

Разделение переменных и интегральные многообразия в одной частной задаче о движении обобщенного волчка Ковалевской

МИХАИЛ П. ХАРЛАМОВ, АЛЕКСАНДР Ю. САВУШКИН

(Представлена И. А. Луковским)

Аннотация. В фазовом пространстве интегрируемой гамильтоновой системы с тремя степенями свободы, описывающей движение волчка типа С. В. Ковалевской в двойном постоянном силовом поле, выделено четырехмерное инвариантное многообразие. Показано, что оно состоит из критических движений, порождающих гладкий лист бифуркационной диаграммы, а динамическая система на нем гамильтонова с определенным подмножеством точек вырождения симплектической структуры. Найдено преобразование, разделяющее переменные в этой системе, в результате чего решения выписываются в эллиптических функциях времени. Полностью описана соответствующая фазовая топология.

2000 MSC. 70E17, 70E40, 37J35.

Ключевые слова и фразы. Волчок Ковалевской, двойное поле, инвариантное многообразие.

Введение

Уравнения вращения твердого тела вокруг неподвижной точки в двойном постоянном силовом поле имеют вид

$$\mathbf{I} \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{r}_1 \times \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{r}_2 \times \boldsymbol{\beta}, \quad (1)$$

$$\frac{d\boldsymbol{\alpha}}{dt} = \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \frac{d\boldsymbol{\beta}}{dt} = \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\omega},$$

где $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ — векторы, фиксированные в теле; $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ — векторы, неподвижные в инерциальном пространстве; \mathbf{I} — тензор инерции в неподвижной точке O ; $\boldsymbol{\omega}$ — мгновенная угловая скорость (все объекты

Статья поступила в редакцию 15.03.2004

выражены своими компонентами в некоторых осях, жестко связанных с телом).

Считая векторы \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 приложенными к точке O , назовем указанные ими точки подвижного пространства центрами оснащенности.

Система (1) является гамильтоновой на фазовом пространстве P^6 , заданном в $\mathbf{R}^9(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ геометрическими интегралами и диффеоморфном касательному расслоению $TSO(3)$.

В работе [2] в качестве физических моделей для уравнений (1) предложены задачи о движении намагниченного твердого тела в гравитационном и магнитном полях или твердого тела с постоянным в нем распределением электрического заряда в гравитационном и электрическом полях. Результаты [2], относящиеся к системе (1), более детально изложены в [3] в контексте исследования уравнений Эйлера на алгебрах Ли.

В общем случае, когда $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 \neq 0$, $\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta} \neq 0$, система (1) без дополнительных ограничений на параметры, в отличие от классических уравнений Эйлера-Пуассона, не сводится к гамильтоновой системе с двумя степенями свободы и, кроме интеграла энергии

$$H = \frac{1}{2} \mathbf{I} \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} - \mathbf{r}_1 \cdot \boldsymbol{\alpha} - \mathbf{r}_2 \cdot \boldsymbol{\beta},$$

не имеет на P^6 известных первых интегралов.

В [2] для системы (1) вводятся следующие предположения: в главных осях тензора инерции

$$O \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 \tag{2}$$

моменты инерции удовлетворяют условиям $I_1 = I_2 = 2I_3$, а векторы \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 параллельны экваториальной плоскости $O \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2$ и взаимно ортогональны. При $\boldsymbol{\beta} = 0$ задача переходит в интегрируемый случай С. В. Ковалевской [5] вращения тяжелого твердого тела. Поэтому задачу, предложенную в [2], в настоящей работе, для краткости, назовем обобщенным случаем Ковалевской, а случай $\boldsymbol{\beta} = 0$ — классическим.

Произволом в выборе единиц измерения и осей (2) можно распорядиться так, что

$$\mathbf{I} = \text{diag}\{2, 2, 1\}; \tag{3}$$

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{e}_2. \tag{4}$$

Для обобщенного случая Ковалевской в [2] указан новый общий интеграл, который в соглашениях (3), (4) записывается в виде

$$K = (\omega_1^2 - \omega_2^2 + \alpha_1 - \beta_2)^2 + (2\omega_1\omega_2 + \alpha_2 + \beta_1)^2. \tag{5}$$

Здесь и далее через $\omega_i, \alpha_i, \beta_i$ ($i = 1, 2, 3$) обозначены компоненты векторов $\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ в осях (2).

В [10] интеграл (5) обобщен на случай движения гиростата в линейном силовом поле — к телу со свойством (3) добавлен ротор, порождающий постоянный момент вдоль оси динамической симметрии. Как показано, например, в [4], составляющая момента, порожденная потенциальными силами, введенными в [10], сводима к виду, фигурирующему в уравнениях (1), со свойством (4).

Полная интегрируемость по Лиувиллю гиростата Ковалевской в двойном силовом поле доказана в [8]. Найдено представление Лакса уравнений типа (1) (с гироскопическим слагаемым в моменте внешних сил, как в [10]) при условиях (3), (4), содержащее спектральный параметр, характеристическое уравнение которого позволило указать новый первый интеграл, находящийся в инволюции с соответствующим обобщением интеграла (5) и переходящий в квадрат интеграла площадей при $\boldsymbol{\beta} = 0$. В [8] введены и многомерные аналоги задачи Ковалевской, намечен путь построения решений методом конечнозонного интегрирования. Эта программа реализована в [8] для классического волчка Ковалевской, в результате чего получены новые выражения для фазовых переменных в виде специальных ультраэллиптических функций времени. Явное интегрирование задачи о движении волчка Ковалевской в двойном поле, ее качественный или топологический анализ до сих пор не выполнены (см. также обзор в [4]).

