©2006. **В. Т. Волков, Н. Н. Нефедов**

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ КОНТРАСТНЫЕ СТРУКТУРЫ В ЗАДАЧАХ СО СБАЛАНСИРОВАННОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ: СУЩЕСТВОВАНИЕ, АСИМПТОТИКА, УСТОЙЧИВОСТЬ

Асимптотический метод дифференциальных неравенств развивается для нового класса периодических задач типа реакция-диффузия. Исследуется проблема существования и устойчивости по Ляпунову периодических решений с внутренними переходными слоями с случае сбалансированной нелинейности.

Ключевые слова: сингулярные возмущения, реакция-диффузия, контрастные структуры, внутренние слои
MSC (2000): 35B25; 35K60; 35B10

1. Введение.

Данная работа посвящена развитию асимптотической теории периодических по времени контрастных структур в нелинейных сингулярно возмущенных параболических уравнениях. Для задач указанного типа развит алгоритм построения асимптотики по малому параметру решения в виде контрастной структуры типа ступеньки, т.е. такого, которое на разных частях отрезка близко к различным корням вырожденного уравнения и имеет резкие переходные слои между этими областями. Получены условия существования и исследована устойчивость таких решений.

Ранее подобные задачи уже рассматривались [1, 2], однако в этих работах верхние и нижние решения для периодического случая получались на основе методов, развитых при доказательстве аналогичных теорем для стационарных уравнений, и не учитывали периодичность по существу. В результате условия, при которых строились периодические решения, оказывались слишком грубыми. В настоящей работе ряд новых идей применен в задаче со сбалансированной нелинейностью, для которой получены условия существования и устойчивости, учитывающие особенности именно периодических задач.

2. Постановка задачи.

Рассматривается задача

$$\varepsilon^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial u}{\partial t}\right) \;=\; f(u,x,t,\varepsilon) \tag{1}$$

$$(x,t)\in D = \{(0<x<1)\times(-\infty<t<+\infty)\},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t,\varepsilon)=\frac{\partial u}{\partial x}(1,t,\varepsilon)=0\,, \tag{2}$$

где $f(u,x,t,\varepsilon)$ – достаточно гладкая T- периодическая по переменной t функция.

Будем искать T- периодическое решение этой задачи, т.е. решение, удовлетворяющее условию

$$u(x,t,\varepsilon)=u(x,t+T,\varepsilon)\,. \tag{3}$$

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, проект N 04-01-00710.

Хорошо известно [3, 4], что задача (1)–(3) допускает решения различного типа, имеющие как пограничные слои вблизи концов отрезка, так и внутренние переходные слои. В настоящей работе мы будем рассматривать решение в виде контрастной структуры типа ступеньки, т. е. такое, которое по разные стороны от некоторой T-периодической кривой $x = h(t, \varepsilon)$ близко к различным корням $\varphi_1(x,t)$ и $\varphi_3(x,t)$ вырожденного уравнения, а в окрестности кривой $x = h(t,\varepsilon)$ происходит быстрый переход решения $u(x,t,\varepsilon)$ от $\varphi_1(x,t)$ к $\varphi_3(x,t)$. Кривая $x = h(t,\varepsilon)$ заранее не известна и находится в ходе построения асимптотики.

Условие 1. *Пусть вырожденное уравнение* $f(u,x,t,0) = 0$ *имеет три решения* $u = \varphi_i(x,t)$, $(i = 1,2,3)$, *причём* $\varphi_1(x,t) < \varphi_2(x,t) < \varphi_3(x,t)$, *и между* $\varphi_1(x,t)$ *и* $\varphi_3(x,t)$ *нет других решений, кроме* $\varphi_2(x,t)$. *Пусть* $f_u\Big(\varphi_i(x,t),x,t,0\Big) > 0$, $(i = 1,3)$ *и* $f_u\Big(\varphi_2(x,t),x,t,0\Big) < 0$ *при всех значениях* $(x,t) \in \bar{D} = \{0 \le x \le 1) \times (-\infty < t < +\infty)\}$.

Не ограничивая общности, будем считать, что $\varphi_2(x,t) \equiv 0$.

