ}{W}{}^2_m(\Omega), \quad u \geq 0$ слабым решением (1), если

$$\sum_{i,j=1}^{n}\int\limits_{\Omega}|\partial_{ij}u|^{m_{ij}-2}\partial_{ij}u\partial_{ij}v\,dx = \lambda\int\limits_{\Omega}|u|^{p-2}uv\,dx, \qquad \forall v \in \overset{\circ}{W}{}^2_m(\Omega). \tag{3}$$

Теорема 2. *Пусть $p \in (m_+, m_*), \quad \lambda > 0$, а также выполнены условия (2). Тогда задача (1) имеет нетривиальное слабое решение.*

2. Доказательство Теоремы 2.

Результат о существовании решения будет получен как следствие теоремы о горном перевале [1].

Определение. Функционал $J \in C^1(E, \mathbf{R}), \quad J(0) = 0$, где E— бесконечномерное банахово пространство, обладает геометрией горного перевала, если он удовлетворяет следующим условиям.

(I_1) $\exists \rho > 0: \quad J > 0$ в $B_\rho \setminus \{0\}$, где B_ρ — шар радиуса ρ с границей S_ρ и $J \geq \alpha > 0$ на S_ρ. Тогда $u = 0$ — локальный минимум для J.

(I_2) $\exists e \in E, \quad e \neq 0: \quad J(e) = 0.$

(I_3) Если последовательность $\{u_k\}_{k=1}^{\infty} \subset E$ такова, что из условий:

$$J(u_k) > 0, \quad k = \overline{k,\infty}, \quad J(u_k) \text{ —ограничено и } J'(u_k) \to 0,$$

следует, что $\{u_k\}$ содержит сильно сходящуюся подпоследовательность.

Рассмотрим в пространстве $\overset{\circ}{W}{}^2_m(\Omega)$ связанный с задачей (1) функционал

$$J(u) = \sum_{i,j=1}^{n}\int\limits_{\Omega}\frac{|\partial_{ij}u|^{m_{ij}}}{m_{ij}}\,dx - \frac{\lambda}{p}\int\limits_{\Omega}|u|^p\,dx. \tag{4}$$

Из теоремы вложения (Теорема 1) следует, что $J \in C^1(\overset{\circ}{W}{}^2_m(\Omega), \mathbf{R})$. Его производная Фреше

$$< J'(u), v >= \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} |\partial_{ij} u|^{m_{ij}-2} \partial_{ij} u \, \partial_{ij} v \, dx \; - \; \lambda \int_{\Omega} |u|^{p-2} u \; v \, dx. \qquad (5)$$

Покажем, что этот функционал удовлетворяет условию (I_1). Выберем ρ из условия

$$0 < \rho < \min\left\{ \left(\frac{p}{m_+ \lambda C_1^p} \right)^{\frac{1}{p-m_+}}, 1 \right\},$$

где C_1 — константа вложения $\overset{\circ}{W}{}^2_m(\Omega) \subset L_p(\Omega)$, и возьмем $u \in \overset{\circ}{W}{}^2_m(\Omega)$ такую, что $\|u\|_{\overset{\circ}{W}{}^2_m(\Omega)} = \rho$. По Теореме 1,

$$J(u) \; \geq \; \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{|\partial_{ij} u|^{m_{ij}}}{m_{ij}} \, dx \; - \; \frac{\lambda}{p} C_1^p \|u\|^p_{\overset{\circ}{W}{}^2_m(\Omega)}.$$

Воспользуемся теперь числовым неравенством

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{a_{ij}^{m_{ij}}}{m_{ij}} \; \geq \; \frac{1}{m_+} \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \right)^{m_+}, \quad \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \; < \; 1, \quad a_{ij} \; \geq \; 0, \quad i,j = \overline{1,n},$$

которое непосредственно вытекает из неравенства Гельдера.

$$J(u) \; \geq \; \frac{1}{m_+} \rho^{m_+} \; - \; \frac{\lambda}{p} C_1^p \rho^p \; = \; \rho^{m_+} \left(\frac{1}{m_+} \; - \; \frac{\lambda}{p} C_1^p \rho^{p-m_+} \right).$$

Так, $\forall u \in \overset{\circ}{W}{}^2_m(\Omega) : \quad \|u\|_{\overset{\circ}{W}{}^2_m(\Omega)} \; = \; \rho,$

$$J(u) \; \geq \; \alpha \; > \; 0, \qquad \text{где}$$

$$\alpha \; = \; \rho^{m_+} \left(\frac{1}{m_+} \; - \; \frac{\lambda}{p} C_1^p \rho^{p-m_+} \right).$$

Аналогично доказывается, что $J \; > \; 0$ в $B_\rho \setminus \{0\}$.
Свойство (I_1) доказано.

