Український математичний вісник
Том 1 **(2004)**, № 4, 501 – 517

Задача з нелокальними умовами для систем рівнянь з частинними похідними, не розв'язаних відносно старшої похідної за часом

Олег Дмитрович Власій, Богдан Йосипович Пташник

(*Представлена Є. Я. Хрусловим*)

Анотація. Для системи рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами, не розв'язаних відносно старшої похідної за часом, досліджено коректність задачі з нелокальними двоточковими умовами за часовою змінною та умовами періодичності за просторовими змінними. Для оцінок знизу малих знаменників, що виникають при побудові розв'язку задачі, використано метричний підхід.

2000 MSC. 35G15.

Ключові слова та фрази. Нелокальні умови; рівняння, не розв'язані відносно старшої похідної; еліптичний оператор; малі знаменники; міра Лебега.

Диференціальні рівняння, не розв'язані відносно старшої похідної за часом, виникають при дослідженні багатьох задач гідродинаміки [1–3], при розгляді усталеної фільтрації однорідної рідини в тріщинуватих породах [4], при описанні горизонтально-поперечних хвиль в океані [5] тощо. Ці рівняння не задовольняють умови Коші-Ковалевської. Навіть найпростіші задачі для них не завжди є розв'язними. Для таких рівнянь своєрідними є асимптотичні властивості розв'язків і спектральні задачі.

Основи теорії рівнянь, не розв'язаних відносно старшої похідної за часом, закладені в роботах С. Л. Соболєва та його учнів [1, 2, 6, 7, 8], які стосувалися рівняння

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta u + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0, \qquad n = 3,$$

Стаття надійшла в редакцію 27.05.2004

яке тепер називають рівнянням Соболєва.

Задачі з початковими, локальними крайовими та локальними багатоточковими умовами за часовою змінною для диференціальних та диференціально-операторних рівнянь типу рівнянь Соболєва досліджувались у працях [9–18] та ін.

Задачі з нелокальними умовами за часовою змінною для скалярних рівнянь, не розв'язаних відносно старшої похідної за часом, досліджені у працях [19–21].

Що стосується нелокальних задач для рівнянь із частинними похідними, розв'язаних відносно старшої похідної, то вони досліджувались упродовж останніх 45 років у різних аспектах багатьма авторами (див., наприклад, праці [22–30] і бібліографію в них).

Зауважимо, що задачі з нелокальними умовами для рівнянь із частинними похідними є, взагалі, умовно коректними, а їх розв'язність в обмежених областях у багатьох випадках пов'язана з проблемою малих знаменників.

Дана праця поширює дослідження, проведені в [19] та [21] на системи рівнянь. У статті вивчається задача з нелокальними умовами за змінною t та умовами періодичності за $x=(x_1,\dots,x_p)$ для системи рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами, не розв'язаних відносно старшої похідної за часом. Встановлено умови існування та єдиності класичного розв'язку задачі. Для оцінювання знизу малих знаменників, що виникають при побудові розв'язку задачі, використано метричний підхід.

1. Будемо використовувати такі позначення:
$\mathbb{Z}$ ($\mathbb{Z}_+$) — множина всіх цілих (невід'ємних цілих) чисел; $\mathbb{Z}^p$ ($\mathbb{Z}^p_+$) — множина точок простору $\mathbb{R}^p$ з цілими (невід'ємними цілими) координатами;
$x=(x_1,\dots,x_p)\in\mathbb{R}^p$, $(t,x)=(t,x_1,\dots,x_p)\in\mathbb{R}^{p+1}$, $k=(k_1,\dots,k_p)\in\mathbb{Z}^p$, $|k|=|k_1|+\ldots+|k_p|$, $\|k\|=(k_1^2+\ldots+k_p^2)^{1/2}$, $\|\tilde{k}\|=(1+k_1^2+\ldots+k_p^2)^{1/2}$, $(k,x)=k_1x_1+\ldots+k_px_p$, $h=(h_1,\dots,h_p)\in\mathbb{Z}^p_+$, $|h|=h_1+\ldots+h_p$, $k^h=k_1^{h_1}\cdots k_p^{h_p}$; $D_t=\partial/\partial t$, $D=(D_1,\dots,D_p)$, де $D_j=\partial/i\partial x_j$, $D^h=D_1^{h_1}\cdots D_p^{h_p}$; Ω — p-вимірний тор $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^p$; $Q=(0,T)\times\Omega$;
$H_\psi(\Omega),\psi\geqslant 0,$ — гільбертовий простір 2π-періодичних за змінними $x_1,\dots,x_p$ комплекснозначних функцій $\varphi(x)=\sum\limits_{|k|\geqslant 0}\varphi_k\exp(ik,x)$ зі скалярним добутком, що породжує норму

$$\|\varphi\|^2_{H_\psi(\Omega)}=\sum_{|k|\geqslant 0}|\varphi_k|^2\|\tilde{k}\|^{2\psi}; \tag{1}$$

$\overline{H}_\psi(\Omega)$, $\psi\geqslant 0,$ — гільбертовий простір вектор-функцій

$\varphi(x) = \mathrm{col}\,(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_N(x))$, таких, що $\varphi_\nu(x) \in H_\psi(\Omega)$, $\nu = 1, \ldots, N$,

$$\|\varphi\|^2_{\overline{H}_\psi(\Omega)} = \sum_{\nu=1}^{N} \|\varphi_\nu\|^2_{H_\psi(\Omega)}; \tag{2}$$

$C^{(n,\delta)}(\overline{Q})$ — банаховий простір функцій $u(t,x)$, неперервних в $\overline{Q}$ разом зі всіма похідними $D_t^\sigma D^h u(t,x)$, $\sigma \leqslant n$, $|h| \leqslant \delta$, з нормою

$$\|u\|_{C^{(n,\delta)}(\overline{Q})} = \sum_{\sigma=0}^{n} \sum_{\|h\| \leqslant \delta} \max_{(t,x)\in\overline{Q}} \left| D_t^\sigma D^h u(t,x) \right|; \tag{3}$$

$\overline{C}^{(n,\delta)}(\overline{Q})$ — банаховий простір вектор-функцій

$$u(t,x) = \mathrm{col}\,(u_1(t,x), \ldots, u_m(t,x))\,,$$

в яких кожна координата належить простору $C^{(n,\delta)}(\overline{Q})$,

$$\|u\|^2_{\overline{C}^{(n,\delta)}(\overline{Q})} = \sum_{\nu=1}^{m} \|u_\nu\|^2_{C^{(n,\delta)}(\overline{Q}^p)}. \tag{4}$$