Топологический анализ интегрируемой гамильтоновой системы предполагает, в тех или иных терминах, описание слоения фазового пространства на торы Лиувилля, что, в частности, требует выявления всех разделяющих случаев. Последние отвечают точкам бифуркационной диаграммы интегрального отображения и в фазовом пространстве формируются траекториями, целиком состоящими из точек, в которых первые интегралы зависимы.

В системе с тремя степенями свободы особые движения, соответствующие точке гладкого двумерного листа бифуркационной диаграммы, как правило, заполняют двумерные торы Лиувилля. Объединение таких торов по всем точкам листа представляет собой инвариантное подмножество фазового пространства, которое является, в окрестности своих точек общего положения, четырехмерным многообразием, и индуцированная динамическая система на нем должна быть гамильтоновой с двумя степенями свободы (различного рода вырождения ожидаемы на краях такого листа или в точках пересечения листов). Таким образом, инвариантные подмножества наибольшей размерности, состоящие из точек зависимости интегралов, задаются (по крайней мере, локально) системами двух инвариантных

соотношений вида

$$f_1 = 0, f_2 = 0. \quad (6)$$

Знание всех таких систем и исследование динамики на определяемых ими инвариантных многообразиях позволили бы в значительной степени приблизиться к решению проблемы топологического анализа задачи в целом.

Для обобщенного случая Ковалевской известны две системы вида (6).

Первая получена в [2]: рассмотрено многообразие

$$\{K = 0\} \subset P^6, \quad (7)$$

которое в силу структуры (5) задается двумя независимыми уравнениями $Z_1 = 0$, $Z_2 = 0$. Указан дополнительный частный интеграл — скобка Пуассона $\{Z_1, Z_2\}$. Топологический анализ возникающей гамильтоновой системы с двумя степенями свободы выполнен в [11]. Оказалось, что инвариантное множество всюду является гладким четырехмерным многообразием, но индуцированная симплектическая структура вырождается на множестве нулей дополнительного интеграла. Этот случай обобщает 1-й класс Аппельрота (класс Делоне) [1] движений тяжелого волчка Ковалевской.

Вторая система вида (6) найдена в [7]. Показано, что соответствующие движения при $\beta = 0$ переходят в так называемые особо замечательные движения 2-го и 3-го классов Аппельрота. Настоящая работа посвящена исследованию динамической системы на инвариантном подмножестве, указанном в [7].

Предварительно сделаем одно важное для дальнейшего замечание общего порядка. Фигурирующий в (1) момент внешних сил $\mathbf{r}_1 \times \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{r}_2 \times \boldsymbol{\beta}$ инвариантен относительно замены

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{r}}_1 \\ \tilde{\mathbf{r}}_2 \end{pmatrix} = \Theta \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \tilde{\boldsymbol{\alpha}} \\ \tilde{\boldsymbol{\beta}} \end{pmatrix} = (\Theta^T)^{-1} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\beta} \end{pmatrix}, \quad (8)$$

где Θ — произвольная невырожденная 2×2 -матрица. Поэтому априорное предположение в работах [2], [8] об ортогональности радиус-векторов центров оснащенности является излишним (достаточно, чтобы эти центры находились в экваториальной плоскости тела). Это утверждение тривиально — возможность ортогонализации любой из пар $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ или $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ указана, например, в [4]. Однако при этом отмечается, что в общем случае вторая пара ортогональной не будет. Также и в работах [2], [3], [8], [11], [7] сохраняется произвольный угол между $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$, что усложняет формулы.

Заметим, что если пара $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ уже сделана ортонормированной, то в (8) остается произвол в выборе $\Theta \in SO(2)$. При таком преобразовании новая пара радиус-векторов центров оснащенности по-прежнему останется ортонормированной и может быть использована в качестве экваториальных ортов главных осей (2) для сохранения свойства (4). В то же время, выбирая

$$\Theta = \begin{vmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix}, \quad \operatorname{tg} 2\theta = \frac{2\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta}}{\alpha^2 - \beta^2},$$

получим ортогональную пару $(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}, \tilde{\boldsymbol{\beta}})$.

Таким образом, без ограничения общности в дополнение к (4) можно полагать, что силовые поля ортогональны. Этот простой факт до сих пор, однако, не отмечался. Исключение избыточного параметра существенно упростило все последующие вычисления и позволило получить результаты в симметричном виде.

1. Инвариантное подмножество и его свойства

Далее рассматривается система (1) в предположениях (3), (4) с фазовым пространством P^6 , заданным соотношениями

$$\alpha^2 = a^2, \quad \beta^2 = b^2, \quad \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta} = 0. \quad (9)$$

Случай $a = b$ является особым — как указано в [10], при этом существует группа симметрий, порожденная преобразованиями конфигурационного пространства, и, как следствие, имеется циклический интеграл, линейный по угловым скоростям. Поэтому полагаем для определенности

$$a > b. \quad (10)$$

Общий интеграл задачи, найденный в [8], обозначим через G и запишем в виде

$$G = \frac{1}{4}(g_\alpha^2 + g_\beta^2) + \frac{1}{2}\omega_3 g_\gamma - b^2 \alpha_1 - a^2 \beta_2, \quad (11)$$

где g_α , g_β , g_γ — скалярные произведения кинетического момента $\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}$ с векторами $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta}$.