Введем функцию

$$I(x,t) = \int\limits_{\varphi_1(x,t)}^{\varphi_3(x,t)} f(u,x,t,0)\,du$$

Условие 2. *Пусть* $I(x,t) \equiv 0$ *при всех* $(x,t) \in \bar{D}$.

В этом случае мы называем нелинейность $f(u,x,t,\varepsilon)$ *сбалансированной*, и именно его мы и будем рассматривать далее.

Замечание. Случай несбалансированной нелинейности, когда уравнение $I(x,t) = 0$ имеет изолированные решения $x(t)$, лежащие в интервале $x \in (0,1)$, изучен в [1]. В рассматриваемом в настоящей работе случае сбалансированной нелинейности, алгоритм определения положения внутреннего слоя существенно усложняется, и соответствующая кривая, как показано ниже, находится не из алгебраического, а из нелинейного дифференциального уравнения.

Определим положение кривой переходного слоя условием пересечения решения задачи (1)–(3) с корнем $\varphi_2(x,t)$ вырожденного уравнения, который в данном случае предполагается равным нулю, т.е. условием

$$u(h(t,\varepsilon),t,\varepsilon) = 0\,. \tag{4}$$

Кривая $x = h(t,\varepsilon)$ разделяет область D на подобласти $D^{(-)}$ и $D^{(+)}$, лежащие соответственно слева и справа от кривой $x = h(t,\varepsilon)$.

3. Алгоритм построения асимптотики.

Асимптотику T-периодического решения $u^{(-)}(x,t,\varepsilon)$ уравнения (1) в области $D^{(-)}$ с заданным граничным условием (2) при $x = 0$ и условием (4) ищем в виде

$$u^{(-)}(x,t,\varepsilon) = \bar{u}^{(-)}(x,t,\varepsilon) + \Pi u^{(-)}(\rho_0,t,\varepsilon) + Qu^{(-)}(\xi,t,\varepsilon)\,, \tag{5}$$

где

$$\bar{u}^{(-)}(x,t,\varepsilon) = \bar{u}_0^{(-)}(x,t) + \varepsilon \bar{u}_1^{(-)}(x,t) + \cdots$$

регулярный ряд,

$$\Pi u^{(-)}(\rho_0,t,\varepsilon)=\Pi_0 u^{(-)}(\rho_0,t)+\varepsilon\Pi_1 u^{(-)}(\rho_0,t)+\cdots$$

пограничный ряд в окрестности $x=0$, $\rho_0=x/\varepsilon$ и

$$Qu^{(-)}(\xi,t,\varepsilon)=Q_0 u^{(-)}(\xi,t)+\varepsilon Q_1 u^{(-)}(\xi,t)+\cdots$$

пограничный ряд в левой окрестности кривой $x=h(t,\varepsilon)$, $\xi=[\,x-h(t,\varepsilon)\,]/\varepsilon$.

Асимптотика T-периодического решения $u^{(+)}(x,t,\varepsilon)$ уравнения (1) в области $D^{(+)}$ с условием (4) и граничным условием (2) при $x=1$ строится в виде

$$u^{(+)}(x,t,\varepsilon)=\bar u^{(+)}(x,t,\varepsilon)+Qu^{(+)}(\xi,t,\varepsilon)+Ru^{(+)}(\rho_1,t,\varepsilon)\,, \tag{6}$$

где $\bar u^{(+)}(x,t,\varepsilon)$ – регулярный ряд, $Qu^{(+)}(\xi,t,\varepsilon)$ – пограничный ряд в правой окрестности кривой $x=h(t,\varepsilon)$, $Ru^{(+)}(\rho_1,t,\varepsilon)$ – пограничный ряд в окрестности $x=1$, $\rho_1=(1-x)/\varepsilon$.

Кривую, $x=h(t,\varepsilon)$, задающую положение переходного слоя, также ищем в виде ряда по степеням ε:

$$h(t,\varepsilon)=h_0(t)+\varepsilon h_1(t)+\cdots\,, \tag{7}$$

где все $h_i(t)$ – T- периодические функции.