2. В області Q розглядаємо задачу

$$N[u] \equiv D_t^n P(D) u + \sum_{\sigma=0}^{n-1} D_t^\sigma \Big(\sum_{|h|\leqslant q} \beta_{h\sigma} D^h \Big) u = (0), \tag{5}$$

$$M[u] \equiv \sum_{s=1}^{n} \sum_{|h|\leqslant\delta} \gamma_{hs} D^h \left(D_t^{s-1} u\big|_{t=0} - \mu\, D_t^{s-1} u\big|_{t=T} \right) = \varphi(x), \tag{6}$$

де
$u \equiv u(t,x) = \mathrm{col}\,(u_1(t,x), \ldots, u_m(t,x))$, $\varphi(x) = \mathrm{col}\,(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_{nm}(x))$; $P(D) \equiv \sum\limits_{|h|\leqslant 2d} \alpha_h D^h$ — еліптичний матричний диференціальний вираз, $\alpha_h = \|\alpha_h^{ij}\|$ і $\beta_{h\sigma} = \|\beta_{h\sigma}^{ij}\|$ — квадратні матриці розміру m, а $\gamma_{hs} = \|\gamma_{hs}^{ij}\|$ — прямокутні матриці розміру $(nm \times m)$ зі сталими комплексними елементами; $\delta = \max\{2d, q\}$, $\mu \in \mathbb{C}\backslash\{0; 1\}$.

Вигляд області Q накладає умови 2π- періодичності за змінними $x_1, \ldots, x_p$ на вектор-функції $u(t,x)$ та $\varphi(x)$.

Вважаємо, що для $\varphi(x)$ справедливе розвинення у векторний ряд Фур'є

$$\varphi(x) = \sum_{|k|\geqslant 0} \varphi_k \exp(ik,x), \quad \varphi_k = \mathrm{col}\,(\varphi_{k1}, \ldots, \varphi_{k,nm})\,, \tag{7}$$

де

$$\varphi_{kj} = (2\pi)^{-p} \int\limits_{\Omega} \varphi_j(x) \exp(-ik, x) dx, \quad j = 1, \ldots, nm. \tag{8}$$

3. Розв'язок задачі (5), (6) шукаємо у вигляді векторного ряду

$$u(t,x) = \sum_{|k| \geqslant 0} u_k(t) \exp(ik, x), \quad u_k(t) = \mathrm{col}\left(u_{k1}(t), \ldots, u_{km}(t)\right). \tag{9}$$

Тоді на підставі (5)–(7) отримуємо, що кожна з вектор-функцій $u_k(t)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, є розв'язком такої задачі:

$$N_k[u_k] \equiv P(k) u_k^{(n)}(t) + \sum_{\sigma=0}^{n-1} \Big(\sum_{|h| \leqslant q} \beta_{h\sigma} k^h \Big) u_k^{(\sigma)}(t) = (0), \tag{10}$$

$$M_k[u_k] \equiv \sum_{s=1}^{n} \sum_{|h| \leqslant \delta} \gamma_{hs} k^h \left(u_k^{(s-1)}(0) - \mu u_k^{(s-1)}(T) \right) = \varphi_k. \tag{11}$$

Припустимо, що для символу диференціального виразу $P(D)$ справджується умова

$$(\forall\, k \in \mathbb{Z}^p) \quad \det P(k) \equiv \det \Big\| \sum_{|h| \leqslant 2d} \alpha_h k^h \Big\| \neq 0. \tag{12}$$

Тоді характеристичне рівняння

$$X_k(\rho) \equiv \det \Big\| P(k) \rho^n + \sum_{\sigma=0}^{n-1} \Big(\sum_{|h| \leqslant q} \beta_{h\sigma} k^h \Big) \rho^\sigma \Big\| = 0, \quad k \in \mathbb{Z}^p, \tag{13}$$

яке відповідає системі рівнянь (10), має nm комплексних коренів, які позначимо через $\rho_j = \rho_j(k)$, $j = 1, \ldots, nm$.

Зауваження 1. Якщо для деякого вектора $k = \hat{k}$ $\det P(\hat{k}) = 0$ (таких векторів $\hat{k}$ може бути лише скінченна кількість, зокрема, якщо $P(D) = \sum\limits_{|h|=2d} \alpha_h D^h$, то таким вектором є лише $k = (0)$), то відповідна задача (10), (11) є перевизначеною, і для існування єдиного розв'язку її треба накладати додаткові умови на параметри задачі. Такі умови можна виписати в явній формі, аналогічно до того, як це зроблено в роботі [21] для скалярного випадку, де оператор $P(D)$ однорідний за порядком диференціювання.

Для дослідження задачі (5), (6) нам треба побудувати фундаментальну систему розв'язків системи звичайних диференціальних рівнянь (10) для кожного $k \in \mathbb{Z}^p$. Для спрощення викладок надалі будемо вважати, що для кожного вектора $k \in \mathbb{Z}^p$ всі корені рівняння (13) є простими й відмінними від нуля. Тоді для кожного кореня $\rho_j(k)$ рівняння (13)

$$\operatorname{rang}\Big\|P(k)\rho_j^n + \sum_{\sigma=0}^{n-1}\Big(\sum_{|h|\leqslant q}\beta_{h\sigma}k^h\Big)\rho_j^\sigma\Big\| = m-1, \quad j=1,\ldots,nm, \tag{14}$$

а тому хоча б один із мінорів $(m-1)$-го порядку кожної з матриць у (14) є відмінним від нуля. Нехай це будуть мінори елементів рядка з номером $\omega = \omega(k)$ для кожної з матриць у (14). Тоді для кожного $k \in \mathbb{Z}^p$ система рівнянь (10) має таку фундаментальну систему розв'язків:

$$u_{kj}(t) = \chi_\omega\left(\rho_j(k)\right)\exp\left(\rho_j(k)t\right), \quad j=1,\ldots,nm, \tag{15}$$

де

$$\chi_\omega\left(\rho_j(k)\right) = \operatorname{col}\left(\chi_{\omega 1}\left(\rho_j(k)\right),\ldots,\chi_{\omega m}\left(\rho_j(k)\right)\right),$$

$\chi_{\omega\nu}\left(\rho_j(k)\right)$, $\nu = 1,\ldots,m$, — алгебричні доповнення елементів $\omega(k)$-го рядка визначника $X_k(\rho_j(k))$ (див. (13)), які обчислюються за формулами

$$\chi_{\omega\nu}\left(\rho_j(k)\right) = \sum_{d=0}^{n(m-1)}\zeta_d^{\omega\nu}(k)\rho_j^d(k), \quad j=1,\ldots,nm, \quad \nu=1,\ldots,m, \tag{16}$$

в яких

$$\zeta_\eta^{\omega\nu}(k) = \sum_{|\gamma^{(\omega)}|=\eta}(-1)^{\omega+\nu}\det\left\|B_{\gamma_i}^{ij}(k)\right\|_{\substack{i,j=1,\ldots,m\\ i\neq\omega,j\neq\nu}}, \quad \begin{array}{c}\eta=0,1,\ldots,n(m-1),\\ \nu=1,\ldots,m,\end{array} \tag{17}$$

де підсумовування здійснюється за всіма векторами $\gamma^{(\omega)} = (\gamma_1,\ldots,\gamma_{\omega-1},\gamma_{\omega+1},\ldots,\gamma_p) \in \mathbb{Z}_+^{p-1}$, для яких $\gamma_1+\ldots+\gamma_{\omega-1}+\gamma_{\omega+1}+\ldots+\gamma_p = \eta$.

