Український математичний вісник
Том 1 **(2004)**, № 2, 172 – 213

О циклических подпространствах и одноклеточности оператора $(Vf)(x) = q(x)\int\limits_0^x w(t)f(t)dt$

И. Ю. Доманов

(*Представлена Шишковым А. Е.*)

Аннотация. Пусть $q(x) \in L_p[0,1]$, $w(x) \in L_{p'}[0,1]$ и $\overline{q(x)w(x)} = q(x)w(x) \neq 0$ для п.в. $x \in [0,1]$. В работе описываются циклические подпространства, спектральная кратность и disc-характеристика оператора $(V_{q,w}f)(x) = q(x)\int_0^x f(t)w(t)dt$ и его натуральных степеней в пространстве $L_p[0,1]$. Также показано, что одноклеточность оператора $V_{q,w}^n$ эквивалентна его квазиподобию оператору $cJ^n := cV_{1,1}^n$ и эквивалентна условию $\operatorname{sign} q(x)w(x) = const$ п.в. на [0,1].

2000 MSC. 47A15, 47A16, 47G10.

Ключевые слова и фразы. Инвариантное подпространство, циклическое подпространство, спектральная кратность, подобие, квазиподобие, одноклеточный оператор.

1. Введение

Хорошо известно [3, 17], что оператор интегрирования $J : f(x) \to \int_0^x f(t)dt$ является одноклеточным в пространствах $L_p[0,1]$ при $p \in [1,\infty)$ и его решетка инвариантных подпространств антиизоморфна сегменту $[0,1]$. То же оказывается верным (см. [3, 17]) и для его положительных степеней

$$J^\alpha : f(x) \to \int\limits_0^x \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(t)\, dt, \qquad \alpha > 0.$$

Статья поступила в редакцию 11.02.2004
Автор выражает благодарность своему научному руководителю М. М. Маламуду за постоянное внимание и поддержку в работе.

Более того, соответствующие решетки инвариантных и гиперинвариантных подпространств имеют (см. [1, 3, 17]) вид :

$$\operatorname{Lat} J^{\alpha} = \operatorname{Hyplat} J^{\alpha} = \{E_a := \chi_{[a,1]} L_p[0,1] : 0 \leqslant a \leqslant 1\}. \tag{1.1}$$

Из описания (1.1) решетки $\operatorname{Lat} J^{\alpha}$ немедленно вытекает следующее описание множества $\operatorname{Cyc} J^{\alpha}$ циклических векторов оператора J^{α} :

$$f \in \operatorname{Cyc} J^{\alpha} \Leftrightarrow \int\limits_0^{\varepsilon} |f(x)|^p \, dx > 0, \qquad \varepsilon > 0. \tag{1.2}$$

Условие (1.2) называют ε-условием.

М. М. Маламудом в [12, 13] детально исследован оператор $A = J^{\alpha} \otimes B$, действующий в $L_p[0,1] \otimes \mathbb{C}^n$ и являющийся тензорным произведением оператора J^{α} и произвольной невырожденной диагональной $n \times n$-матрицы $B = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. В частности, в [12, 13] найдена спектральная кратность μ_A, описаны решетки $\operatorname{Lat} A$ и $\operatorname{Hyplat} A$ инвариантных и гиперинвариантных подпространств оператора A, а также множество $\operatorname{Cyc} A$ его циклических подпространств. Описание множества $\operatorname{Cyc} A$, полученное в [12, 13], оказалось несколько неожиданным. Именно, в [12, 13] оно получено в терминах $*$-рангов и $*$-определителей (см. Определение 3.1) составленных из компонент векторов порождающих циклическое подпространство. Заметим, что понятие $*$-определителя по другому поводу возникало ранее в работах [11, 15].

Основной объект работы — оператор вида

$$V_{q,w} : f(x) \to q(x) \int\limits_0^{x} f(t) w(t) \, dt, \tag{1.3}$$

и его натуральные степени. При $q \equiv w \equiv 1$ оператор $V_{q,w}$ совпадает с оператором интегрирования.

Joo Ho Kang [8] исследовал оператор $V_{q,w}$ в $L_2[0,1]$ над полем вещественных чисел в случае, когда функции $q(x), w(x)$ положительны и непрерывны. При этих условиях на функции q и w в [8] доказана одноклеточность оператора $V_{q,w}$ и описано множество $\operatorname{Cyc} V_{q,w}$ его циклических векторов.

Отметим, что в случае положительных и абсолютно непрерывных $q, w \in AC[0,1]$, подобие оператора $V_{q,w}$ оператору cJ, а, значит, — его одноклеточность, вытекает из общего результата М. М. Маламуда [14] о подобии оператора K, $((Kf)(x) = \int_0^x k(x,t) f(t) dt)$ оператору интегрирования J.

Отметим, что операторы вида (1.3) представляют интерес в теории броуновского движения. Так, в недавней работе [10] найдена асимптотика аппроксимативных и энтропийных чисел оператора $V_{q,w} : L_p[0,\infty) \longrightarrow L_q[0,\infty)$. Там же обсуждаются применения этих результатов к взвешенным винеровским процессам.

В настоящей работе мы исследуем степени $V_{q,w}^n$ оператора вида (1.3), отказавшись от условия $q(x)w(x) > 0$ и непрерывности q и w, но считая, однако, функцию $q(x)w(x)$ вещественной.

В работе получены необходимые и достаточные условия на q и w при которых оператор $V_{q,w}$ не только одноклеточен, но даже подобен оператору cJ. Оказалось, что одноклеточность оператора $V_{q,w}^n$ эквивалентна его квазиподобию оператору интегрирования и эквивалентна условию $q(x)w(x) > 0$ п.в. на [0,1].

Большинство результатов являются новыми и для случая $q(x)w(x) > 0$.