Действуя по схеме метода пограничных функций, получим соотношения

$$\bar u_0^{(-)}(x,t)=\varphi_1(x,t),\qquad \bar u_0^{(+)}(x,t)=\varphi_3(x,t)$$

(рассматриваем, для определённости, переход от $\varphi_1(x,t)$ к $\varphi_3(x,t)$). Функции $\bar u_i^{(-)}$, $\bar u_i^{(+)}$ для $i>0$ строятся по стандартной схеме, и на этом мы подробно останавливаться не будем. Точно так же не будем заниматься определением $\Pi_i u^{(-)}(\rho_0,t)$ и $R_i u^{(+)}(\rho_1,t)$, что хорошо известно.

Опишем более подробно процедуру построения $Q_i u^{(-)}$ и $Q_i u^{(+)}$.

Для $Q_0 u^{(-)}$ имеем задачу

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}Q_0u^{(-)}&=f(\varphi_1(h_0(t),t)+Q_0u^{(-)},h_0(t),t,0)\,;\\ Q_0u^{(-)}(0,t)&=-\varphi_1(h_0(t),t)\,,\quad Q_0u^{(-)}(-\infty,t)=0\,,\end{aligned}$$

а для $Q_0 u^{(+)}$ – задачу

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}Q_0u^{(+)}&=f(\varphi_3(h_0(t),t)+Q_0u^{(+)},h_0(t),t,0)\,;\\ Q_0u^{(+)}(0,t)&=-\varphi_3(h_0(t),t)\,,\quad Q_0u^{(+)}(\infty,t)=0\,.\end{aligned}$$

В силу (4) асимптотики $u^{(-)}$ и $u^{(+)}$ согласованы на кривой $x=h(t,\varepsilon)$ до непрерывности. Потребуем также, чтобы на этой кривой были согласованы до нерерывности и первые производные указанных асимптотик (условие C^1 - сшивания), т.е. при $x=h(t,\varepsilon)$ должно выполняться соотношение

$$\varepsilon\,\frac{\partial u^{(-)}}{\partial x}\bigg|_{x=h(t,\varepsilon)}=\varepsilon\,\frac{\partial u^{(+)}}{\partial x}\bigg|_{x=h(t,\varepsilon)}\,. \tag{8}$$

Введем функции

$$\tilde{u}^{(-)}(\xi,t) = \varphi_1(h_0(t),t) + Q_0u^{(-)}(\xi,t)\,,$$
$$\tilde{u}^{(+)}(\xi,t) = \varphi_3(h_0(t),t) + Q_0u^{(+)}(\xi,t)\,,$$

которые являются решениями задач

$$\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\tilde{u}^{(-)} = f(\tilde{u}^{(-)},h_0(t),t,0)\,, \quad \tilde{u}^{(-)}(0,t) = 0\,,\, \tilde{u}^{(-)}(-\infty,t) = \varphi_1(h_0(t),t) \tag{9}$$

и

$$\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\tilde{u}^{(+)} = f(\tilde{u}^{(+)},h_0(t),t,0)\,, \quad \tilde{u}^{(+)}(0,t) = 0\,,\, \tilde{u}^{(+)}(+\infty,t) = \varphi_3(h_0(t),t)\,. \tag{10}$$

Условие (8) дает в нулевом приближении по ε соотношение

$$\frac{\partial}{\partial\xi}Q_0u^{(-)}\bigg|_{\xi=0} = \frac{\partial}{\partial\xi}Q_0u^{(+)}\bigg|_{\xi=0}\,, \tag{11}$$

которое в переменных $\tilde{u}^{(-)}$ и $\tilde{u}^{(+)}$ примет вид

$$\frac{\partial\tilde{u}^{(-)}}{\partial\xi}(0,t) = \frac{\partial\tilde{u}^{(+)}}{\partial\xi}(0,t) \tag{12}$$

и представляет собой условие гладкого перехода $\tilde{u}^{(-)}$ в $\tilde{u}^{(+)}$.

Для выполнения этого соотношения необходимо, чтобы $I\Big(h_0(t),t\Big) = 0$. Однако в отличие от случая, рассмотренного в [1] (несбалансированная нелинейность), данное уравнение не позволяет найти $h_0(t)$ и, согласно требованию 2, является тождеством.