Введем функцию F — комбинированный первый интеграл уравнений (1), полагая

$$F = (2G - p^2 H)^2 - r^4 K,$$

где введены параметры

$$p^2 = a^2 + b^2, \quad r^2 = a^2 - b^2 \tag{12}$$

(последнее корректно в силу (10)).

Заметим, что нулевой уровень функции F задается одним из условий

$$2G - p^2H - r^2\sqrt{K} = 0; \tag{13}$$

$$2G - p^2H + r^2\sqrt{K} = 0, \tag{14}$$

которые при $\beta = 0$ переходят в уравнения соответственно 2-го и 3-го классов Аппельрота [1].

Определим подмножество $N \subset P^6$ как множество критических точек функции F , лежащих на уровне $F = 0$.

Множество N заведомо не пусто: ему принадлежат точки вида $\omega_1 = \omega_2 = 0, \alpha_1 - \beta_2 = 0, \alpha_2 + \beta_1 = 0$, которые являются критическими для K и обращают в ноль $2G - p^2H$.

Множество N является инвариантным относительно фазового потока (1) как множество критических точек общего интеграла.

Условие $dF|_{TN} = 0$ означает линейную зависимость в точках N дифференциалов функций H, K, G , откуда сразу же следует, что соотношение

$$(2g - p^2h)^2 - r^4k = 0 \tag{15}$$

на константы этих интегралов есть уравнение одного из листов бифуркационной диаграммы (полностью пока неизученной) обобщенного волчка Ковалевской.

Воспользуемся комплексной заменой переменных [7], обобщающей замену Ковалевской [5]:

$$\begin{aligned} x_1 &= (\alpha_1 - \beta_2) + i(\alpha_2 + \beta_1), & x_2 &= \overline{x_1}, \\ y_1 &= (\alpha_1 + \beta_2) + i(\alpha_2 - \beta_1), & y_2 &= \overline{y_1}, \\ z_1 &= \alpha_3 + i\beta_3, & z_2 &= \overline{z_1}, \\ w_1 &= \omega_1 + i\omega_2, & w_2 &= \overline{w_1}, & w_3 &= \omega_3. \end{aligned} \tag{16}$$

Обозначая далее штрихом дифференцирование по мнимому времени it , запишем уравнения движения в новых переменных:

$$\begin{aligned} x'_1 &= -x_1w_3 + z_1w_1, & x'_2 &= x_2w_3 - z_2w_2, \\ y'_1 &= -y_1w_3 + z_2w_1, & y'_2 &= y_2w_3 - z_1w_2, \\ 2z'_1 &= x_1w_2 - y_2w_1, & 2z'_2 &= -x_2w_1 + y_1w_2, \\ 2w'_1 &= -(w_1w_3 + z_1), & 2w'_2 &= w_2w_3 + z_2, & 2w'_3 &= y_2 - y_1. \end{aligned} \tag{17}$$

Ограничения (9) примут вид

$$\begin{aligned} z_1^2 + x_1 y_2 = r^2, \quad z_2^2 + x_2 y_1 = r^2, \\ x_1 x_2 + y_1 y_2 + 2z_1 z_2 = 2p^2. \end{aligned} \quad (18)$$

Далее вместо интеграла (11) удобно рассматривать другой общий интеграл, связанный линейно с G и H :

$$M = \frac{1}{r^4}(2G - p^2 H). \quad (19)$$

На уровне $F = 0$ имеем

$$K = r^4 M^2. \quad (20)$$

В переменных (16) интегралы H , K , M запишутся так:

$$\begin{aligned} H = w_1 w_2 + \frac{1}{2} w_3^2 - \frac{1}{2}(y_1 + y_2), \quad K = U_1 U_2, \\ M = -\frac{1}{r^4} F_1^2 + \frac{1}{2r^2}(U_1 + U_2). \end{aligned}$$

Здесь обозначено

$$\begin{aligned} F_1 = \sqrt{x_1 x_2} w_3 - \frac{1}{\sqrt{x_1 x_2}}(x_2 z_1 w_1 + x_1 z_2 w_2), \\ U_1 = \frac{x_2}{x_1}(w_1^2 + x_1), \quad U_2 = \frac{x_1}{x_2}(w_2^2 + x_2). \end{aligned}$$

Введем также функцию

$$F_2 = U_1 - U_2.$$

Предложение 1.1. В области $x_1 x_2 \neq 0$ инвариантное множество N задается системой функционально независимых уравнений

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0. \quad (21)$$

Доказательство. Представим соотношение (20) следующим образом:

$$\left[F_1^2 - \frac{r^2}{2}(\sqrt{U_1} - \sqrt{U_2})^2 \right] \left[F_1^2 - \frac{r^2}{2}(\sqrt{U_1} + \sqrt{U_2})^2 \right] = 0, \quad (22)$$

где $\sqrt{U_1}$, $\sqrt{U_2}$ выбраны комплексно сопряженными.