У формулах (17) $B_\sigma^{ij}(k)$ — елементи матриць $B_\sigma(k)$ розміру m, де

$$\begin{gathered}B_\sigma(k) = \sum_{|h|\leqslant q}\beta_{h\sigma}k^h, \quad \sigma=0,1,\ldots,n-1;\\ B_n(k) = P(k) = \sum_{|h|\leqslant 2d}\alpha_h k^h.\end{gathered} \tag{18}$$

Лема 1. *Існують сталі $C_1 > 0$ і $K > 0$, такі, що для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$, $|k| \geqslant K$ справджується оцінка*

$$|\det P(k)| \geqslant C_1|k|^{2dm}. \tag{19}$$

Доведення. Із означення еліптичності матричного диференціального виразу $P(D)$ випливає, що для довільних $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_p) \in \mathbb{R}^p \backslash \{(0)\}$ справджується нерівність

$$\det P_{2d}(\xi) \equiv \det \Big\| \sum_{|h|=2d} \alpha_h \xi_1^{h_1} \cdots \xi_p^{h_p} \Big\| \neq 0. \tag{20}$$

Однорідний стосовно ξ многочлен $\det P_{2d}(\xi)$ подамо у вигляді

$$\det P_{2d}(\xi) = \|\xi\|^{2dm} \det P_{2d}(\xi^0), \quad \xi^0 = \xi/\|\xi\|.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \det P(\xi) = \|\xi\|^{2dm} \det P_{2d}(\xi^0) + \sum_{w=0}^{2dm-1} \|\xi\|^w Q_w(\xi^0) = \\ = \|\xi\|^{2dm} \left(\det P_{2d}(\xi^0) + \sum_{w=0}^{2dm-1} \|\xi\|^{w-2dm} Q_w(\xi^0) \right), \end{aligned} \tag{21}$$

де $Q_w(\xi^0)$ — однорідний многочлен змінних $\xi^0 = (\xi_1^0, \dots, \xi_p^0)$ степеня w, $w = 0, 1, \dots, 2dm - 1$.

Згідно з теоремою Вейєрштрасса кожна з функцій $|P_{2d}(\xi^0)|$ та $|Q_w(\xi^0)|$, $w = 0, 1, \dots, 2dm - 1$, на одиничній сфері $\|\xi^0\|^2 = 1$ досягає свого найбільшого та найменшого значення. На підставі (20) отримуємо

$$\left|\det P_{2d}(\xi^0)\right| \geqslant M_0 = \min_{\|\xi^0\|=1} \left|\det P_{2d}(\xi^0)\right| > 0.$$

Позначимо $M = \max\limits_{0 \leqslant w < 2dm} \big\{ \max\limits_{\|\xi^0\|=1} \left|Q_w(\xi^0)\right| \big\}$. Тоді при $\|\xi\| > 1$ справджуються оцінки

$$\left| \sum_{w=0}^{2dm-1} \|\xi\|^{w-2dm} Q_w(\xi^0) \right| \leqslant M \sum_{\sigma=1}^{2dm} \|\xi\|^{-\sigma} < M \sum_{\sigma=1}^{\infty} \|\xi\|^{-\sigma} = \frac{M}{\|\xi\| - 1}. \tag{22}$$

На підставі (21) із (22) при $\|\xi\| \geqslant 1 + 2M/M_0$ випливає, що

$$\left| \sum_{w=0}^{2dm-1} \|\xi\|^{w-2dm} Q_w(\xi^0) \right| < M_0/2 < M_0 \leqslant \left|\det P_{2d}(\xi^0)\right|. \tag{23}$$

Із (21) і (23) отримуємо, що для всіх $\xi \in \mathbb{R}^p$, $\|\xi\| \geqslant 1 + 2M/M_0$, справджується оцінка

$$|\det P(\xi)| \geqslant \|\xi\|^{2dm} \left| \left|\det P_{2d}(\xi^0)\right| - \left| \sum_{w=0}^{2dm-1} \|\xi\|^{w-2dm} Q_w(\xi^0) \right| \right| >$$

$$> \|\xi\|^{2dm}(M_0 - M_0/2) = (M_0/2)\|\xi\|^{2dm}. \quad (24)$$

Поклавши в (24) $\xi = k$, $C_1 = M_0/(2p^{dm})$, $K = (1 + 2M/M_0)\sqrt{p}$, отримуємо твердження леми. $\square$

На основі оцінок коренів многочлена через його коефіцієнти [31, глава 5, §7] із (13) і (19) одержуємо

$$|\rho_j(k)| \leqslant \begin{cases} C_2|k|^{(q-2d)/n}, & \text{якщо } q < 2d; \\ C_3|k|^{q-2d}, & \text{якщо } q \geqslant 2d; \end{cases} \quad j = 1, \ldots, nm, \ k \in \mathbb{Z}^p \backslash \{(0)\}, \quad (25)$$

де сталі C_2, C_3 не залежать від k.