Функция $h_0(t)$ определится в следующем приближении. С этой целью нужно рассмотреть уравнения для $Q_1u^{(-)}$ и $Q_1u^{(+)}$. Для $Q_1u^{(-)}$ имеем

$$\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}Q_1u^{(-)} = \tilde{f}_uQ_1u^{(-)} + f_1^{(-)}\,; \tag{13}$$

$$Q_1u^{(-)}(0,t) = g_1^{(-)}\,, \quad Q_1u^{(-)}(-\infty,t) = 0$$

$$g_1^{(-)} = -\bar{u}_1^{(-)}(h_0(t),t) - h_1(t)\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}(h_0(t),t)\,,$$

$$f_1^{(-)} = \Big(\tilde{f}_u\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}(h_0(t),t) + \tilde{f}_x\Big)\Big(h_1(t)+\xi\Big) + \tilde{f}_u\bar{u}_1^{(-)}(h_0(t),t) + \tilde{f}_\varepsilon - h_0'(t)\frac{\partial}{\partial\xi}Q_0u^{(-)}\,.$$

Частные производные $\tilde{f}_u$, $\tilde{f}_x$ и $\tilde{f}_\varepsilon$ вычисляются в точке $\Big(\tilde{u}^{(-)},h_0(t),t,0\Big)$, что отмечено знаком $\tilde{}$.

Уравнение для $Q_1u^{(+)}$ выглядит так же, как (13), но при этом надо заменить индекс $^{(-)}$ на индекс $^{(+)}$, а функцию $\varphi_1(x)$ на $\varphi_3(x)$.

Введем функцию $\tilde{u}(\xi,t)$:

$$\tilde{u}(\xi,t) = \begin{cases} \tilde{u}^{(-)}(\xi,t) = \varphi_1(h_0(t),t) + Q_0u^{(-)}(\xi,t), & \xi<0 \\ \tilde{u}^{(+)}(\xi,t) = \varphi_3(h_0(t),t) + Q_0u^{(+)}(\xi,t), & \xi>0, \end{cases}$$

которая, очевидно, является непрерывной и гладкой во всей области. Поэтому далее индекс $^{(\pm)}$ в выражениях для $\tilde{u}^{(\pm)}$ можно опустить. По этой же причине индекс $^{(\pm)}$ отсутствует и в формулах $\tilde{f}_u$, $\tilde{f}_x$ и $\tilde{f}_\varepsilon$.

Функции $Q_1u^{(-)}$ и $Q_1u^{(+)}$ можно представить в виде

$$Q_1u^{(\pm)}(\xi,t) = g_1^{(\pm)}(t)\frac{\Phi(\xi,t)}{\Phi(0,t)} - \Phi(\xi,t)\int\limits_0^{\xi}\Phi^{-2}(\tau,t)\int\limits_{\tau}^{\pm\infty}\Phi(\sigma,t)f_1^{(\pm)}(\sigma,t)\,d\sigma d\tau \qquad (14)$$

(формула написана сразу для обеих функций), где $\Phi(\xi,t) = \dfrac{\partial\tilde{u}}{\partial\xi}$, причем $\Phi(\xi,t) > 0$ при всех ξ, t. Подчеркнем, что зависимость от t входящих в (14) функций является сложной: в более развернутой форме следовало бы писать три аргумента: $\xi, h_0(t), t$. Условие гладкости (8) в нулевом приближении привело к (11), а в следующем по ε приближении дает

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}(h_0(t),t) + \frac{\partial}{\partial\xi}Q_1u^{(-)}(0,t) = \frac{\partial\varphi_3}{\partial x}(h_0(t),t) + \frac{\partial}{\partial\xi}Q_1u^{(+)}(0,t)\,. \qquad (15)$$

Подставляя сюда выражения (14) для $Q_1u^{(-)}$ и $Q_1u^{(+)}$, приходим к дифференциальному уравнению относительно $h_0(t)$:

$$-h_0'(t)\int\limits_{-\infty}^{\infty}(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\xi})^2d\xi + \int\limits_{-\infty}^{\infty}(\tilde{f}_x\xi + \tilde{f}_\varepsilon)\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\xi}\,d\xi = 0\,. \qquad (16)$$

Функция $h_0(t)$ должна удовлетворять условию периодичности

$$h_0(t) = h_0(t+T)\,. \qquad (17)$$

Условие 3. *Пусть задача (16), (17) имеет при* $t \in (-\infty,+\infty)$ *изолированное периодическое решение* $0 < h_0(t) < 1$.