При этом, случай знакопеременной функции $q(x)w(x)$ оказался значительно содержательнее. Перечислим ряд обнаруженных здесь новых эффектов:

1) оператор $V_{q,w}$ утрачивает свойство одноклеточности;

2) его сужения на некоторые инвариантные подпространства квазиподобны операторам вида $A = J \otimes B$;

3) при некоторых условиях на функции q и w оператор $V_{q,w}$ может быть циклическим, не будучи одноклеточным.

Один из основных результатов работы — вычисление спектральной кратности и описание множества циклических подпространств степеней оператора $V_{q,w}$. При этом, как и в [12, 13], описание дано в терминах $*$-рангов и $*$-определителей функциональных матриц, сконструированных по системе векторов, порождающих циклическое подпространство. Например, если $q(x) = \chi_{[0,a]}(x) - \chi_{[a,1]}(x)$, то $\mu_{V_{q,1}^2} = 2$ и подпространство $E := \mathrm{span}\{f_1, f_2\}$ циклическое для оператора $V_{q,1}^2$ точно тогда, когда

$$*\text{-}rank \begin{pmatrix} f_1(x) & f_1(a-x) + f_1(a+x) \\ f_2(x) & f_2(a-x) + f_2(a+x) \end{pmatrix} = 2$$

(см. также примеры 3.1–3.2).

Отметим в этой связи, что понятие спекральной кратности играет важную роль в теории управления [16]. Именно, линейная динамическая система описывается уравнением

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t), \quad t \geq 0 \tag{1.4}$$

с операторами $A \in [X]$, $B = B \restriction U$, $B \in [U, X]$, где X и U — банаховы пространства (пространство состояний и управляющее подпространство соответственно) и $x(t) \in X$, $u(t) \in U$.

Первая из задач теории управления заключается в отыскании всех пространств U удовлетворяющих следующему свойству управляемости : для любого состояния $x \in X$, любого $\varepsilon > 0$ и любого момента времени $t > 0$ найдется (гладкая) функция управления $u(\cdot)$ при которой решение системы (1.4) достигает ε-окрестности x, $\|x - x(t)\| < \varepsilon$, начиная из некоторого фиксированного исходного состояния $x(0)$ (например, $x(0) = 0$).

Хорошо известная теорема Калмана утверждает, что система A, $B \restriction U$ управляема тогда и только тогда когда, $BU \in \operatorname{Cyc} A$, то есть когда минимальная размерность управляющего подпространства в (1.4) равна μ_A.

Исследуя другие задачи теории управления Н. К. Никольский и В. И. Васюнин [16] ввели еще одну характеристику оператора A — disc-характеристику (см. Определение 2.3), которая показывает насколько возможно уменьшение размерности управляющего подпространства системы (1.4) без потери свойства управляемости.

Мы вычисляем disc-характеристику степеней оператора $V_{q,w}$ и показываем, что она совпадает с его спектральной кратностью.

Обозначения.

1) X_1, X_2 — банаховы пространства; 2) $[X_1, X_2]$ — пространство линейных ограниченных операторов из X_1 в X_2, $[X] := [X, X]$; 3) $\operatorname{Lat} T$ — решетка инвариантных подпространств оператора $T \in [X]$; 4) $\ker T = \{x \in X \ : \ Tx = 0\}$ — ядро оператора T; 5) $\mathfrak{R}(T) = \{Tx \ : x \in X\}$ — образ оператора $T \in [X]$; 6) $\operatorname{span} E$ — замкнутая линейная оболочка множества $E (\subset X)$ в X; 7) $\operatorname{supp} f$ — носитель функции $f(x)$; 8) $r * f$ — обозначает свертку функций r, $f \in L_1[0,1] \ : \ r * f :=$ $:= \int_0^x r(x-t) f(t) dt$.

Все результаты работы анонсированы автором в заметках [5, 6].

2. Квазиподобие оператора $V^{\alpha}_{q,w}$ оператору $V^{\alpha}_{r,1}$

Лемма 2.1. *Пусть* $q \in L_p[0,1]$, $w \in L_{p'}[0,1]$ $({p'}^{-1} + p^{-1} = 1)$, *и* $q(x)w(x) = \overline{q(x)w(x)} \neq 0$ *для п.в.* $x \in [0,1]$. *Тогда оператор*

$$V_{q,w} : f \to q(x) \int\limits_0^x f(t) w(t) dt,$$

действующий в пространстве $L_p[0,1]$ *вольтерров и* $\operatorname{Ker} V_{q,w} = \{0\}$.

Доказательство. Ограниченность оператора $V_{q,w}$ и равенство $\operatorname{Ker} V_{q,w} = \{0\}$ очевидны. Так как $q \in L_p[0,1]$, $w \in L_{p'}[0,1]$, то по теореме Хилле-Тамаркина [18] оператор $V_{q,w}$ компактен. Так как оператор $V_{q,w}$ компактен, то его спектральный радиус равен нулю [7] и, следовательно, $V_{q,w}$ вольтерров. □

Предложение 2.1. *Пусть* $\alpha \in \mathbb{Z}_+$ *и* $Q(x) := \int\limits_0^x q(s)w(s)\,ds$. *Тогда*

$$1)\ (V_{q,w}^{\alpha+1} f)(x) = q(x) \int\limits_0^x \frac{(Q(x)-Q(t))^\alpha}{\alpha!} f(t)w(t)\,dt; \tag{2.1}$$

$$2)\ ((\mathbb{I} - \lambda V_{q,w})^{-1} f)(x) = f(x) + \lambda q(x) \int\limits_0^x e^{(Q(x)-Q(t))} f(t)w(t)\,dt;$$

$$3)\ ((\mathbb{I} - \lambda V_{q,w}^\alpha)^{-1}) f(x) = f(x) +$$

$$+ \lambda q(x) \int\limits_0^x (Q(x)-Q(t))^\alpha E_{1/\alpha}(\lambda(Q(x)-Q(t))^\alpha;\alpha) f(t)w(t)\,dt, \tag{2.2}$$

где

$$E_{1/\alpha}(\lambda(x-t)^\alpha;\alpha) = \sum_{j=0}^\infty \frac{\lambda^j (x-t)^{\alpha j}}{\Gamma(\alpha+\alpha j)}$$

функция Миттага-Лефлера.