Характеристичний визначник $\Delta(k) = \det \|M_k[u_{k1}], \ldots, M_k[u_{k,nm}]\|$ задачі (10), (11) обчислюється за формулою

$$\Delta(k) = S(k)Z(k)R(k) \prod_{j=1}^{nm} \big(1 - \mu \exp(\rho_j(k)T)\big), \quad k \in \mathbb{Z}^p, \quad (26)$$

де

$$S(k) = \det \Big\| \sum_{|h| \leqslant \delta} \gamma_{hs}^{jl} k^h \Big\|_{\substack{j=1,\ldots,nm \\ s=1,\ldots,n;\ l=1,\ldots,m}}, \quad (27)$$

$$R(k) = \det \|\rho_j^{s-1}(k)\|_{s,j=1}^{nm} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant nm} \big(\rho_j(k) - \rho_i(k)\big), \quad (28)$$

$$Z(k) = \left| \begin{matrix} \zeta_0^\omega(k) & \zeta_1^\omega(k) & \zeta_2^\omega(k) & \ldots & \zeta_{n(m-1)}^\omega(k) \\ 0 & \zeta_0^\omega(k) & \zeta_1^\omega(k) & \ldots & \zeta_{n(m-1)-1}^\omega(k) \\ 0 & 0 & \zeta_0^\omega(k) & \ldots & \zeta_{n(m-1)-2}^\omega(k) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \underbrace{0 \quad\quad 0 \quad\quad \ldots \quad\quad 0}_{n-1} & & & & \zeta_0^\omega(k) \end{matrix} \right.$$

$$\left. \begin{matrix} \overbrace{\begin{matrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \zeta_{n(m-1)}^\omega(k) & 0 & \ldots & 0 \\ \zeta_{n(m-1)-1}^\omega(k) & \zeta_{n(m-1)}^\omega(k) & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \zeta_1^\omega(k) & \ldots & \ldots & \zeta_{n(m-1)}^\omega(k) \end{matrix}}^{n-1} \end{matrix} \right|, \quad (29)$$

$\zeta_\eta^\omega(k) = \operatorname{col}\big(\zeta_\eta^{\omega 1}(k), \ldots, \zeta_\eta^{\omega m}(k)\big), \quad \eta = 0, 1, \ldots, n(m-1)$.

Зауважимо, що для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$ визначник (29) відмінний від нуля, бо входить співмножником у вираз для вронскіана

$$W(t;k) = \det \Big\| u_{k,j}^{(n-q)}(t) \Big\|_{\substack{q=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,nm}} = Z(k)R(k) \prod_{j=1}^{nm} \exp\big(\rho_j(k)t\big)$$

системи вектор-функцій (15), який є відмінним від нуля при всіх $t \in [0,T]$.

4. При дослідженні єдиності розв'язку задачі (5), (6) розглядатимемо ще й однорідні умови, які відповідають умовам (6) та (11):

$$M[u] = (0), \tag{30}$$

$$M_k[u_k] = (0). \tag{31}$$

Задача (5), (6) не може мати двох різних розв'язків тоді й тільки тоді, коли однорідна задача (5), (30) має лише тривіальний розв'язок.

Теорема 1. *Для єдиності розв'язку задачі* (5),(6) *у просторі* $\overline{C}^{(n,\delta)}(\overline{Q})$ *необхідно і досить, щоб виконувались умови*

$$(\forall\, k \in \mathbb{Z}^p) \qquad S(k) \neq 0, \tag{32}$$

$$(\forall\, k \in \mathbb{Z}^p) \quad 1 - \mu \exp\left(\rho_j(k)T\right) \neq 0, \quad j = 1, \dots, nm. \tag{33}$$

Доведення. Необхідність. Нехай для деякого $k = \hat{k} \in \mathbb{Z}^p$ $\quad S(\hat{k}) = 0$ або існує таке j_0, $1 \leqslant j_0 \leqslant nm$, що $1-\mu \exp\bigl(\rho_{j_0}(\hat{k})T\bigr) = 0$. Тоді $\Delta(\hat{k}) = 0$ і однорідна задача (5), (30) має нетривіальні розв'язки вигляду

$$\tilde{u}(t,x) = \sum_{j=1}^{nm} C_{\hat{k}j} u_{\hat{k}j}(t) \exp(i\hat{k}, x),$$

де $(C_{\hat{k}1}, \dots, C_{\hat{k},nm})$ – нетривіальний розв'язок системи рівнянь

$$\sum_{j=1}^{nm} C_{\hat{k}j} M_{\hat{k}}[u_{\hat{k}j}] = 0,$$

в якій функції $u_{\hat{k}j}(t)$ визначені формулами (15).

Достатність. Припустимо, що існують два розв'язки u_1 та u_2 задачі (5), (6) з простору $\overline{C}^{(n,\delta)}(\overline{Q}^p)$. Тоді вектор-функція $u_1 - u_2 = \tilde{u} \in \overline{C}^{(n,\delta)}(\overline{Q})$ є розв'язком однорідної задачі (5), (30), і до неї можна застосувати оператори N та M. З рівностей Парсеваля для функцій $N[\tilde{u}_\nu]$ та $M[\tilde{u}_\nu]$, $\nu = 1, \dots, m$, випливає, що кожен коефіцієнт Фур'є $\tilde{u}_k(t)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, вектор-функції $\tilde{u}(t,x)$ є розв'язком однорідної задачі (10), (31). За умов (32), (33) отримуємо, що $\tilde{u}_k(t) \equiv 0$, $k \in \mathbb{Z}^p$. Отже, $u_1(t,x) \equiv u_2(t,x)$. Теорему доведено. $\square$

Зауваження 2. Кожна з умов (33) з номером j, $j = 1, \dots, nm$, виконується тоді й тільки тоді, коли для кожного $k \in \mathbb{Z}^p$ справджується хоча б одна з двох умов

$$\ln|\mu| + T\mathrm{Re}\rho_j(k) \neq 0,$$

$$\left(\arg \mu + T\mathrm{Im}\rho_j(k)\right)/(2\pi) \notin \mathbb{Z}.$$

5. Розглянемо питання про існування розв'язку задачі (5), (6) у просторі $\overline{C}^{(n,\delta)}(\overline{Q})$. Надалі вважатимемо, що справджуються умови (32), (33). Тоді для кожного $k \in \mathbb{Z}^p$ існує єдиний розв'язок задачі (10), (11), який зображається у вигляді

$$u_k(t) = \sum_{j=1}^{nm} C_{kj} u_{kj}(t), \tag{34}$$

де сталі C_{kj}, $j = 1, \ldots, nm$, визначаються із системи лінійних алгебричних рівнянь

$$\sum_{j=1}^{nm} C_{kj} \sum_{s=1}^{n} \sum_{|h| \leqslant \delta} \gamma_{hs} k^h \left(u_{kj}^{(s-1)}(0) - \mu u_{kj}^{(s-1)}(T) \right) = \varphi_k, \tag{35}$$

визначником якої є $\Delta(k)$. Розв'язуючи систему рівнянь (35), знаходимо

$$C_{kj} = \frac{1}{1 - \mu \exp\left(\rho_j(k)T\right)} \sum_{w=1}^{nm} \sum_{\alpha=1}^{nm} \sum_{\gamma=1}^{nm} (-1)^{w+j} \frac{S_{w\alpha}(k) Z_{\alpha\gamma}(k) R_{\gamma j}(k)}{S(k) Z(k) R(k)} \varphi_{kw}, \tag{36}$$
$$j = 1, \ldots, nm,$$

де $S_{ij}(k)$, $Z_{ij}(k)$, $R_{ij}(k)$ – визначники, отримані з $S(k)$, $Z(k)$, $R(k)$, відповідно, шляхом викреслювання i-го рядка та j-го стовпця.