Таким образом $h_0(t)$ определено, а вместе с ним все члены асимптотики нулевого порядка.

Ввведем T-периодические функции

$$m(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\xi})^2d\xi, \qquad d(t) = -h_0'(t)\frac{\partial}{\partial h_0}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\xi})^2d\xi + \frac{\partial}{\partial h_0}\int\limits_{-\infty}^{\infty}[\,\tilde{f}_x\xi + \tilde{f}_\varepsilon\,]\,\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\xi}\,d\xi\,. \qquad (18)$$

Выписывая уравнения, определяющие $Q_iu^{(-)}$ и $Q_iu^{(+)}$ и следующие приближения в соотношении (8), по стандартной схеме получаем линейные задачи для $h_i(t)$:

$$-h_i'(t)\cdot m(t) + d(t)\cdot h_i(t) = f_i(t)\,, \qquad (19)$$

где $f_i(t)$ – известные T-периодические функции t.

Потребуем

Условие 4. *Пусть* $\dfrac{1}{T}\int\limits_0^T\dfrac{d(t)}{m(t)}\,dt \;\equiv\; d_0 \;<\; 0.$

Это неравенство гарантирует отсутствие нетривиальных T- периодических решений у однородного уравнения (19), следовательно задача (19) при любом $i = 1, 2, \ldots$ имеет единственное T- периодическое решение. Таким образом определяются все неизвестные функции $h_i(t)$ и все члены асимптотики $(5), (6)$.

4. Теорема существования периодической контрастной структуры.

Обозначим через $U_n(x,t,\varepsilon)$ частичные суммы порядка n построенных асимптотических рядов, в которых аргумент ξ у Q-функций заменён на $\Big(x - \sum\limits_{i=0}^{n+1} \varepsilon^i h_i(t)\Big)/\varepsilon$. В подобластях $D_n^{(-)}$ и $D_n^{(+)}$, на которые область D разделяется кривой $x = \sum\limits_{i=0}^{n+1} \varepsilon^i h_i(t)$, при построении U_n используются функции $Q_i u^{(-)}$ и $Q_i u^{(+)}$ соответственно. Имеет место следующее утверждение:

Теорема 1. *Если выполнены условия 1 – 4, то при достаточно малых ε существует решение $u(x,t,\varepsilon)$ задачи (1)–(3), являющееся контрастной структурой типа ступеньки, причем имеет место оценка*

$$\max_{\bar{D}} |u(x,t,\varepsilon) - U_n(x,t,\varepsilon)| < C\varepsilon^{n+1}.$$

Доказательство этого утверждения проводится при помощи асимптотического метода дифференциальных неравенств с использованием следующего результата [5]. Рассмотрим задачу

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t}\right) = f(u,x,t) \tag{20}$$

$$(x,t) \in D = \{(0 < x < 1) \times (-\infty < t < +\infty)\},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = g_0(t), \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(1,t) = g_1(t), \tag{21}$$

$$u(x,t) = u(x,t+T). \tag{22}$$

где $f(u,x,t)$, $g_0(t)$ и $g_1(t)$ – достаточно гладкие T-периодические по переменной t функции.

Определение. Периодические с периодом T по переменной t функции $\beta(x,t)$ и $\alpha(x,t)$ из класса $C^{2,1}(D) \cup C^{2,0}(\bar{D})$ называются соответственно верхним и нижним решениями задачи (20)– (22), если $\beta(x,t)$ удовлетворяет неравенствам

$$\left(\frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} - \frac{\partial \beta}{\partial t}\right) \le f(\beta,x,t) \quad \text{в } D \tag{23}$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial x}(0,t) \le g_0(t), \quad \frac{\partial \beta}{\partial x}(1,t) \ge g_1(t), \tag{24}$$

а $\alpha(x,t)$ – аналогичным неравенствам с противоположными знаками.