На нулевом уровне F функции F_1 , $\sqrt{U_1}$, $\sqrt{U_2}$ независимы всюду, кроме множества

$$w_1 w_2 = 0, \quad x_1 = x_2. \quad (23)$$

Поэтому условие критичности левой части (22) приводит к уравнениям (21). Однако и точки (23) этим уравнениям, очевидно, удовлетворяют. Остается заметить, что функции F_1 и F_2 на нулевом уровне F независимы всюду в своей области определения, включая и точки (23). \square

Система инвариантных соотношений (21) была получена в [7] без использования первых интегралов. Из данного здесь определения и предложения 1.1 следует, что она описывает некоторое гладкое четырехмерное многообразие (незамкнутое)

$$N^4 = N \cap \{x_1 x_2 \neq 0\},$$

причем N есть наименьшее инвариантное подмножество P^6 , содержащее N^4 .

Замечание 1.1. Можно показать, что в целом инвариантное множество N стратифицировано

$$N = \bigcup_{i=1}^4 N^i, \quad \dim N^i = i, \quad \partial N^i \subset \bigcup_{j=1}^{i-1} N^j.$$

При этом все N^i с $i < 4$, в силу предложения 1.1, лежат в подмножестве фазового пространства, заданном уравнением

$$x_1 x_2 = 0 \tag{24}$$

(например, $N^1 = \{w_1 w_2 = 0, w_3 = 0, x_1 x_2 = 0\}$ диффеоморфно $2S^1$). Поэтому возникновение особенности (24) в выражениях F_1, F_2 не случайно. Если в (21) избавиться от знаменателей, то решения полученной системы будут содержать все четырехмерное многообразие (24), которое не является целиком критическим для функции F (однако, всюду на нем $F = 0$). В частности, все выпущенные из него траектории заполняют в P^6 множество, являющееся почти всюду пятимерным многообразием.

Следующее утверждение показывает, что, ограничиваясь соотношениями (21), то есть исследуя динамику лишь на N^4 , мы не теряем ни одной траектории динамической системы на N .

Предложение 1.2. *Множество (24) не содержит подмножеств, инвариантных относительно фазового потока системы (1).*

Для доказательства оказывается необходимым вычислить производные от $x_1 x_2$ в силу уравнений (17) до четвертого порядка, после

чего убеждаемся, что их одновременное обращение в ноль на множестве (24) невозможно. Следует отметить, что столь сильное вырождение этого подмножества проявляется и для движений тяжелого волчка Ковалевской — условие (24) там означает прохождение оси динамической симметрии волчка через вертикаль. Исследованию этого явления уделено особое внимание как в классических работах (например, в [1]), так и в недавних исследованиях, связанных с компьютерной анимацией движения (см. [9], где имеется и обширная библиография работ этого направления по тяжелому волчку Ковалевской).

Предложение 1.3. *Дифференциальная 2-форма, индуцированная на многообразии N^4 симплектической структурой пространства P^6 , обеспечивающей гамильтоновость уравнений (1), является невырожденной всюду, за исключением подмножества, заданного уравнением $L = 0$, где*

$$L = \frac{1}{\sqrt{x_1 x_2}} \left[w_1 w_2 + \frac{x_1 x_2 + z_1 z_2}{2r^2} (U_1 + U_2) \right].$$

Доказательство. Скобки Пуассона функций на $\mathbf{R}^9(\omega, \alpha, \beta)$, определяющие указанную симплектическую структуру, вычисляются по правилам [2]

$$\begin{aligned} \{g_i, g_j\} &= \varepsilon_{ijk} g_k, & \{g_i, \alpha_j\} &= \varepsilon_{ijk} \alpha_k, & \{g_i, \beta_j\} &= \varepsilon_{ijk} \beta_k, \\ \{\alpha_i, \alpha_j\} &= \{\beta_i, \beta_j\} = \{\alpha_i, \beta_j\} &= 0, \end{aligned} \quad (25)$$

где $g_1 = 2\omega_1$, $g_2 = 2\omega_2$, $g_3 = \omega_3$ — компоненты момента количества движения.

Переходя в (25) к переменным (16), вычислим скобку Пуассона функций F_1 , F_2 . Получим, с учетом равенств (21),

$$\{F_1, F_2\} = -r^2 L.$$

Касательное пространство $T_q N^4$ является косоортогональным дополнением линейной оболочки векторов, включенных в гамильтоновы поля с гамильтонианами F_1 , F_2 . По формуле Э. Картана (см., например, [6], стр. 231) ограничение симплектической структуры на $T_q N^4$ невырождено при условии $\{F_1, F_2\}(q) \neq 0$.

□

Предложение 1.4. *Функция L является первым интегралом индуцированной динамической системы на N^4 , находящимся в инволюции с интегралом M .*

Доказательство. Как показано в [7], в силу (17) выполнено

$$F_1' = \mu_1 F_2, \quad F_2' = \mu_2 F_1,$$

где μ_1, μ_2 — функции, гладкие в окрестности N^4 . Применим, с учетом этого равенства, тождество Якоби к функциям H, F_1, F_2 . Получим, что двойная скобка Пуассона $\{H, \{F_1, F_2\}\}$ есть линейная комбинация функций F_1, F_2 . Поэтому $L' \equiv 0$ на множестве (21).

Непосредственно проверяется, что при условиях (21) имеет место следующая связь:

$$L^2 = 2p^2 M^2 + 2HM + 1. \tag{26}$$

Поэтому

$$L\{L, M\} = M\{H, M\} \equiv 0.$$

Следовательно, $\{L, M\} = 0$ при $L \neq 0$. Но тогда по непрерывности $\{L, M\} = 0$ всюду на N^4 . \square

Итак, на гладкой части N^4 инвариантного подмножества N , полностью определяющей всю динамику на N , уравнения движения обобщенного волчка Ковалевской представляют собой гамильтонову систему с двумя степенями свободы с замкнутым в N^4 и нигде не плотным подмножеством точек вырождения симплектической структуры.