Формальний розв'язок задачі (5), (6) зображується векторним рядом

$$u(t, x) = \sum_{|k| \geqslant 0} \sum_{j=1}^{nm} C_{kj} u_{kj}(t) \exp(ik, x). \tag{37}$$

Ряд (37), взагалі, є розбіжним, бо відмінні від нуля вирази $S(k)$, $Z(k)$, $R(k)$, $1-\mu \exp\left(\rho_j(k)T\right)$, $j = 1, \ldots, nm$, які є знаменниками у формулах (36), можуть набувати як завгодно малих за модулем значень для безмежної кількості векторів $k \in \mathbb{Z}^p$. Тому питання про існування розв'язку задачі (5), (6) пов'язане з проблемою малих знаменників.

Нижче нам знадобиться наступне твердження, доведене в [21].

Лема 2. *Для компонент розв'язку* $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_N)$ *системи алгебричних рівнянь*

$$\xi_1 + r_j \xi_2 + r_j^2 \xi_3 + \ldots + r_j^{N-1} \xi_N = \frac{r_j^\sigma \exp(r_j t)}{1 - \mu \exp(r_j T)}, \quad j = 1, \ldots, N, \tag{38}$$

в якій $\sigma \in \mathbb{Z}_+$, $\mu \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, $0 < t < T$, *а* r_j, $j = 1, \ldots, N$, *— різні комплексні числа з круга* $U_B = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant B\}$, *такі, що* $1 - \mu \exp(r_j T) \neq 0$, *справджуються оцінки*

$$|\xi_s| \leqslant C_4 (1 + B)^{\sigma + N - s} \prod_{j=1}^{n} \left(1 + |1 - \mu \exp(r_j T)|^{-1}\right), \quad s = 1, \ldots, N, \tag{39}$$

де $C_4 = C_4\,(N, \sigma, |\mu|, T) > 0$.

На підставі формул (34), (36) кожну з компонент вектор-функції $u_k(t)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, подамо у вигляді

$$u_{k\nu}(t) = \sum_{\gamma=1}^{nm} \sum_{\alpha=1}^{nm} \sum_{w=1}^{nm} (-1)^{\gamma + w} \frac{Z_{\alpha\gamma}(k) S_{w\alpha}(k)}{Z(k) S(k)} \varphi_{kw} \times \\ \times \sum_{\eta=0}^{n(m-1)} \zeta_{\eta}^{\omega\nu}(k) \xi_{\gamma}^{\eta}(k, t), \quad \nu = 1, \ldots, m, \tag{40}$$

де

$$\xi_{\gamma}^{\eta}(k, t) = \sum_{j=1}^{nm} (-1)^{\gamma + j} \frac{R_{\gamma j}(k)}{R(k)} \cdot \frac{\rho_j^{\eta}(k) \exp\left(\rho_j(k) t\right)}{1 - \mu \exp\left(\rho_j(k) T\right)}, \begin{array}{l} \gamma = 1, \ldots, nm, \\ \eta = 0, 1, \ldots, n(m-1). \end{array} \tag{41}$$

Зауважимо, що для кожного фіксованого $k \in \mathbb{Z}^p \backslash \{(0)\}$ величини $\rho_j(k)$, $j = 1, \ldots, nm$, які входять у формули (41), на підставі оцінок (25) належать кругу $U_{B_1(k)}$, якщо $q < 2d$, і кругу $U_{B_2(k)}$, якщо $q \geqslant 2d$, де $B_1(k) = C_2 |k|^{(q-2d)/n}$, $B_2(k) = C_3 |k|^{q-2d}$.

Розглянемо вектор-функцію $\xi^{\eta}(k, t) = (\xi_1^{\eta}(k, t), \ldots, \xi_{nm}^{\eta}(k, t))$ з компонентами, які визначені формулами (41). Легко бачити, що для кожного фіксованого $k \in \mathbb{Z}^p \backslash \{(0)\}$ ця вектор-функція та кожна з її похідних за t до порядку n включно

$$\frac{d^l \xi^{\eta}(k, t)}{dt^l}, \quad l = 0, 1, \ldots, n,$$

є розв'язком, відповідно, системи алгебричних рівнянь вигляду (38), в якій $N = nm$, $r_j = \rho_j(k)$, $j = 1, \ldots, nm$, $\sigma = \eta + l$, а $B = B_1(k)$, якщо $q < 2d$, і $B = B_2(k)$, якщо $q \geqslant 2d$. Тому на підставі леми 2 отримуємо, що для кожного $k \in \mathbb{Z}^p \backslash \{(0)\}$ для компонент вектора $\xi^{\eta}(k, t)$ та його похідних є правильними такі оцінки:

$$\left|\frac{d^r\xi_\gamma^\eta(k,t)}{dt^r}\right| \leqslant \begin{cases} C_5\prod\limits_{j=1}^{nm}\Big(1+|1-\mu\exp(\rho_j(k)T)|^{-1}\Big), \text{ якщо } q<2d, \\ C_6|k|^{\psi_0}\prod\limits_{j=1}^{nm}\Big(1+|1-\mu\exp(\rho_j(k)T)|^{-1}\Big), \text{якщо } q\geqslant 2d, \end{cases} \tag{42}$$

$\psi_0=(q-2d)(\eta+r+n-\gamma)$, $r=0,1,\ldots,n$, $\eta=0,1,\ldots,n(m-1)$, $\gamma=1,\ldots,nm$.

Провівши оцінки мінорів $(nm-1)$-го порядку визначників (27) і (29), отримуємо

$$|S_{w\alpha}(k)|\leqslant\begin{cases} C_7|k|^{2d(nm-1)}, & q<2d, \\ C_8|k|^{q(nm-1)}, & q\geqslant 2d, \end{cases} \quad k\in\mathbb{Z}^p\backslash\{(0)\}, \tag{43}$$

де $w,\alpha=1,\ldots,nm$,

$$|Z_{\alpha\gamma}(k)|\leqslant\begin{cases} C_9|k|^{(m-1)(nm(q+2d)/2-q)}, & q<2d, \\ C_{10}|k|^{(m-1)(2d(nm-1)+(q-2d)m(n-\frac{1}{2}))}, & q\geqslant 2d, \end{cases} \quad k\in\mathbb{Z}^p\backslash\{(0)\}, \tag{44}$$

де $\alpha,\gamma=1,\ldots,nm$.