Теорема А. *Пусть существуют верхнее $\beta(x,t)$ и нижнее $\alpha(x,t)$ решения задачи (20)–(22), причем $\alpha(x,t) \le \beta(x,t)$ в D. Тогда, при определенных условиях гладкости функции $f(u,x,t)$ для $(x,t) \in \bar{D}$ и $u \in \big(\alpha(x,t)\,,\, \beta(x,t)\big)$, а также функций $g_0(t)$ и $g_1(t)$ при $-\infty < t < +\infty$, существует решение $u(x,t)$ задачи (20)–(22), удовлетворяющее неравенствам $\alpha(x,t) \le u(x,t) \le \beta(x,t)$.*

Замечание. Сформулированный результат остается справедливым и в том случае, когда функции $\beta(x,t)$ и $\alpha(x,t)$ непрерывны, а их производные по x имеют разрывы на некоторой кривой $x = h(t)$ из класса C^2, причем предельные значения производных на указанной кривой удовлетворяют условиям

$$\frac{\partial\beta(h(t)-0,t)}{\partial x} \ge \frac{\partial\beta(h(t)+0,t)}{\partial x}, \qquad \frac{\partial\alpha(h(t)-0,t)}{\partial x} \le \frac{\partial\alpha(h(t)+0,t)}{\partial x} \tag{25}$$

Верхнее и нижнее решения задачи (1)–(3) будем строить путем модификации членов асимптотического ряда аналогично тому, как это делалось в [6]. Например, в качестве верхнего решения можно взять функцию

$$\beta_{n+1}(x,t,\varepsilon) = \bar{u}_0(x,t) + \cdots + \varepsilon^n \bar{u}_n(x,t) + \varepsilon^{n+1}(\bar{u}_{n+1}(x,t) + \gamma) +$$

$$+ Q_{0\beta}u(\xi_\beta,t) + \varepsilon Q_{1\beta}u(\xi_\beta,t) + \cdots + \varepsilon^{n+1} Q_{n+1\beta}u(\xi_\beta,t) + \varepsilon^{n+2} Q_\beta(\xi_\beta,t) + \Pi_\beta u(\rho,t), \quad \text{где}$$

$$h_\beta(t,\varepsilon) = h_0(t) + \varepsilon h_1(t) + \cdots + \varepsilon^n(h_n(t) - v(t)), \qquad \xi_\beta = [\, x - h_\beta(t,\varepsilon)\,]/\varepsilon\,,$$

$\gamma > 0$ – некоторая постоянная, а $v(t) > 0$ – положительная периодическая по t функция, способ выбора которой будет указан далее.

Функции $Q_{i\beta}u(\xi_\beta,t)$ получаются по схеме [6] путем модификации уравнений для $Q_i u(\xi,t)$ с заменой ξ на ξ_β, $Q_\beta(\xi_\beta,t)$ обеспечивает непрерывность верхнего решения при $\xi_\beta = 0$, а $\Pi_\beta u(\rho,t)$ - выполнение дифференциальных неравенств (24) вблизи точек $x = 0$ и $x = 1$. Нижнее решение $\alpha_{n+1}(x,t,\varepsilon)$ имеет аналогичную структуру.

Неравенства (23) проверяются прямым вычислением (см. [6]), неравенство $\alpha_{n+1}(x,t,\varepsilon), \le \beta_{n+1}(x,t,\varepsilon)$ получается по схеме, незначительно отличающейся от предложенной в [6], и для доказательства теоремы 1 остается установить справедливость (25).

Напомним, что $\Phi(\xi,t) = \dfrac{\partial\tilde{u}(\xi,t)}{\partial\xi}$, причем $\Phi(\xi,t) > 0$. Обозначим $\dfrac{\partial\beta_{n+1}}{\partial x}^{(+)}$ и $\dfrac{\partial\beta_{n+1}}{\partial x}^{(-)}$ – предельные значения производных по разные стороны от кривой $x = h_\beta(t,\varepsilon)$. Тогда

$$\frac{\partial\beta_{n+1}}{\partial x}^{(+)} - \frac{\partial\beta_{n+1}}{\partial x}^{(-)} =$$

$$= -\frac{1}{\Phi(0,t)}\left\{ -m(t)\cdot(h_n - v(t))'_t + d(t)\cdot(h_n - v) - (f_n(t) + A(t)\cdot\gamma) \right\}\cdot\varepsilon^n + O(\varepsilon^{n+1}),$$

где $A(t)$ - известная T- периодическая непрерывная функция.