2. Аналитическое решение

Согласно предложению 1.4, для интегрирования уравнений движения на множестве N можно воспользоваться парой интегралов M, L . Исходные общие интегралы H, K, G выражаются через них в силу (19), (20), (26).

Теорема 2.1. *На произвольном интегральном многообразии*

$$J_{m,\ell} = \{M = m, L = \ell\} \subset N \tag{27}$$

уравнения движения разделяются в переменных

$$s_1 = \frac{x_1 x_2 + z_1 z_2 + r^2}{2\sqrt{x_1 x_2}}, \quad s_2 = \frac{x_1 x_2 + z_1 z_2 - r^2}{2\sqrt{x_1 x_2}} \tag{28}$$

и записываются в виде

$$\begin{aligned} s_1' &= \sqrt{s_1^2 - a^2} \sqrt{ms_1^2 - \ell s_1 + \frac{1}{4m}(\ell^2 - 1)}, \\ s_2' &= \sqrt{s_2^2 - b^2} \sqrt{ms_2^2 - \ell s_2 + \frac{1}{4m}(\ell^2 - 1)}. \end{aligned} \tag{29}$$

Доказательство. В силу первого уравнения (21) функция M принимает на N вид

$$M = \frac{1}{2r^2}(U_1 + U_2),$$

а в силу второго имеем $U_1 = U_2$. Поэтому уравнение интеграла M дает

$$U_1 = r^2m, \quad U_2 = r^2m. \quad (30)$$

Выразим w_3 из первого уравнения (21), а w_1, w_2 — из уравнений (30):

$$w_3 = \frac{z_1w_1}{x_1} + \frac{z_2w_2}{x_2}, \quad w_2 = \sqrt{\frac{x_2}{x_1}}R_1, \quad w_1 = \sqrt{\frac{x_1}{x_2}}R_2. \quad (31)$$

Здесь обозначено

$$R_1 = \sqrt{r^2m - x_1}, \quad R_2 = \sqrt{r^2m - x_2}. \quad (32)$$

Подставляя эти значения в уравнение интеграла L , получаем

$$m(x^2 + z^2) - \ell x + \sqrt{r^4m^2 - 2r^2mx \cos \sigma + x^2} = 0. \quad (33)$$

Переменные x, z, σ введены так, что

$$x^2 = x_1x_2, \quad z^2 = z_1z_2, \quad x_1 + x_2 = 2x \cos \sigma, \quad (34)$$

а радикал в (33) соответствует w_1w_2 , то есть неотрицателен. Остальные используемые радикалы, включая R_1, R_2 , являются алгебраическими.

Уравнение (33) дает

$$R_1R_2 = \ell x - m(x^2 + z^2),$$

$$R_1^2 + R_2^2 = \frac{1}{r^2m} \{[\ell x - m(x^2 + z^2)]^2 - x^2\} + r^2m,$$

откуда, вводя многочлен

$$\Phi(s) = 4ms^2 - 4\ell s + \frac{1}{m}(\ell^2 - 1),$$

получаем выражения в переменных (28)

$$R_1 + R_2 = \frac{r}{s_1 - s_2} \sqrt{\Phi(s_2)}, \quad R_1 - R_2 = \frac{r}{s_1 - s_2} \sqrt{\Phi(s_1)}. \quad (35)$$

Из ограничений (18) в обозначениях (34) имеем

$$(z_1 \pm z_2)^2 = \frac{1}{r^2} [(x^2 + z^2 \pm r^2)^2 - 2x^2(p^2 \pm r^2)],$$

что в переменных (28) приводит к выражениям

$$z_1 + z_2 = \frac{2r}{s_1 - s_2} \sqrt{s_1^2 - a^2}, \quad z_1 - z_2 = \frac{2r}{s_1 - s_2} \sqrt{s_2^2 - b^2}. \quad (36)$$

Продифференцируем (28) в силу уравнений (17). С учетом (31) получим

$$s_1' = \frac{r^2}{4x^2} (z_1 + z_2)(R_1 - R_2), \quad s_2' = \frac{r^2}{4x^2} (z_1 - z_2)(R_1 + R_2).$$

Подставляя сюда выражения (35), (36), приходим к системе (29). □

Замечание 2.1. Полученные уравнения, очевидно, интегрируются в эллиптических функциях времени. Решения выписываются в функциях Якоби с использованием стандартной техники. Их конкретный вид зависит от расположения корней многочленов под радикалами в правых частях. Бифуркационные решения систем такого типа отвечают стационарным точкам одного из уравнений, то есть наличию кратного корня у многочлена

$$(s^2 - a^2)(s^2 - b^2)\Phi(s). \quad (37)$$

По соображениям размерности исходные фазовые переменные на многообразии (27) выражаются через s_1, s_2 , но, вообще говоря, многозначными функциями. Покажем, что эти выражения носят достаточно простую алгебраическую форму.