На підставі формул (17) приходимо до таких оцінок:

$$|\zeta_\eta^{\omega\nu}(k)|\leqslant\begin{cases} C_{11}|k|^{2d(m-1)}, & q<2d, \\ C_{12}|k|^{q(m-1)}, & q\geqslant 2d, \end{cases} \quad k\in\mathbb{Z}^p\backslash\{(0)\}, \tag{45}$$

де $\eta=1,\ldots,n(m-1)$, $\nu=1,\ldots,m$.

Теорема 2. *Нехай $q<2d$, справджуються умови* (32), (33) *та існують додатні сталі C_{13}, C_{14}, C_{15} та $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3\in\mathbb{R}_+$, такі, що для всіх* (*крім скінченної кількості*) *векторів $k\in\mathbb{Z}^p\backslash\{(0)\}$ справджуються оцінки*

$$|1-\mu\exp(\rho_j(k)T)|\geqslant C_{13}|k|^{-\gamma_1}, \quad j=1,\ldots,nm, \tag{46}$$

$$|S(k)|\geqslant C_{14}|k|^{-\gamma_2}, \tag{47}$$

$$|Z(k)|\geqslant C_{15}|k|^{-\gamma_3}. \tag{48}$$

Якщо $\varphi\in\overline{H}_{\psi_1}(\Omega)$, де $\psi_1>\theta_1+2d+p/2$,
$\theta_1=(m-1)(nm/2-1)q+((m+1)(nm+2)-6)d+nm\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3$, то в просторі $\overline{C}^{(n,2d)}(\overline{Q})$ існує єдиний розв'язок задачі (5), (6), який неперервно залежить від $\varphi(x)$.

Доведення. На підставі формул (40) та оцінок (42)–(48) отримуємо, що для всіх (крім скінченного числа) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$ справджуються нерівності

$$\max_{t\in[0,T]}\left|\frac{d^r u_{k\nu}(t)}{dt^r}\right| \leqslant C_{16}\|\tilde{k}\|^{\theta_1}\sum_{l=1}^{nm}|\varphi_{kl}|. \quad r=0,1,\ldots,n, \quad \nu=1,\ldots,m. \tag{49}$$

Із (9) та (49) випливає, що

$$\|u_\nu\|_{C^{(n,2d)}(\overline{Q})} = \sum_{r=0}^{n}\sum_{|h|\leqslant 2d}\max_{(t,x)\in\overline{Q}}\left|\frac{\partial^{r+|h|}\left(u_\nu(t,x)\right)}{\partial t^r\partial x_1^{h_1}\cdots\partial x_p^{h_p}}\right| \leqslant$$
$$\leqslant C_{17}\sum_{|k|\geqslant 0}\|\tilde{k}\|^{2d+\theta_1}\sum_{l=1}^{nm}|\varphi_{kl}|, \quad \nu=1,\ldots,m. \tag{50}$$

Застосовуючи до рядів у правих частинах оцінок (50) нерівність Коші-Буняковського, отримуємо

$$\|u_\nu\|^2_{C^{(n,2d)}(\overline{Q})} \leqslant C_{17}^2\left(\sum_{|k|\geqslant 0}\left(\|\tilde{k}\|^{2d+\theta_1-\psi_1}\right)\sum_{l=1}^{nm}\left(|\varphi_{kl}|\cdot\|\tilde{k}\|^{\psi_1}\right)\right)^2 \leqslant$$
$$\leqslant C_{18}\|\varphi(x)\|^2_{H_{\psi_1}(\Omega)}\sum_{|k|\geqslant 0}\|\tilde{k}\|^{2(2d+\theta_1-\psi_1)}, \quad \nu=1,\ldots,m. \tag{51}$$

За умов теореми ряд $\sum\limits_{|k|\geqslant 0}\|\tilde{k}\|^{2(2d+\theta_1-\psi_1)}$ є збіжним, тому із (51) отримуємо, що

$$\|u\|^2_{\overline{C}^{(n,2d)}(\overline{Q})} \leqslant C_{19}\|\varphi(x)\|^2_{\overline{H}_{\psi_1}(\Omega)}. \tag{52}$$

Із (52) випливає доведення теореми. □

Теорема 3. *Нехай $q \geqslant 2d$, справджуються умови (32), (33) та оцінки (46)–(48). Якщо $\varphi \in \overline{H}_{\psi_2}(\Omega)$, $\psi_2 > q((n+1)m-1)+2d(m-1)(nm-1)+(q-2d)(n(m^2+1)-m(m-1)/2-1)+nm\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3+p/2$, то в просторі $\overline{C}^{(n,q)}(\overline{Q})$ існує єдиний розв'язок задачі (5), (6), який неперервно залежить від $\varphi(x)$.*

Доведення. Проводиться аналогічно до доведення теореми 2. □

6. Дослідимо можливість виконання оцінок (46)–(48). Для цього використаємо наступне твердження.

Лема 3. *Нехай $\Phi(k) \equiv \Phi(k_1, \dots, k_p)$ — обмежена послідовність дійсних чисел. Тоді нерівність*

$$\left|\Phi(k) + \frac{a-l}{|k|^h}\right| < \frac{1}{|k|^{2h+p+\varepsilon}}, \quad \varepsilon > 0, \tag{53}$$

для майже всіх (стосовно міри Лебега) чисел $a \in \mathbb{R}$ має не більше, ніж скінченну кількість розв'язків у цілих числах $k_1, \dots, k_p$, l ($|k| \neq 0$).

Доведення. проводиться за схемою доведення леми 2.4 із [25, гл. 1]. □

Теорема 4. *Нехай $q < 2d$. Тоді для довільних фіксованих параметрів задачі (5), (6) нерівності (46) справджуються при $\gamma_1 = 0$ для всіх (крім скінченного числа) векторів $k \in \mathbb{Z}^p \backslash \{(0)\}$. Якщо $q \geqslant 2d$, то нерівності (46) є вірними для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел $\alpha = \arg\mu$ та довільних фіксованих решти параметрів задачі (5), (6) при $\gamma_1 > p + q - 2d$ для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{Z}^p \backslash \{(0)\}$.*