Доказательство. 1) Будем доказывать индукцией по α. Предположим, что (2.1) верно для α. Тогда интегрируя по частям получим

$$(V_{q,w}^{\alpha+1} f)(x) = (V_{q,w}^\alpha V_{q,w} f)(x) =$$

$$= q(x) \int\limits_0^x \frac{(Q(x)-Q(t))^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} (V_{q,w} f)(t) w(t)\,dt =$$

$$= q(x) \int\limits_0^x \frac{(Q(x)-Q(t))^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} q(t)w(t) \left[\int\limits_0^t f(s)w(s)\,ds \right] dt =$$

$$= q(x) \left[-\frac{(Q(x)-Q(t))^\alpha}{\alpha!} \int\limits_0^t f(s)w(s)\,ds \right|_0^x + $$

$$\left. + \int\limits_0^x \frac{(Q(x)-Q(t))^\alpha}{\alpha!} f(t)w(t)\,dt \right] =$$

$$= q(x) \int\limits_0^x \frac{(Q(x)-Q(t))^\alpha}{\alpha!} f(t)w(t)\,dt.$$

2) и 3) следуют из 1). □

Определение 2.1. *Оператор $T \in [X_1, X_2]$ называют деформацией, если $kerT = \{0\}$ и $\overline{TX_1} = X_2$.*

Пусть $A \in [X_1]$, $B \in [X_2]$. Говорят, что операторы A и B квазиподобны, если существуют деформации $T_1 \in [X_1, X_2]$ и $T_2 \in [X_2, X_1]$ такие, что $T_1 A = BT_1$ и $AT_2 = T_2 B$.

Говорят, что операторы A и B подобны, если существует обратимый оператор $T \in [X_1, X_2]$ такой, что $TA = BT$ или $A = T^{-1}BT$.

Оказывается, что изучение степеней оператора $V_{q,w}$ с помощью квазиподобия можно свести к случаю $|q| \equiv 1$ и $w \equiv const$.

Теорема 2.1. *Пусть $R(x) := \int_0^x |q(s)w(s)|ds$, $R(1) = 1$, $R^{-1}(x)$ — функция обратная к $R(x)$ ($R^{-1} \circ R = R \circ R^{-1} = x$) и $r(x) := := \mathrm{sign}(qw)(R^{-1}(x))$. Тогда*

1) операторы $V_{q,w}$ и $V_{r,1}$ квазиподобны;

2) в качестве деформаций X и Y, сплетающих операторы $V_{q,w}$ и $V_{r,1}$ можно взять

$$(Xf)(x) = q(x) \int\limits_0^{R(x)} f(t)\,dt, \tag{2.3}$$

$$(Yf)(x) = r(x) \int\limits_0^{R^{-1}(x)} w(t)f(t)\,dt, \tag{2.4}$$

то есть $V_{q,w}X = XV_{r,1}$ и $YV_{q,w} = V_{r,1}Y$;

3) для операторов X и Y справедливы равенства

$$XY = V_{q,w}^2, \qquad YX = V_{r,1}^2.$$

Доказательство. 2) Проверим ограниченность операторов X и Y

$$\|(Xf)(x)\|_p^p = \int\limits_0^1 \left| q(x) \int\limits_0^{R(x)} f(t)dt \right|^p dx \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^1 |q(x)|^p \left(\int_0^1 |f(t)|dt \right)^p dx \leqslant \|q(x)\|_p^p \|f\|_p^p,$$

$$\|(Yf)(x)\|_p^p = \int_0^1 \left| r(x) \int_0^{R^{-1}(x)} w(t)f(t)\,dt \right|^p dx =$$

$$= \int_0^1 \left| \int_0^{R^{-1}(x)} w(t)f(t)\,dt \right|^p dx \leqslant \int_0^1 \left(\int_0^1 |w(t)f(t)|\,dt \right)^p dx \leqslant$$

$$\leqslant \|w(x)\|_{p'}^p \|f\|_p^p.$$

То есть

$$\|Xf\|_p \leqslant \|q\|_p \|f\|_p, \qquad \|Yf\|_p \leqslant \|w\|_{p'} \|f\|_p$$

и, следовательно, $\|X\| \leqslant \|q\|_p$, $\|Y\| \leqslant \|w\|_{p'}$. Проверка условий $ker\, X = = ker\, Y = \{0\}$ тривиальна. Положим

$$x_n(x) = x^n, \qquad y_n(x) = q(x)\mathrm{sign}(qw)(x) \left(\int_0^x R(t)\,dt \right)^n \qquad (n = 0, 1, \ldots).$$

Тогда

$$span\{Xx_n :\ n \geqslant 1\} = \mathrm{span}\{q(x)R(x)^{n+1} : n \geqslant 1\} = L_p[0,1],$$

$$\mathrm{span}\{Yy_n :\ n \geqslant 1\} = \mathrm{span}\{r(x) \left(\int_0^{R^{-1}(x)} R(t)\,dt \right)^{n+1} :\ n \geqslant 1\} = L_p[0,1],$$

то есть $\overline{\mathfrak{R}(X)} = \overline{\mathfrak{R}(Y)} = L_p[0,1]$. Таким образом, операторы X и Y — деформации. Далее,

$$(V_{q,w}Xf)(x) = q(x) \int_0^x w(t)q(t) \int_0^{R(t)} f(s)\,ds\,dt =$$

$$= q(x) \int_0^x \mathrm{sign}(qw)(t) \int_0^{R(t)} f(s)\,ds\,dR(t), \quad (2.5)$$

$$(YV_{q,w}f)(x) = r(x) \int_0^{R^{-1}(x)} w(t)q(t) \int_0^t w(s)f(s)\,ds\,dt =$$

$$= r(x) \int_0^{R^{-1}(x)} \mathrm{sign}(qw)(t) \int_0^t w(s)f(s)\,ds\,dR(t). \quad (2.6)$$