Введем сокращенные обозначения:

$$S_1 = \sqrt{s_1^2 - a^2}, \quad \varphi_1 = \sqrt{-\Phi(s_1)}, \quad (38)$$

$$S_2 = \sqrt{b^2 - s_2^2}, \quad \varphi_2 = \sqrt{\Phi(s_2)};$$

$$\psi = 4ms_1s_2 - 2\ell(s_1 + s_2) + \frac{1}{m}(\ell^2 - 1). \quad (39)$$

Теорема 2.2. *На совместном уровне первых интегралов (27) фазовые переменные обобщенного случая Ковалевской с учетом обозначений (38), (39) выражаются через переменные (28) следующим образом:*

$$\alpha_1 = \frac{1}{2(s_1 - s_2)^2} [(s_1s_2 - a^2)\psi + S_1S_2\varphi_1\varphi_2],$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2(s_1 - s_2)^2} [(s_1s_2 - a^2)\varphi_1\varphi_2 - S_1S_2\psi],$$

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= -\frac{1}{2(s_1 - s_2)^2}[(s_1 s_2 - b^2)\varphi_1 \varphi_2 - S_1 S_2 \psi], \\
\beta_2 &= \frac{1}{2(s_1 - s_2)^2}[(s_1 s_2 - b^2)\psi + S_1 S_2 \varphi_1 \varphi_2], \\
\alpha_3 &= \frac{r}{s_1 - s_2} S_1, \quad \beta_3 = \frac{r}{s_1 - s_2} S_2, \\
\omega_1 &= \frac{r}{2(s_1 - s_2)}(\ell - 2ms_1)\varphi_2, \quad \omega_2 = \frac{r}{2(s_1 - s_2)}(\ell - 2ms_2)\varphi_1, \\
\omega_3 &= \frac{1}{s_1 - s_2}(S_2 \varphi_1 - S_1 \varphi_2).
\end{aligned} \tag{40}$$

Доказательство. Условия совместности ограничений (18) в переменных x, z с учетом обозначений (12) принимают вид

$$x^2 + z^2 + r^2 \geq 2a|x|, \quad |x^2 + z^2 - r^2| \leq 2b|x|,$$

откуда для переменных (28) определяются естественные границы изменения

$$s_1^2 \geq a^2, \quad s_2^2 \leq b^2. \tag{41}$$

Поэтому запись уравнений (29) в вещественной форме приводит, при заданных m, ℓ , к тому, что область возможности движения на плоскости (s_1, s_2) определяется, в дополнение к (41), неравенствами

$$\Phi(s_1) \leq 0, \quad \Phi(s_2) \geq 0. \tag{42}$$

В частности, на траекториях рассматриваемой системы все величины (38) вещественны. Выражения через s_1, s_2 комплексных переменных $x_1, x_2, z_1, z_2, w_1, w_2, w_3$ получим последовательно: из (35) с учетом (32), из (36), и далее из (31). После этого переменные y_1, y_2 находятся из первых двух соотношений (18). Делая замену, обратную к (16), придем к искомым зависимостям. \square

Заметим, что для первого уравнения (29) значение $s_1 = \infty$ является обычным (в правой части под радикалом многочлен четной степени) и, если включено в область возможности движения, достигается за конечное время. Точно так же, и в выражениях (40) особенности при этом в действительности нет, что устанавливается заменой $s_1 \mapsto 1/s_1$. Тем самым, в частности, аналитически выражены все случаи прохождения траекторий через множество (24).

Итак, получено полное аналитическое решение задачи на инвариантном множестве N .

3. Фазовая топология

В регулярном случае интегральное многообразие $J_{m,\ell}$ состоит из двумерных торов Лиувилля. Их перестройки порождают бифуркационную диаграмму системы на N , которую естественно рассматривать в плоскости констант использованных интегралов, то есть как множество критических значений отображения

$$J = M \times L : N \rightarrow \mathbf{R}^2. \tag{43}$$

Теорема 3.1. *Бифуркационная диаграмма отображения (43) представляет собой часть системы прямых*

$$\ell = -2ma \pm 1, \ell = 2ma \pm 1, \ell = -2mb \pm 1, \ell = 2mb \pm 1 \tag{44}$$

и координатных осей плоскости (ℓ, m) , лежащую в полуплоскости $\ell \geq 0$ и заданную условиями существования вещественных решений

$$\begin{aligned} \ell &\geq \max(2ma - 1, -2mb + 1), & m > 0; \\ \ell &\leq -2mb + 1, & m < 0; \\ \ell &= 1, & m = 0. \end{aligned} \tag{45}$$

Доказательство. Согласно замечанию 2.1 в диаграмму включается дискриминантное множество многочлена (37), состоящее из прямых (44) (в части, отвечающей существованию движений).

К диаграмме необходимо добавить и точки координатных осей плоскости (m, ℓ) , входящие в $J(N)$. Можно показать, что значения $m = 0$ и $\ell = 0$ достигаются, в частности, на подмножествах $N^i (i < 4)$, где N теряет гладкость (см. замечание 1.1). Приведем непосредственное обоснование.

Уравнения (29) выдерживают предельный переход $m \rightarrow 0$. При этом из соотношения (26) имеем $|\ell| \rightarrow 1, (\ell^2 - 1)/2m \rightarrow h$. Однако степень многочленов под радикалами понижается до трех, что изменяет вид решений. Кроме того, на множестве $N \cap \{M = 0\}$, очевидно, и $K = 0$, то есть соответствующие движения являются общими с классом (7) (интересно отметить, что, как показано в [11], именно на таких движениях вырождается ограничение симплектической структуры на многообразии (7)). Поэтому значение $m = 0$ следует считать бифуркационным.