Доведення. Якщо $q < 2d$, то згідно з (25) $\rho_j(k) \underset{|k|\to\infty}{\longrightarrow} 0$, $j = 1, \dots, n$, а тому $\mu \exp(\rho_j(k)T) \underset{|k|\to\infty}{\longrightarrow} \mu$, $j = 1, \dots, n$. Оскільки $\mu \neq 1$, то в кожному достатньо малому околі одиниці (з радіусом $\theta < |1 - \mu|$) є лише скінченна кількість точок множини $\{\mu \exp(\rho_j(k)T),\ j = 1, \dots, n,\ k \in \mathbb{Z}^p \backslash \{(0)\}\}$. Отже, кожна з рівностей $\mu \exp(\rho_j(k)T) = 1$, $j = 1, \dots, nm$, справджується лише для скінченного числа векторів $k \in \mathbb{Z}^p \backslash \{(0)\}$. Тому для всіх векторів k, які належать множині $K_1 = \{k \in \mathbb{Z}^p \backslash \{(0)\} : \mu \exp(\rho_j(k)T) \neq 1\}$, справджуються оцінки

$$|1 - \mu \exp(\rho_j(k)T)| \geqslant \min_{1 \leqslant j \leqslant nm} \left\{ \inf_{k \in K_1} |1 - \mu \exp(\rho_j(k)T)| \right\} = C_{20} > 0.$$

Отже, для $q < 2d$ теорему доведено.

Якщо $q \geqslant 2d$, то на підставі нерівності

$$|z_1 - z_2| \geqslant \big||z_1| - |z_2|\big|, \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C},$$

отримуємо, що для тих k, для яких $|\mu|\, e^{T\mathrm{Re}\rho_j(k)} \notin (1 - \theta, 1 + \theta)$, $j = 1, \dots, n$, де θ – довільне число з інтервалу $(0, 1)$, справедливі оцінки

$$|1 - \mu \exp(\rho_j(k)T)| \geqslant \left|1 - |\mu| e^{T\mathrm{Re}\rho_j(k)}\right| \geqslant \theta > 0.$$

Для тих k, для яких $|\mu|e^{T\mathrm{Re}\rho_j(k)} \in (1-\theta, 1+\theta)$, $1 \leqslant j \leqslant nm$, на підставі нерівності

$$|\sin\xi| \geqslant \frac{2}{\pi}|\xi|, \quad \xi \in (-\pi/2, \pi/2]\,,$$

одержуємо оцінки

$$\begin{aligned}|1-\mu\exp(\rho_j(k)T)| \geqslant |\mathrm{Im}\,(1-\mu\exp(\rho_j(k)T))| = \\ = |\mu|\,e^{T\mathrm{Re}\rho_j(k)}\,|\sin(\arg\mu + T\mathrm{Im}\rho_j(k))| \geqslant \\ \geqslant (1-\theta)\,|\sin(\arg\mu + T\mathrm{Im}\rho_j(k))| \geqslant \\ \geqslant 2(1-\theta)\left|\frac{\arg\mu}{\pi} + \frac{T\mathrm{Im}\rho_j(k)}{\pi} - l\right|, \quad j = 1,\ldots,nm, \end{aligned} \tag{54}$$

де $l = l(k) \in \mathbb{Z}$ таке, що $\arg\mu + T\mathrm{Im}\rho_j(k) - \pi l \in (-\pi/2, \pi/2]$. Запишемо оцінки (54) у вигляді

$$|1-\mu\exp(\rho_j(k)T)| \geqslant 2(1-\theta)|k|^{q-2d}\left|\frac{T\mathrm{Im}\rho_j(k)}{\pi|k|^{q-2d}} + \frac{\frac{\arg\mu}{\pi} - l}{|k|^{q-2d}}\right|. \tag{55}$$

Застосовуючи до нерівності (55) лему 3 та використовуючи оцінки (25), отримуємо доведення теореми. □

Розглянемо тепер оцінку (47). Визначник $S(k)$ є многочленом степеня $nm\delta$ відносно змінних $k_1, \ldots, k_p$, який можна зобразити у вигляді

$$S(k) = \sum_{|\eta| \leqslant nm\delta} s_\eta k^\eta. \tag{56}$$

Позначимо через $s^{(R)} \in \mathbb{R}^\sigma$ та $s^{(I)} \in \mathbb{R}^\sigma$, $\sigma = C^{nm\delta}_{p+nm\delta}$, вектори, складені, відповідно, з дійсних та уявних частин коефіцієнтів многочлена (56).

Теорема 5. *Для майже всіх* (*стосовно міри Лебега в просторі* $\mathbb{R}^\sigma$) *векторів* $s^{(R)}$ *і для довільних фіксованих векторів* $s^{(I)}$ (*або для майже всіх* $s^{(I)}$ *та довільних фіксованих* $s^{(R)}$) *нерівність* (47) *виконується при* $\gamma_2 > p$ *для всіх* (*крім скінченної кількості*) *векторів* $k \in \mathbb{Z}^p \backslash \{(0)\}$.

Доведення. Нехай, не обмежуючи загальності, $\mathrm{Re}S(k) \not\equiv 0$. Якщо вільний член многочлена $\mathrm{Re}S(k)$ відмінний від нуля, то доведення теореми проводиться за схемою доведення теореми 5 [32]; якщо ж він дорівнює нулеві, то доведення випливає з теореми 16 [33]. □

Розглядаючи оцінку (48), зауважуємо, що визначник $Z(k)$ є многочленом відносно k степеня $\psi_1 = (m-1)m(qn+2pn)/2$, якщо $q < 2d$, і $\psi_2 = (m-1)m(2p-q+2nq)/2$, якщо $q \geqslant 2d$. Його можна зобразити у вигляді

$$Z(k) = \sum_{|\eta| \leqslant \psi} z_\eta k^\eta = \sum_{|\eta| \leqslant \psi} \mathrm{Re} z_\eta k^\eta + i \sum_{|\eta| \leqslant \psi} \mathrm{Im} z_\eta k^\eta. \qquad (57)$$

Позначимо через $z^{(R)} \in \mathbb{R}^\zeta$ та $z^{(I)} \in \mathbb{R}^\zeta$, $\zeta = C^{\psi}_{p+\psi}$, вектори, складені відповідно із коефіцієнтів $\mathrm{Re} z_\eta$ та $\mathrm{Im} z_\eta$ многочлена (57).

Теорема 6. *Для майже всіх векторів $z^{(R)}$ і для довільних фіксованих векторів $z^{(I)}$ (або для майже всіх $z^{(I)}$ та довільних фіксованих $z^{(R)}$) нерівність (48) виконується при $\gamma_3 > p$ для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{Z}^p \backslash \{(0)\}$.*

Доведення. аналогічне доведенню теореми 5. □

Результати роботи можна поширити на випадки, коли: 1) рівняння (13) має кратні корені; 2) система рівнянь є неоднорідною з правою частиною $f(t,x)$; 3) система рівнянь є слабко нелінійною з правою частиною $f(t,x,u)$.