Сделаем в (2.5) – (2.6) замену переменных $t = R^{-1}(t_1)$. Тогда

$$(V_{q,w}Xf)(x) = q(x)\int\limits_0^{R(x)} \operatorname{sign}(qw)(R^{-1}(t))\int\limits_0^{t} f(s)\,ds\,dt = (XV_{r,1}f)(x),$$

$$(YV_{q,w}f)(x) = r(x)\int\limits_0^{x} r(t)\int\limits_0^{R^{-1}(t)} w(s)f(s)\,ds\,dt = (V_{r,1}Yf)(x).$$

Таким образом, деформации X и Y сплетают операторы $V_{q,w}$ и $V_{r,1}$: $V_{q,w}X = XV_{r,1}$, $YV_{q,w} = V_{r,1}Y$ и, следовательно, операторы $V_{q,w}$ и $V_{r,1}$ квазиподобны.

3)

$$(XYf)(x) = q(x)\int\limits_0^{R(x)} r(t)\int\limits_0^{R^{-1}(t)} w(s)f(s)\,ds\,dt.$$

Делая замену $t = R(t_1)$ и учитывая, что $r(R(t))R'(t) = q(t)w(t)$ получаем

$$(XYf)(x) = q(x)\int\limits_0^{x} q(t)w(t)\int\limits_0^{t} f(s)w(s)\,ds\,dt = (V_{q,w}^2 f)(x).$$

Аналогично

$$(YXf)(x) = r(x)\int\limits_0^{R^{-1}(x)} w(t)q(t)\int\limits_0^{R(t)} f(s)\,ds\,dt =$$

$$= r(x)\int\limits_0^{R^{-1}(x)} r(R(t))\int\limits_0^{R(t)} f(s)\,ds\,dR(t),$$

и замена $t = R(t_1^{-1})$ дает $(YXf)(x) = (V_{r,1}^2 f)(x)$. □

Определение 2.2. [17] *Подпространство E банахова пространства X называется циклическим подпространством для оператора $T \in [X]$, если* $\operatorname{span}\{T^nE : n \geq 0\} = X$. *Вектор $f(\in X)$ называется циклическим, если* $\operatorname{span}\{T^nf : n \geq 0\} = X$. $\operatorname{Cyc} T$ *— множество всех циклических подпространств оператора T.*

Определение 2.3. [16] *Положим*

$\mu_T := \inf\limits_E\{\dim\, E : E$ *циклическое подпространство оператора T в X*$\}$,

$$\operatorname{disc} T := \sup_{E \in \operatorname{Cyc} T} \min\{\dim E' : \ E' \subset E, \ E' \in \operatorname{Cyc} T\}.$$

μ_T называют спектральной кратностью оператора T в X, а $\operatorname{disc} T$ называют disc-характеристикой оператора T ("disc аббревиатура от "Dimension of the Input Subspace of Control").

Отметим, что μ_T может равняться ∞ и $\operatorname{disc} A \geq \mu_A$.

Говорят, что оператор T циклический, если $\mu_T = 1$.

Легко видеть, что если операторы A и B квазиподобны, то $\mu_A = \mu_B$. Отметим также, что как $\operatorname{disc} A$, так и μ_A зависят только от решетки инвариантных подпространств $\operatorname{Lat} A$ оператора A.

Следствие 2.1. *Пусть операторы X и Y определены формулами (2.3) и (2.4). Тогда подпространство $E \subset L_p[0,1] (F \subset L_p[0,1])$ циклическое для оператора $V_{q,w}^{\alpha}(V_{r,1}^{\alpha})$ тогда и только тогда, когда подпространство $\overline{YE}(\overline{XE})$ циклическое для оператора $V_{r,1}^{\alpha}(V_{q,w}^{\alpha})$, то есть*

$$E \in \operatorname{Cyc} V_{q,w}^{\alpha} \Longleftrightarrow \overline{YE} \in \operatorname{Cyc} V_{r,1}^{\alpha}, \qquad F \in \operatorname{Cyc} V_{r,1}^{\alpha} \Longleftrightarrow \overline{XF} \in \operatorname{Cyc} V_{q,w}^{\alpha}.$$

Доказательство.

$$E \in \operatorname{Cyc} V_{q,w} \Rightarrow \overline{YE} \in \operatorname{Cyc} V_{r,1} \Rightarrow \overline{XYE} = \\ = \overline{V_{q,w}^2 E} \in \operatorname{Cyc} V_{q,w} \Rightarrow E \in \operatorname{Cyc} V_{q,w},$$

$$F \in \operatorname{Cyc} V_{r,1} \Rightarrow \overline{XF} \in \operatorname{Cyc} V_{q,w} \Rightarrow \overline{YXF} = \\ = \overline{V_{r,1}^2 F} \in \operatorname{Cyc} V_{r,1} \Rightarrow F \in \operatorname{Cyc} V_{r,1}.$$

Если $\alpha \geqslant 2$, то положим

$$X_\alpha := V_{q,w}^{\alpha-2} X = V_{r,1}^{\alpha-2} X, \qquad Y_\alpha := V_{r,1}^{\alpha-2} Y = Y V_{q,w}^{\alpha-2}.$$

Тогда X_α и Y_α — деформации которые сплетают операторы $V_{q,w}$ и $V_{r,1}$ и $X_\alpha Y = V_{q,w}^{\alpha}$, $Y_\alpha X = V_{r,1}^{\alpha}$. Поэтому если $E \in \operatorname{Cyc} V_{q,w}^{\alpha}$, $F \in \operatorname{Cyc} V_{r,1}^{\alpha}$, то

$$\overline{YE} \in \operatorname{Cyc} V_{r,1}^{\alpha}, \quad \overline{Y_\alpha E} \in \operatorname{Cyc} V_{r,1}^{\alpha}, \quad \overline{XF} \in \operatorname{Cyc} V_{q,w}^{\alpha}, \quad \overline{X_\alpha F} \in \operatorname{Cyc} V_{q,w}^{\alpha}$$