С другой стороны, интегральная поверхность $J_{m,\ell}$ инвариантна относительно инверсии

$$(\alpha_3, \beta_3, \omega_3) \mapsto (-\alpha_3, -\beta_3, -\omega_3).$$

В формулах (40) такая инверсия достигается либо заменой знака радикалов S_1, S_2 , либо подстановкой $(\ell, s_1, s_2) \mapsto (-\ell, -s_1, -s_2)$. Отсюда следует, что $J_{m,\ell}$ и $J_{m,-\ell}$ являются одним и тем же подмножеством фазового пространства. Поэтому необходимо ограничиться значениями ℓ одного знака (для определенности возьмем далее неотрицательные), а ось $\ell = 0$ становится внешней границей области существования движений на плоскости констант интегралов. Отметим, что нулевое значение ℓ возможно, как показывает уравнение (33), лишь при отрицательных m .

Итак, в дополнение к (44) в диаграмму следует включить точку $\{m = 0, \ell = 1\}$ и полуось

$$\{\ell = 0, m < 0\}. \quad (46)$$

Исследуя совместность (41), (42), найдем фактическую область существования движений в виде (45). \square

На рис. 1 занумерованы определяемые диаграммой области 1-9 на плоскости (m, ℓ) с различным типом интегральных поверхностей (27). В заштрихованной части движение невозможно.

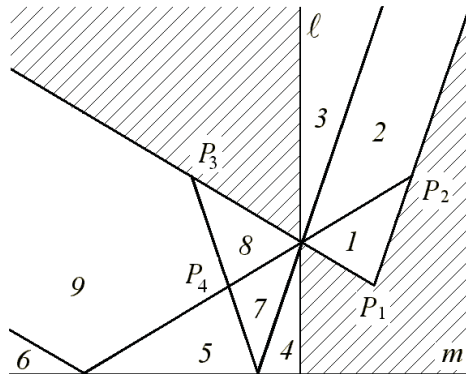


Рис. 1: Бифуркационная диаграмма и области существования движений

Для того чтобы установить количество торов в составе регулярного многообразия, заметим, что выражения (40) дают однозначную зависимость фазовых переменных от двух наборов величин

$$(s_1, S_1, \varphi_1), \quad (s_2, S_2, \varphi_2). \quad (47)$$

При этом знаки радикалов (38) на каждом $J_{m,\ell}$ произвольны. Но вдоль траектории некоторые из радикалов принимают нулевое значение, после чего меняют знак. Тогда пара точек, отличающаяся знаком

такого радикала, лежит на одной связной компоненте $J_{m,\ell}$. Следовательно, количество связных компонент регулярного интегрального многообразия равно 2^n , где n — количество величин (38), не обращающихся в ноль вдоль траектории. Значение n устанавливается по расположению корней многочлена (37) и не превышает 2.

Предложение 3.1. *В соответствии с нумерацией областей на рис. 1 регулярные интегральные многообразия $J_{m,\ell}$ таковы: а) \mathbf{T}^2 в областях 1, 8; б) $2\mathbf{T}^2$ в областях 2, 7, 9; в) $4\mathbf{T}^2$ в областях 3–6.*

Тип критических интегральных поверхностей установим, заметив, что в каждом из трехмерных пространств наборов (47) равенства (38) задают пару цилиндров (эллиптических или гиперболических) с взаимно ортогональными образующими. На прямых (44) пара цилиндров, отвечающая одной из переменных s_1, s_2 , имеет точку касания. Тогда линия их пересечения — “восьмерка” $S^1 \vee S^1$. Таким образом, на отрезках прямых (44) между точками их пересечения, внутренних для области (45), интегральная поверхность состоит из компонент, гомеоморфных произведению $S^1 \times (S^1 \vee S^1)$. При переходе через такой отрезок происходит одна из стандартных для систем с двумя степенями свободы бифуркаций $\mathbf{T}^2 \rightarrow 2\mathbf{T}^2$. Количество связных компонент вида $S^1 \times (S^1 \vee S^1)$ в составе критического $J_{m,\ell}$ определяется по количеству торов в смежных областях. Собственно критические периодические траектории (след центра “восьмерки”) — это движения, в которых одна из переменных s_1, s_2 остается постоянной и равной кратному корню соответствующего многочлена под радикалом. При этом либо $S_1 \equiv 0, \varphi_1 \equiv 0$, либо $S_2 \equiv 0, \varphi_2 \equiv 0$. Тогда из выражений (40) сразу же получаем, что в первом случае $\omega_2 = \omega_3 \equiv 0$, а во втором $\omega_1 = \omega_3 \equiv 0$. Тело совершает маятниковые движения, в которых радиус-вектор одного из центров оснащенности постоянно направлен вдоль соответствующего силового поля. При стремлении к внешней границе области (45), за исключением полупрямой (46), торы вырождаются в окружности — периодические решения того же маятникового типа, а поверхности $S^1 \times (S^1 \vee S^1)$ — в “восьмерки”.