Література

[1] С. Л. Соболев, *Об одной новой задаче математической физики* // Изв. АН СССР. Сер. мат. **18** (1954), №1, 3–50.

[2] С. Л. Соболев, *О движении симметрического волчка с полостью, наполненной жидкостью* // Прикл. механика и техн. физика. (1960) №3, 20–55.

[3] С. А. Габов, А. Г. Свешников, *Задачи динамики стратифицированной жидкости.* М.: Наука, 1986, 287 с.

[4] Г. И. Баренблатт, Ю. П. Желтов, И. Н. Кочина, *Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах* // Прикл. математика и механика. **24** (1960), вып. 5, 852–864.

[5] M. J. Lighthill, *On waves generated in dispersive systems by travelling forcing effects, with applications to the dynamics of rotating fluids* // J. Fluid Mech. **27** (1967), pt. 4, 725–752.

[6] Р. А. Александрян, *Спектральные свойства операторов, порожденных системами дифференциальных уравнений типа С. Л. Соболева* // Тр. Моск. мат. об-ва. **9** (1960), 455–505.

[7] Р. Т. Денчев, *О спектре одного оператора* // Докл. АН СССР. **126** (1959), №2, 259–262.

[8] Т. И. Зеленяк, *О поведении на бесконечности решений одной смешанной задачи* // Дифференц. уравнения. **5** (1969), №9, 1676–1689.

[9] С. А. Гальперн, *Задача Коши для уравнения С. Л. Соболева* // Сиб. мат. журн. **4** (1963), №4, 758–773.

[10] Ю. А. Дубинский, *О некоторых дифференциально-операторных уравнениях произвольного порядка* // Мат. сб. **90** (1973), №1, 3–22.

[11] В. Н. Масленникова, *Явные представления и априорные оценки решений граничных задач для системы Соболева* // Сиб. мат. журн. **9** (1968), №5, 1182–1198.

[12] А. Л. Павлов, *Об общих краевых задачах для дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в полупространстве* // Мат. сб. **103** (1977), №3, 367–391.

[13] В. К. Романко, *О граничных задачах для дифференциально-операторных уравнений, не разрешённых относительно старшей производной* // Докл. АН СССР. **235**, (1977), №5, 1030–1033.

[14] С. В. Успенский, Г. В. Демиденко, В. Г. Перепелкин, *Теоремы вложения и приложения к дифференциальным уравнениям.* Новосибирск: Наука, 1984, 224 с.

[15] М. Л. Горбачук, И. В. Федак, *Задача Коши для дифференциально-операторного уравнения,связанного с колебаниями стратифицированных жидкостей* // Докл. АН СССР. **297** (1987), №1, 14–17.

[16] G. A. Sviridyuk, V. E. Fedorov, *Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators.* Zeist: VSP, 2003, 268 p.

[17] І. С. Клюс, Б. Й. Пташник, *Багатоточкова задача для рівнянь із частинними похідними, не розв'язаних відносно старшої похідної за часом* // Укр. мат. журн. **51** (1999), №12, 1604–1613.

[18] Н. І. Білусяк, Л. І. Комарницька, Б. Й. Пташник, *Задача типу Діріхле для систем рівнянь із частинними похідними, не розв'язаних відносно старшої похідної за часом* // Укр. мат. журн. **54** (2002), №12, 1592–1602.

[19] Л. І. Комарницька, Б. Й. Пташник, *Задача з нелокальними умовами для диференціального рівняння з частинними похідними, яке не розв'язане відносно старшої похідної по часу* // Крайові задачі з різними виродженнями і особливостями: Зб. наук. праць. Відп. ред. С. Д. Івасишен. – Чернівці, Редакційно-видавничий відділ облполіграфвидаву, 1990, 86–95.

[20] Л. І. Комарницька, *Нелокальна крайова задача для рівняння зі змінними коефіцієнтами, не розв'язаного відносно старшої похідної* // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. (1994), вип. 40, 17–23.

[21] О. Д. Власій, Б. Й. Пташник, *Задача з нелокальними умовами для рівнянь з частинними похідними, не розв'язаних стосовно старшої похідної* // Укр. матем. журн. **55** (2003), №8, 1022–1034.

[22] В. Н. Полищук, *Задача с нелокальными краевыми условиями для гиперболических систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами* // Докл. АН УССР. Сер. А. (1979), № 3, 171–175.

[23] А. А. Дезин, *Общие вопросы теории граничных задач.* М.: Наука, 1980, 208 с.

[24] В. К. Романко, *Об общих краевых задачах для линейных систем уравнений с постоянными коэффициентами* // Мат. методы и физ.-мех. поля. (1986), вып. 23, 3–7.

[25] Б. И. Пташник, *Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными.* Киев: Наук. думка, 1984, 264 с.

[26] Н. М. Задорожна, Б. Й. Пташник, *Нелокальна крайова задача для параболічних рівнянь зі змінними коефіцієнтами* // Укр. мат. журн. **47** (1995), №7, 915–921.

[27] Ю. А. Митропольский, М. Х. Шхануков, А. А. Березовский, *Об одной нелокальной задаче для параболического уравнения* // Укр. мат. журн. **47** (1995), №6, 790–800.

[28] Л. В. Фардигола, *Нелокальные двухточечные краевые задачи в слое с дифференциальным оператором в краевом условии* // Укр. мат. журн. **47** (1995), №8, 1122–1128.

[29] Б. Й. Пташник, М. М. Симотюк, Н. М. Задорожна, *Задача з нелокальними умовами для квазілінійних гіперболічних рівнянь* // Нелинейные граничные задачи. (2001), вып. 11, 161–167.

[30] Б. Й. Пташник, В. С. Ільків, І. Я. Кміть, В. М. Поліщук, *Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними.* К.: Наук. думка, 2002, 416 с.

[31] Д. К. Фаддеев, И. С. Соминский, *Сборник задач по высшей алгебре.* М.: Наука, 1972, 304 с.

[32] В. И. Берник, Б. И. Пташник, Б. О. Салыга, *Аналог многоточечной задачи для гиперболического уравнения с постоянными коэффициентами* // Дифференц. уравнения. **13** (1977), № 4, 637–645.

[33] В. Г. Спринджук, *Метрическая теория диофантовых приближений.* М.: Наука, 1977, 144 с.

Відомості про авторів

О. Д. Власій
Головпоштамт, а/с 225,
76018 Івано-Франківськ,
Україна
E-Mail: oleginil@il.if.ua

Б. Й. Пташник
вул. Венеціанова 15, кв.17,
79000 Львів
Україна
E-Mail: ptashnyk@lms.lviv.ua