и, следовательно, верны следующие импликации

$$E \in \operatorname{Cyc} V_{q,w}^{\alpha} \Rightarrow \overline{YE} \in \operatorname{Cyc} V_{r,1}^{\alpha} \Rightarrow \overline{X_\alpha YE} \in \operatorname{Cyc} V_{q,w}^{\alpha} \Rightarrow \\ \Rightarrow \overline{V_{q,w}^{\alpha} E} \in \operatorname{Cyc} V_{q,w}^{\alpha} \Rightarrow E \in \operatorname{Cyc} V_{q,w}^{\alpha},$$

$$F \in \operatorname{Cyc} V_{r,1}^{\alpha} \Rightarrow \overline{XF} \in \operatorname{Cyc} V_{q,w}^{\alpha} \Rightarrow \overline{Y_\alpha XF} \in \operatorname{Cyc} V_{r,1}^{\alpha} \Rightarrow \\ \Rightarrow \overline{V_{r,1}^{\alpha} F} \in \operatorname{Cyc} V_{r,1}^{\alpha} \Rightarrow F \in \operatorname{Cyc} V_{r,1}^{\alpha}.$$

$\square$

Следствие 2.2. *Пусть* $q, w \in C[0,1]$, $qw > 0$ *и* $\int_0^1 q(t)w(t)dt = 1$. *Тогда операторы* $V_{q,w}^{\alpha}$ *и* J^{α} *подобны и, следовательно, оператор* $V_{q,w}^{\alpha}$ *одноклеточен.*

Доказательство. Покажем, что оператор

$$(Tf)(x) = q(x)f\left(\int\limits_0^x q(t)w(t)\,dt\right) \tag{2.7}$$

ограничен вместе с обратным и $TJ^{\alpha} = V_{q,w}^{\alpha}T$. Действительно, так как $q, w \in C[0,1]$ и $qw > 0$, то

$$0 < m := \min_{x\in[0,1]} \frac{|q(x)|^p}{q(x)w(x)} < M := \max_{x\in[0,1]} \frac{|q(x)|^p}{q(x)w(x)} < \infty$$

и

$$\|Tf\|_p^p = \int\limits_0^1 \left| f\left(\int\limits_0^x q(t)w(t)\,dt\right)\right|^p \frac{|q(x)|^p}{q(x)w(x)}\, d\int\limits_0^x q(t)w(t)\,dt.$$

Поэтому

$$m\|f\|_p^p = m\int\limits_0^1 \left| f\left(\int\limits_0^x q(t)w(t)\,dt\right)\right|^p d\int\limits_0^x q(t)w(t)\,dt < \|Tf\|_p^p <$$
$$< M\int\limits_0^1 \left| f\left(\int\limits_0^x q(t)w(t)\,dt\right)\right|^p d\int\limits_0^x q(t)w(t)\,dt = M\|f\|_p^p.$$

Таким образом, операторы T и T^{-1} ограничены. □

Замечание 2.1. *Отметим, что оператор* T *вида* (2.7) *является преобразованием Лиувилля, которое в некоторых случаях позволяет сводить уравнение Штурма-Лиувилля с несуммируемым потенциалом к уравнению с суммируемым потенциалом* [2].

Замечание 2.2. *В случае* $q, w \in AC[0,1]$, *подобие операторов* $V_{q,w}$ *и* cJ *вытекает из общего результата М. М. Маламуда* [14] *о подобии оператора* K $((Kf)(x) = \int_0^x k(x,t)f(t)dt)$ *оператору интегрирования* J.

Отметим также недавнюю работу Г. М. Губреева [4] *о подобии диссипативных операторов* K *с разрывными ядрами оператору интегрирования.*

Замечание 2.3. *Преобразование Лиувилля бывает полезным и в других случаях. Пусть $w(x) \in L_2(\mathbb{R}_+)$ ступенчатая функция, имеющая конечное число скачков. В работе* [9] *показано, что оператор $w(x)i\frac{d}{dx}$, действующий в $L_2(\mathbb{R}_+)$, подобен самосопряженному оператору тогда и только тогда, когда функция $w(x)$ не меняет знак. В случае, когда $w(x) > 0$ в качестве такого оператора был указан оператор $w(x)^{\frac{1}{2}}i\frac{d}{dx}w(x)^{\frac{1}{2}}$, действующий в том же пространстве. Легко видеть, что если $w(x)$ положительная и отделеная от нуля ограниченная функция, то оператор $T : f \to f(\int_0^x \frac{1}{w(s)}ds)$ осуществляет подобие операторов $w(x)i\frac{d}{dx}$ и $i\frac{d}{dx}$. Действительно, так как*

$$\|Tf\|_2^2 = \int\limits_0^\infty \left| f\Big(\int\limits_0^x \frac{1}{w(t)}\,dt \Big) \right|^2 w(x) d\Big(\int\limits_0^x \frac{1}{w(t)}\,dt \Big),$$

то

$$\inf_{x\in\mathbb{R}_+} w(x)\|f\|_2^2 \le \|Tf\|_2^2 \le \sup_{x\in\mathbb{R}_+} w(x)\|f\|_2^2.$$

Поэтому операторы T и T^{-1} ограничены. Далее

$$(wi\frac{d}{dx}Tf)(x) = (Ti\frac{d}{dx}f)(x) = if'\Big(\int\limits_0^x \frac{1}{w(t)}\,dt \Big).$$

Таким образом, все операторы вида $w(x)i\frac{d}{dx}$, где $w(x)$ — отделенная от нуля положительная ограниченная функция, подобны оператору $i\frac{d}{dx}$.