В силу уравнений (19) для $h_i(t)$ имеем

$$-h'_n(t)\cdot m(t) + d(t)\cdot h_n(t) - f_n(t) = 0,$$

и нужный знак скачка производной $\beta_{n+1}(x,t,\varepsilon)$ можно обеспечить путем надлежащего подбора $v(t)$. А именно, функция $v(t) > 0$ выбирается так, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{\partial\beta_{n+1}}{\partial x}^{(+)} - \frac{\partial\beta_{n+1}}{\partial x}^{(-)} \ge 0\,.$$

Для этого достаточно в качестве $v(t)$ взять положительное решение неравенства $-m(t)\cdot v_t + d(t)\cdot v \ < \ 0$. Несложно показать, что требование 4 обеспечивает существование такого решения.

Соответствующие неравенства для нижнего решения $\alpha_{n+1}(x,t,\varepsilon)$ проверяются аналогично. Из известных теорем сравнения (см. теорему А и замечание к ней) следует существование решения задачи (1)-(3), удовлетворяющего неравенству $\alpha_{n+1}(x,t,\varepsilon) \le u(x,t,\varepsilon) \le \ beta_{n+1}(x,t,\varepsilon)$, откуда и вытекает утверждение теоремы 1.

5. Устойчивость периодических контрастных структур.

Периодические решения задачи (1)-(3) можно рассматривать как решения соответствующей начально-краевой задачи на полубесконечном промежутке времени:

$$L[v] \equiv \varepsilon^2\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial t}\right) - f(v,x,t,\varepsilon) \ = \ 0 \tag{26}$$

$$(x,t)\in D = \{(0<x<1)\times(0<t<+\infty)\},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(0,t,\varepsilon) = \frac{\partial v}{\partial x}(1,t,\varepsilon) = 0\,, \qquad 0<t<+\infty \tag{27}$$

$$v(x,0,\varepsilon) = v^0(x,\varepsilon)\,, \qquad 0<x<1. \tag{28}$$

Очевидно, что если $v^0(x,\varepsilon) = u(x,0,\varepsilon)$, где $u(x,t,\varepsilon)\equiv u_p$ – решение задачи (1)–(3), то и задача (26)–(28) имеет решение $v(x,t,\varepsilon) = u(x,t,\varepsilon)\equiv u_p$. Вопрос его устойчивости в смысле Ляпунова решается следующим образом:

Теорема 2. *Пусть выполнены условия 1 – 4. Тогда решение $v(x,t,\varepsilon) = u_p$ (периодическая по времени t контрастная структура типа ступеньки) асимптотически устойчиво с локальной областью влияния не менее $[\alpha_5(x,t,\varepsilon)\,,\,\beta_5(x,t,\varepsilon)]$, и, следовательно, решение задачи (1)–(3) единственно в этой области.*

Доказательство теоремы 2 основано на асимптотическом методе дифференциальных неравенств. Будем искать верхнее и нижнее решения задачи (26)–(28) в виде $\alpha(x,t,\varepsilon) = u_p + (\alpha_n - u_p)e^{-\lambda(\varepsilon)t}$, $\beta(x,t,\varepsilon) = u_p + (\beta_n - u_p)e^{-\lambda(\varepsilon)t}$, где $\lambda(\varepsilon)>0$ будет указана ниже. Очевидно, что $\alpha\le\beta$, и для проверки классических теорем о дифференциальных неравенствах для параболических систем [7], достаточно показать, что $L[\alpha]\ \ge\ 0$, а $L[\beta]\ \le\ 0$. Подставляя указанные выше выражения для функции α и β и учитывая, что u_p является решением уравнения (1), нетрудно получить требуемые неравенства. Например, выражение для $L[\beta]$ в преобразуется к виду (для краткости в следующих формулах все аргументы у функций $f(u,x,t,\varepsilon)$ и $f_u(u,x,t,\varepsilon)$ опущены, кроме первого):