На полупрямой (46) критических одночастотных движений, очевидно, не возникает. Соответствующая бифуркация на отрезках, прилегающих к областям 5 и 6, выражается в том, что число связных компонент $J_{m,0}$ вдвое меньше, чем в близлежащей регулярной точке плоскости (m, ℓ) . Это так называемые минимальные торы. Переход из области 4 к отрезку граничного множества (46) не сопровождается падением количества компонент $J_{m,\ell}$, а все циклы, гомотопные некоторому отмеченному, складываются вдвое, так что каждая компонента дважды накрывает предельную. В достаточно гладком случае

(например, при условии, что интеграл L является боттовским на соответствующем гладком уровне интеграла M) результатом оказалась бы бутылка Клейна (см, например, [6]), но явные уравнения (40) говорят о том, что это не так. Вероятно, имеется связь этого явления с вырождением индуцированной симплектической структуры.

Отметим, наконец, узловые точки, обозначенные на рис. 1 как P_1 – P_4 . При таких значениях констант интегралов на поверхностях $J_{m,\ell}$ имеется по одной неподвижной точке. Это положения равновесия тела, и в них оба центра оснащённости лежат на соответствующих им осях силовых полей, так что момент сил равен нулю. Из них одно устойчиво — в P_1 интегральная поверхность состоит из одной неподвижной точки. Остальные три неустойчивы — как отмечено выше, в точках P_2 , P_3 интегральная поверхность гомеоморфна “восьмерке”, а в точке P_4 она представляет собой следующую конструкцию: четыре прямоугольника (заполненных двоякоасимптотическими к положению равновесия траекториями) приклеены сторонами к букету четырех окружностей, так что их вершины склеены в одну точку.

Все перечисленные явления легко устанавливаются анализом выражений (40) и взаимного расположения цилиндров, образованных в пространствах (47).

Заключение

В представленной работе полностью исследованы движения обобщенного волчка Ковалевской, которые для задачи в целом служат критическими и порождают бифуркации трехмерных торов Лиувилля при пересечении листа бифуркационной диаграммы $\Sigma \subset \mathbf{R}^3$ общих интегралов задачи, определенного уравнением (15). Из неравенств (45) выводятся уравнения границы той части этого листа, которая отвечает существованию действительно критических движений, то есть входит в состав Σ .

Из выражения (22), служащего уравнением всей интегральной поверхности в фазовом пространстве P^6 для набора констант интегралов, связанного уравнением (15), следует, что, как и в случае тяжелого волчка Ковалевской (2-й и 3-й классы Аппельрота), прямая $\{k = 0, 2g = p^2h\}$ разбивает лист (15) на два класса. В первом классе (ему отвечает соотношение (13) и первый, неотрицательно определенный, сомножитель в (22)) найденные критические для исходной системы интегральные многообразия исчерпывают всю соответствующую интегральную поверхность в P^6 , являясь пределом концентрического семейства трехмерных торов, и в этом смысле устойчивы в P^6 . Во втором классе (соотношение (14) и второй, гиперболического

типа, сомножитель в (22)) все найденные критические поверхности в P^6 гиперболически неустойчивы — на том же уровне трех первых интегралов имеются траектории, состоящие из регулярных точек и двоякоасимптотические к соответствующим двумерным торах системы на исследованном инвариантном множестве.

Литература

- [1] Г. Г. Апельрот, *Не вполне симметричные тяжелые гироскопы*. В кн.: Движение твердого тела вокруг неподвижной точки. М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1940, 61–156.
- [2] О. И. Богоявленский, *Два интегрируемых случая динамики твердого тела в силовом поле* // ДАН СССР. **275** (1984), №6, 1359–1363.
- [3] О. И. Богоявленский, *Интегрируемые уравнения Эйлера на алгебрах Ли, возникающие в задачах математической физики* // Изв. АН СССР, сер. матем. **48** (1984), №5, 883–937.
- [4] А. В. Борисов, И. С. Мамаев, *Динамика твердого тела*. Ижевск: РХД, 2001.
- [5] С. В. Ковалевская, *Задача о вращении твердого тела около неподвижной точки*. В кн.: С. В. Ковалевская. Научные работы. М.: Изд-во АН СССР, 1948, 153–220.
- [6] А. Т. Фоменко, *Симплектическая геометрия. Методы и приложения*. Изд-во МГУ, 1988.
- [7] М. П. Харламов, *Один класс решений с двумя инвариантными соотношениями задачи о движении волчка Ковалевской в двойном постоянном поле* // Механика твердого тела (2002), вып. 32, 32–38.
- [8] A. I. Bobenko, A. G. Reyman, M. A. Semenov-Tian-Shansky, *The Kowalewski top 99 years later: a Lax pair, generalizations and explicit solutions* // Commun. Math. Phys. **122** (1989), N2, 321–354.
- [9] P. H. Richter, H. R. Dullin, A. Wittek, *Kovalevskaya Top. Film C1961* // Techn. Wiss./Naturw. (1997), N13, 33–96.
- [10] H. Yehia, *New integrable cases in the dynamics of rigid bodies* // Mech. Res. Commun. **13** (1986), N3, 169–172.
- [11] D. B. Zotev, *Fomenko-Zieschang invariant in the Bogoyavlenskyy case* // Регулярная и хаотическая динамика. **5** (2000), N4, 437–458.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Михаил Павлович Харламов Центр компьютерной техники,
Волгоградская академия госслужбы,
ул. Гагарина 8, Волгоград,
Россия
E-Mail: mharlamov@vags.ru

**Александр
Юрьевич
Савушкин**

Кафедра информационных систем,
Волгоградская академия госслужбы,
ул. Гагарина 8, Волгоград,
Россия
E-Mail: kismm@vags.ru