По следствию 2.1 для получения описания множества $\mathrm{Cyc}V^{\alpha}_{q,w}$ достаточно рассматривать случай когда $w \equiv 1$, а функция q принимает значения ± 1. Для всякого конечного разбиения

$$\pi = \{0 = a_0 < a_1 \dots < a_{n-1} < a_n = 1\} \tag{2.8}$$

отрезка $[0, 1]$ определим функцию $d_\pi(x)$

$$d_\pi(x) := \begin{cases} +1, & x \in [a_{2i}, a_{2i+1}], \quad i = 0, 1, \dots, [\frac{n-1}{2}], \\ -1, & x \in [a_{2i-1}, a_{2i}], \quad i = 0, 1, \dots, [\frac{n}{2}]. \end{cases} \tag{2.9}$$

Тогда

I) либо существует некоторое конечное разбиения π вида (2.8) такое, что функция $q(x)$ эквивалентна функции $d_\pi(x)$ (или $-d_\pi(x)$) вида (2.9), либо

II) Функция $q(x)$ не будет эквивалентна функции $d_\pi(x)$ (или $-d_\pi(x)$) вида (2.9) ни при каком конечном разбиениии π вида (2.8).

Рассмотрим эти два случая отдельно.

3. Циклические подпространства. Случай I

В этом параграфе описываются циклические подпространства оператора $V_{q,1}^{\alpha}$ в том случае, когда существует некоторое конечное разбиение π вида (2.8) такое, что функция $q(x)$ эквивалентна функции $d_\pi(x)$ вида (2.9). Нам потребуются следующие две леммы.

Лемма 3.1. *Пусть* $0 = a_0 < a_1 \cdots < a_{n-1} < a_n = 1$. *Для* $1 \leqslant k \leqslant m \leqslant n$ *определим числа* $A_{k,m}$ *следующим образом*

$$A_{k,m} := \begin{cases} \sum\limits_{l=i+1}^{j} a_{2l-1} - \sum\limits_{l=i+1}^{j} a_{2l} & \text{при } k = 2i+1, \quad m = 2j+1, \\ \sum\limits_{l=i+1}^{j} a_{2l-1} - \sum\limits_{l=i}^{j} a_{2l} & \text{при } k = 2i, \quad m = 2j+1, \\ \sum\limits_{l=i+1}^{j} a_{2l-1} - \sum\limits_{l=i+1}^{j-1} a_{2l} & \text{при } k = 2i+1, \quad m = 2j, \\ \sum\limits_{l=i+1}^{j} a_{2l-1} - \sum\limits_{l=i}^{j-1} a_{2l} & \text{при } k = 2i, \quad m = 2j \end{cases} =$$

$$= \sum_{l=[\frac{k}{2}]+1}^{[\frac{m}{2}]} a_{2l-1} - \sum_{l=[\frac{k+1}{2}]}^{[\frac{m-1}{2}]} a_{2l}.$$

Тогда
1) $0 < (-1)^m A_{k,m} < 1$;
2) $0 < (-1)^{m-1} A_{k,m-1} = a_{m-1} + (-1)^{m+1} A_{k,m} < a_m + (-1)^{m+1} A_{k,m} < a_m < 1$;
3) $a_k + (-1)^k A_{k,m} = (-1)^k A_{k+1,m}, \quad a_{k-1} + (-1)^k A_{k,m} = (-1)^k A_{k-1,m}$;
4) $(-1)^{k+m} a_{k-1} + (-1)^m A_{k,m} \in (0,1), \ (-1)^{k+m} a_k + (-1)^m A_{k,m} \in (0,1)$.

Доказательство. 1)

$$(-1)^m A_{k,m} = \begin{cases} -\sum\limits_{[\frac{k}{2}]+1}^{j} a_{2l-1} + \sum\limits_{[\frac{k+1}{2}]}^{j} a_{2l}, & m = 2j+1, \\ -\sum\limits_{[\frac{k}{2}]+1}^{j} a_{2l-1} + \sum\limits_{[\frac{k+1}{2}]}^{j-1} a_{2l}, & m = 2j. \end{cases}$$

Так как $[\frac{k+1}{2}] \leq [\frac{k}{2}]+1$, то

$$0 < \begin{cases} \sum\limits_{[\frac{k}{2}]+1}^{j} (a_{2l}-a_{2l-1}), & m=2j+1, \\ \sum\limits_{[\frac{k+1}{2}]}^{j-1} (a_{2l+1}-a_{2l}), & m=2j \end{cases} \leqslant (-1)^m A_{k,m} \leq$$

$$\leq \begin{cases} \sum\limits_{[\frac{k+1}{2}]}^{j} (a_{2l}-a_{2l-1}), & m=2j+1, \\ \sum\limits_{[\frac{k}{2}]}^{j-1} (a_{2l+1}-a_{2l}), & m=2j \end{cases} < 1.$$

Равенства в 2) и 3) доказываются непосредственной подстановкой, а оба неравенства в 2) следуют из пункта 1).

4)

$$(-1)^{k+m}a_{k-1}+(-1)^m A_{k,m} = (-1)^{m+k}(a_{k-1}+(-1)^k A_{k,m}) =$$
$$= (-1)^{m+k}((-1)^k A_{k-1,m}) = (-1)^m A_{k-1,m}, \tag{3.1}$$
$$(-1)^{k+m}a_{k}+(-1)^m A_{k,m} = (-1)^{m+k}(a_{k}+(-1)^k A_{k,m}) =$$
$$= (-1)^{m+k}((-1)^k A_{k+1,m}) = (-1)^m A_{k+1,m}. \tag{3.2}$$

Из пункта 1) следует, что значения выражений (3.1) – (3.2) принадлежат отрезку $[0,1]$. □

Для сокращения записи далее положим ${E_\alpha}^{\lambda,t} := E_{1/\alpha}(\lambda t^\alpha;\alpha)$. Заметим, что

$${E_\alpha}^{\lambda,t} := E_{1/\alpha}(\lambda t^\alpha;\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k t^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha+\alpha k)} = \frac{1}{\alpha t^{\alpha-1}} \sum_{k=1}^{\alpha} \varepsilon_k e^{\varepsilon_k \lambda^{\frac{1}{\alpha}} t}, \tag{3.3}$$

где $\varepsilon_k = e^{2\pi i k/\alpha}$ различные корни из 1. В частности, если $\alpha = 1$, то ${E_\alpha}^{\lambda,t} = e^{\lambda t}$.