$$L[\beta] = e^{-\lambda t}\Bigg(\varepsilon^2\bigg(-\frac{\partial^2 u_p}{\partial x^2} + \frac{\partial u_p}{\partial t} + \frac{\partial^2 \beta_n}{\partial x^2} - \frac{\partial \beta_n}{\partial t} + \lambda(\beta_n - u_p)\bigg) -$$

$$-(\beta_n - u_p)\cdot f_u\Big(u_p + \theta(\beta_n - u_p)\,e^{-\lambda t}\Big)\Bigg) =$$

$$= e^{-\lambda t}\Bigg(\bigg[\varepsilon^2\bigg(\frac{\partial^2\beta_n}{\partial x^2} - \frac{\partial\beta_n}{\partial t}\bigg) - f(\beta_n)\bigg] - \bigg[\varepsilon^2\bigg(\frac{\partial^2 u_p}{\partial x^2} - \frac{\partial u_p}{\partial t}\bigg) - f(u_p)\bigg] + \varepsilon^2\lambda(\beta_n - u_p) +$$

$$+\left[f(\beta_n) - f(u_p) - (\beta_n - u_p)\cdot f_u\big(u_p+\theta(\beta_n-u_p)\,e^{-\lambda t}\big)\right]\Bigg) \qquad (0<\theta<1). \tag{29}$$

Пользуясь тем, что $\left[\varepsilon^2\left(\dfrac{\partial^2\beta_n}{\partial x^2}-\dfrac{\partial\beta_n}{\partial t}\right)-f(\beta_n)\right] = -\varepsilon^n\,g(x,t,\varepsilon)$, где $g(x,t,0)>0$ в $\bar D$, а также тем, что $(\beta_n-u_p)=O(\varepsilon^{n-2})$ (см. [5]) и $[f(\beta_n)-f(u_p)]-(\beta_n-u_p)\,f_u^*=O(\varepsilon^{2(n-2)})$, и выбирая $\lambda(\varepsilon)=\lambda_0$ достаточно малым, получим $L[\beta]<0$ при $n\geq 5$. Аналогично проверяется неравенство $L[\alpha]>0$. Итак, построенное выше периодическое решение, устойчиво с областью влияния по крайней мере $[\alpha_5,\beta_5]$.

Замечание. Изучив более внимательно структуру 1-го и 4-го слагаемых в (29), можно уточнить размеры области влияния устойчивого решения и получить аналогичный результат для $n=4$.

1. Нефедов Н.Н. Асимптотический метод дифференциальных неравенств для исследования периодических контрастных структур: существование, асимптотика, устойчивость.// Дифференц. уравнения. 2000. Т.36. N2. С.262–269.
2. Васильева А.Б., Омельченко О.Е. Периодические контрастные структуры типа ступеньки для сингулярно возмущенного параболического уравнения.// Дифференц. уравнения. 2000. Т.36. N2. С.209–218.
3. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф., Нефедов Н.Н. Контрастные структуры в сингулярно возмущенных задачах. // Фундамент. и прикл. математ. 1998, Т.4, С.799–851.
4. Волков В.Т., Нефедов Н.Н. О периодических решениях с пограничными слоями одной сингулярно возмущенной модели реакция-диффузия.// ЖВМиМФ, 1994, т. 34, N 8-9, с. 1307-1315.
5. Amman H. Periodic solutions of semilinear parabolic equations in nonlinear analysis.// N.Y.: Acad. Press, 1978.
6. Нефедов Н.Н. Метод дифференциальных неравенств для некоторых классов нелинейных сингулярно возмущённых задач с внутренними слоями.// Дифференц. уравнения. 1995. Т.31. N7. С.1142–1149.
7. Pao C.V. Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations.// Plenum Press. New York; London, 1992.

МГУ им. М.В. Ломоносова,
физический факультет, кафедра математики
Ленинские Горы,
119992, Москва, Россия
volkov@tarkus.ru, nefedov@phys.msu.su

Получено 13.12.2005