Возьмем $v \; = \; tu$, где $u \in \overset{\circ}{W}{}^2_m(\Omega)$, $u \not\equiv 0$ и t достаточно большое положительное число.

$$J(v) \; = \; \sum_{i,j=1}^{n} \frac{1}{m_{ij}} \|\partial_{ij} u\|^{m_{ij}}_{m_{ij}} \cdot t^{m_{ij}} \; - \; \frac{\lambda}{p} \, \|u\|_p^p \cdot t^p \; \leq \; \sum_{i,j=1}^{n} \frac{1}{m_{ij}} \|\partial_{ij} u\|^{m_{ij}}_{m_{ij}} \cdot t^{m_+} \; -$$

$$- \; \frac{\lambda}{p} \|u\|_p^p \cdot t^p \; = \; t^{m_+} \left(\sum_{i,j=1}^{n} \frac{1}{m_{ij}} \|\partial_{ij} u\|^{m_{ij}}_{m_{ij}} \; - \; \frac{\lambda}{p} \|u\|_p^p \cdot t^{p-m_+} \right).$$

Тогда $J(v) < 0$ когда

$$t > \frac{\sum\limits_{i,j=1}^{n} \frac{1}{m_{ij}} \|\partial_{ij} u\|_{m_{ij}}^{m_{ij}}}{\frac{\lambda}{p}\|u\|_p^p}.$$

В силу произвольности выбора u получаем, что найдется $e \in \overset{\circ}{W}{}_m^2(\Omega): \quad \|e\|_{\overset{\circ}{W}{}_m^2(\Omega)} > \rho$ такая, что $J(e) = 0$.

Для того чтобы применить теорему о горном перевале остается проверить (I_3). Рассмотрим последовательность Пале-Смейла $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ для J. Предположим, что последовательность норм u_k расходится. По формуле Тейлора для функционалов

$$J(u_k - \frac{1}{p}u_k) = J(u_k) - \frac{1}{p} < J'(u_k), u_k > + \circ(\|u_k\|_{\overset{\circ}{W}{}_m^2(\Omega)}).$$

Так как $J(u_k)$ ограничен сверху, то $J(u_k) = \circ(\|u_k\|_{\overset{\circ}{W}{}_m^2(\Omega)})$. Из $J'(u_k) \to 0$ следует $\frac{1}{p} < J'(u_k), u_k > = \circ(\|u_k\|_{\overset{\circ}{W}{}_m^2(\Omega)})$. Далее,

$$J(u_k - \frac{1}{p}u_k) = \sum_{i,j=1}^{n}(1-\frac{1}{p})^{m_{ij}} \int\limits_{\Omega} \frac{|\partial_{ij}u_k|^{m_{ij}}}{m_{ij}}\,dx - \frac{\lambda}{p}(1-\frac{1}{p})^p \int\limits_{\Omega} |u_k|^p\,dx =$$

$$= (1-\frac{1}{p})^{\frac{1}{p}} \left\{ \sum_{i,j=1}^{n}(1-\frac{1}{p})^{m_{ij}-p} \int\limits_{\Omega} \frac{|\partial_{ij}u_k|^{m_{ij}}}{m_{ij}}\,dx - \frac{\lambda}{p} \int\limits_{\Omega} |u_k|^p\,dx \right\} =$$

$$= (1-\frac{1}{p})^{\frac{1}{p}} \left\{ \sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{\Omega} \frac{|\partial_{ij}u_k|^{m_{ij}}}{m_{ij}}\,dx - \frac{\lambda}{p} \int\limits_{\Omega} |u_k|^p\,dx + \right.$$

$$\left. + \sum_{i,j=1}^{n} \left((1-\frac{1}{p})^{m_{ij}-p} - 1 \right) \int\limits_{\Omega} \frac{|\partial_{ij}u_k|^{m_{ij}}}{m_{ij}}\,dx \right\} =$$

$$= (1-\frac{1}{p})^{\frac{1}{p}} \left\{ J(u_k) + \sum_{i,j=1}^{n}((1-\frac{1}{p})^{m_{ij}-p} - 1) \int\limits_{\Omega} \frac{|\partial_{ij}u_k|^{m_{ij}}}{m_{ij}}\,dx \right\}.$$

Тогда

$$\sum_{i,j=1}^{n}((1-\frac{1}{p})^{m_{ij}-p} - 1) \int\limits_{\Omega} \frac{|\partial_{ij}u_k|^{m_{ij}}}{m_{ij}}\,dx = \circ(\|u_k\|_{\overset{\circ}{W}{}_m^2(\Omega)}).$$

Это противоречит условию $p > m_+$. Поэтому последовательность $\|u_k\|_{\overset{\circ}{W}{}_m^2(\Omega)}$ ограничена и, следовательно, из нее можно выделить слабо сходящуюся в $\overset{\circ}{W}{}_m^2(\Omega)$ к некоторой функции u подпоследовательность $\{u_{k_\nu}\}_{\nu=1}^{\infty}$.