Лемма 3.2. *1) Пусть $f_1, f_2 \in L_p[0,1]$. Тогда, если выполненно равенство*

$$\int_0^1 {E_\alpha}^{\lambda,t} f_1(t)\,dt + \int_0^1 {E_\alpha}^{\lambda,-t} f_2(t)\,dt = 0, \qquad \lambda \in \mathbb{C}, \tag{3.4}$$

то

а) $f_1(t)+f_2(t)=0$ для п.в. $t\in[0,1]$, если α четно;

б) $f_1(t)=f_2(t)=0$ для п.в. $t\in[0,1]$, если α нечетно.

2) Пусть $f \in L_p[0,1], \quad g \in L_{p'}[0,1]$. *Тогда*

$$\int_0^1 \int_0^1 f(t) {E_\alpha}^{\lambda,x-t}\, dt\, g(x)\, dx =$$
$$= \int_0^1 {E_\alpha}^{\lambda,t} \int_t^1 f(x-t) g(x)\, dx\, dt +$$
$$+ \int_0^1 {E_\alpha}^{\lambda,-t} \int_t^1 f(1-x+t) g(1-x)\, dx\, dt. \quad (3.5)$$

Доказательство. Перепишем (3.4) в виде

$$\int_0^1 {E_\alpha}^{\lambda,t} f_1(t)\, dt + \int_{-1}^0 {E_\alpha}^{\lambda,-t} f_2(-t)\, dt = \int_{-1}^1 {E_\alpha}^{\lambda,t} (\tilde{f}_1(t) + \tilde{f}_2(t))\, dt = 0,$$

где

$$\tilde{f}_1(t) = \begin{cases} 0, & t \in [-1,0], \\ f_1(t), & t \in [0,1] \end{cases}, \qquad \tilde{f}_2(t) = \begin{cases} f_2(-t), & t \in [0,-1], \\ 0, & t \in [0,1]. \end{cases}$$

Если α четно, то ${E_\alpha}^{\lambda,t} = {E_\alpha}^{\lambda,-t}$ и подпространство

$$E := \operatorname{span}\{{E_\alpha}^{\lambda,t} : \lambda \in \mathbb{C}, t \in [-1,1]\} \subset L_p[-1,1]$$

совпадает с подпространством функций четных на отрезке $[-1,1]$. Поэтому функция $\tilde{f}_1(t) - \tilde{f}_2(t)$ должна быть нечетной на $[-1,1]$ и, следовательно, $f_1(t) + f_2(t) = 0$ для п.в. $t \in [0,1]$.

Если α нечетно, то $E = L_p[-1,1]$ и, следовательно, $\tilde{f}_1(t) - \tilde{f}_2(t) = 0$ для всех $t \in [-1,1]$. Так как $\operatorname{supp} \tilde{f}_1 \cap \operatorname{supp} \tilde{f}_2 = 0$, то $f_1(t) = f_2(t) = 0$ для п.в. $t \in [0,1]$.

2)

$$\int_0^1 \int_0^1 f(t) {E_\alpha}^{\lambda,x-t}\, dt\, g(x)\, dx = \int_0^1 \int_0^x + \int_0^1 \int_x^1 =: I_1 + I_2.$$

Меняя в I_1 порядок интегрирования, а в I_2, делая замену переменных $0 \leqslant x = 1 - x_1 \leqslant 1$, $x \leqslant t = 1 - t_1 \leqslant 1$, получим 2). $\square$

Замечание 3.1. *Отметим, что в случае четного* α (3.5) *примет вид*

$$\int\limits_0^1 \int\limits_0^1 f(t){E_\alpha}^{\lambda,x-t}\,dt\,g(x)\,dx =$$
$$= \int\limits_0^1 {E_\alpha}^{\lambda,t}\Big(\int\limits_t^1 f(x-t)g(x)\,dx + \int\limits_t^1 f(1-x+t)g(1-x)\,dx\Big)dt.$$

Далее, для каждой функции $f \in L_p[0,1]$ определим функции

$$\tilde{f}^j(x) := \chi_{[a_{j-1},a_j]}(x)f(a_j-x)+\chi_{[a_j,a_{j+1}]}(x)f(a_j+x) \quad (j=1,\ldots,n-1)$$

и $\tilde{f}^0(x) := \chi_{[0,a_1]}(x)f(x)$.

Для $f \in L_p[0,1]$ обозначим через $E_{V_{q,1}^\alpha}(f)$ подпространство

$$E_{V_{q,1}^\alpha}(f) := \mathrm{span}\{V_{q,1}^{\alpha n}f : n \geqslant 0\},$$

а через $E_{V_{q,1}^\alpha}(f)^\perp$ — его анулятор, то есть подпространство функций $g \in L_{p'}[0,1]$ таких, что

$$\int\limits_0^1 (V_{q,1}^{\alpha n}f)(x)g(x)\,dx = 0 \qquad (n=0,1,\ldots). \tag{3.6}$$

Отметим, что в случае $p=2$, $E_{V_{q,1}^\alpha}(f)^\perp$ — это ортогональное дополнение к подпространству $E_{V_{q,1}^\alpha}(f)$.