Если m'_{ij} — показатель, сопряженный к m_{ij} (т. е. $\frac{1}{m'_{ij}} + \frac{1}{m_{ij}} = 1$), то ограниченность $\partial_{ij}u_{k_\nu}$ в $L_{m_{ij}}(\Omega)$ влечет ограниченность $|\partial_{ij}u_{k_\nu}|^{m_{ij}-2}\partial_{ij}u_{k_\nu}$ в $L_{m'_{ij}}(\Omega), \quad i,j = \overline{1,n}$.

Тогда из $u_{k_\nu} \rightharpoonup u$ в $\overset{\circ}{W}{}_m^2(\Omega)$ следует $|\partial_{ij}u_{k_\nu}|^{m_{ij}-2}\partial_{ij}u_{k_\nu} \rightharpoonup |\partial_{ij}u|^{m_{ij}-2}\partial_{ij}u$ в $L_{m'_{ij}}(\Omega)$. Это можно увидеть применив неравенство

$$r\, y^{r-1}(x-y) \ \le\ x^r\ -\ y^r\ \le\ r\, x^{r-1}(x-y),$$

где $x, y\ \ge\ 0, \qquad r > 1$.

По условию выбора последовательности, $J'(u_{k_\nu})\ \to\ 0$, тогда $< J'(u_{k_\nu}), u > \to\ 0$ и $< J'(u), u > =\ 0$. Поэтому

$$\lambda \int\limits_\Omega |u|^p\, dx\ =\ \sum_{i,j=1}^n \int\limits_\Omega |\partial_{ij}u|^{m_{ij}}\, dx. \tag{7}$$

Теперь из (6), (7) следует

$$\sum_{i,j=1}^n \int\limits_\Omega |\partial_{ij}u_{k_\nu}|^{m_{ij}}\, dx\ \to\ \sum_{i,j=1}^n \int\limits_\Omega |\partial_{ij}u|^{m_{ij}}\, dx. \tag{8}$$

Согласно слабой полунепрерывности нормы,

$$\liminf_{\nu\to\infty} \|\partial_{ij}u_{k_\nu}\|_{m_{ij}}\ \ge\ \|\partial_{ij}u\|_{m_{ij}},$$

что вместе с (8) и слабой сходимостью $u_{k_\nu} \rightharpoonup u$ в $\overset{\circ}{W}{}_m^2(\Omega)$ обеспечивает сильную сходимость $u_{k_\nu} \xrightarrow{\overset{\circ}{W}{}_m^2(\Omega)} u$. Условие (I_3) выполнено и по теореме о горном перевале функционал J имеет критическую точку. Так как $J(u) = J(|u|)$ для всех u, мы можем положить, что критическая точка неотрицательна. Теорема 2 доказана.

1. *Ambrosetti A., Rabinowits P. H.* Dual Variational Methods in Critical Point Theory and Applications // J. of Func. An. -1974.-v. 14.-P.349-381.
2. *Fragala I., Gazzola F., Kawohl B.* Existence and nonexistance results for anisotropic quasilinear elliptic equations //Ann. I. H. Poincare.-2004.-v. 21.-P.715–734.
3. *Jun-Jie L.* Local behaviour of solutions of anisotropic elliptic equations // Nonlinear Analysis.-1999.-v. 35.-C.617–628.

ИПММ НАН Украины
ул. Розы Люксембург, 74
83114, Донецк, Украина

Получено 13.08.2005

Исправления

1. В условии задачи на стр. 127 следует исключить строку

$$u \geq 0, \qquad x \in \Omega.$$

Также в конце доказательства теоремы на стр. 131 необходимо исключить фразу: "Так как $J(u) = J(|u|)$ для всех u, мы можем положить, что критическая точка неотрицательна."

2. На стр. 130 доказательство факта $J(u_k) - \frac{1}{p} < J'(u_k), u_k >= o(\|u_k\|_{\overset{\circ}{W}{}^2_m(\Omega)})$, противоречащего условию $p > m_+$, необходимо изменить следующим образом.

Так как по условию $J(u_k) \to c$, то $J(u_k) = c + o(1)$, где $o(1)$ – бесконечно малая величина при $k \to \infty$. Далее, $< J'(u_k), u_k >= o(\|u_k\|_{\overset{\circ}{W}{}^2_m(\Omega)})$, так как $J'(u_k) \to 0$. Тогда

$$J(u_k) - \frac{1}{p} < J'(u_k), u_k >= c + o(1) + o(\|u_k\|_{\overset{\circ}{W}{}^2_m(\Omega)}) = o(\|u_k\|_{\overset{\circ}{W}{}^2_m(\Omega)}).$$

3. На стр. 131 вместо фрагмента "Это можно увидеть применив неравенство

$$ry^{r-1}(x-y) \leq x^r - y^r \leq rx^{r-1}(x-y),$$

где $x, y \geq 0, \quad r > 0$,"следует сослаться на работу [2, p.728], где авторы, в свою очередь, ссылаются на работу

G. Dal Maso, F. Murat, Almost everywhere convergence of gradients of solutions to nonlinear elliptic systems, Nonlinear Anal. TMA 31 (1998). 405-412.