Предложение 3.1. *Пусть* $q(x)$ *эквивалентна* $d_\pi(x)$ *вида* (2.9). *Тогда* $g \in E_{V_{q,1}^\alpha}(f)^\perp \subset L_{p'}[0,1]$ *тогда и только тогда, когда*

1) при нечетном α

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant[\frac{n+1}{2}]} \tilde{f}^{2i-2}(x) * G_{2i-1}(x) = 0, \tag{3.7}$$

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant[\frac{n+1}{2}]} \tilde{f}^{2i-1}(x) * G_{2i}(x) = 0; \tag{3.8}$$

2) при четном α

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant[\frac{n+1}{2}]} \tilde{f}^{2i-2}(x) * G_{2i-1}(x) + \sum_{1\leqslant i\leqslant[\frac{n+1}{2}]} \tilde{f}^{2i-1}(x) * G_{2i}(x) = 0,$$

где

$$G_{2i-1}(x)=\sum_{m\geqslant 2i-1} g_m((-1)^{m-1}(1-x-2A_{2i-1,m}+a_{2i-2})),\quad (i\geqslant 1),\ (3.9)$$

$$G_{2i}(x)=\sum_{m\geqslant 2i} g_m((-1)^{m}(1-x+2A_{2i,m}+a_{2i-1})),\quad (i\geqslant 1).\quad (3.10)$$

Доказательство. Для $1\leqslant k,m\leqslant n$ положим

$$f_k(x)=\chi_{[a_{k-1},a_k]}(x)f(x),\quad g_m(x)=\chi_{[a_{m-1},a_m]}(x)g(x),\quad x\in[0,1]. \tag{3.11}$$

Положим также $f_0\equiv 0$ и продолжим функции f_k и g_m нулем вне отрезка $[0,1]$. Тогда $f=f_1+\dots+f_n,\ g=g_1+\dots+g_n$ и условие (3.6), с учетом (2.2) и обозначения (3.3), может быть переписано в виде

$$\int_0^1 q(x)\int_0^x f(t)E_\alpha^{\lambda,\int_t^x q(s)\,ds}\,dt\,g(x)\,dx=$$
$$=\sum_{k,m=1}^{n}\int_0^1(-1)^{m+1}\int_0^x f_k(t)E_\alpha^{\lambda,\int_t^x q(s)\,ds}\,dt\,g_m(x)\,dx=:$$
$$=:\sum_{1\leqslant k\leqslant m\leqslant n} I_{k,m}+\sum_{1\leqslant m<k\leqslant n} I_{k,m}=:S_1+S_2=0.$$

Так как $\operatorname{supp} f_k\subset[a_{k-1},a_k]$, $\operatorname{supp} g_m\subset[a_{m-1},a_m]$, то при $k>m$

$$\operatorname{supp}\left(g_m(x)\int_0^x f_k(t)E_\alpha^{\lambda,\int_t^x q(s)\,ds}\,dt\right)\subset[a_{k-1},1]\cap[a_{m-1},a_m]=\{\emptyset\}.$$

Поэтому $S_2=0$. Не трудно проверить, что

$$\int_t^x q(s)\,ds=\begin{cases}2\sum\limits_{l=i+1}^{j}a_{2l-1}-2\sum\limits_{l=i+1}^{j}a_{2l}+x-t, & t\in[a_{2i},a_{2i+1}],x\in[a_{2j},a_{2j+1}],\\ 2\sum\limits_{l=i+1}^{j}a_{2l-1}-2\sum\limits_{l=i}^{j}a_{2l}+x+t, & t\in[a_{2i-1},a_{2i}],x\in[a_{2j},a_{2j+1}],\\ 2\sum\limits_{l=i+1}^{j}a_{2l-1}-2\sum\limits_{l=i+1}^{j-1}a_{2l}-x-t, & t\in[a_{2i},a_{2i+1}],x\in[a_{2j-1},a_{2j}],\\ 2\sum\limits_{l=i+1}^{j}a_{2l-1}-2\sum\limits_{l=i}^{j-1}a_{2l}-x+t, & t\in[a_{2i-1},a_{2i}],x\in[a_{2j-1},a_{2j}].\end{cases}$$

Поэтому при $t \in [a_{k-1}, a_k]$, $x \in [a_{m-1}, a_m]$ имеем

$$\int\limits_t^x q(s)\,ds = 2\sum_{l=[\frac{k}{2}]+1}^{[\frac{m}{2}]} a_{2l-1} - 2\sum_{l=[\frac{k+1}{2}]}^{[\frac{m-1}{2}]} a_{2l} + (-1)^k t + (-1)^{m+1}x =$$
$$= 2A_{k,m} + (-1)^k t + (-1)^{m+1}x.$$

Рассмотрим слагаемые из S_1.

i) При $k = m$

$$I_{m,m} = \int\limits_0^1 (-1)^{m+1}\int\limits_0^x f_m(t){E_\alpha}^{\lambda,(-1)^{m+1}(x-t)}\,dt\,g_m(x)\,dx =$$
$$= \int\limits_0^1 (-1)^{m+1}{E_\alpha}^{\lambda,(-1)^{m+1}t}F_{m,m}(t)\,dt,$$

где

$$F_{m,m} = \int\limits_t^1 f_m(x-t)g_m(x)\,dx. \qquad (3.12)$$

ii) Рассмотрим подробно $I_{k,m}$ при $m > k$.

$$I_{k,m} = \int\limits_0^1 (-1)^{m+1}\int\limits_0^x f_k(t){E_\alpha}^{\lambda,(2A_{k,m}+(-1)^k t+(-1)^{m+1}x)}\,dt\,g_m(x)\,dx =$$
$$= \int\limits_{a_{m-1}}^{a_m} (-1)^{m+1}\int\limits_{a_{k-1}}^{a_k} f_k(t){E_\alpha}^{\lambda,(2A_{k,m}+(-1)^k t+(-1)^{m+1}x)}\,dt\,g_m(x)\,dx.$$

Сделаем замену переменных

$$a_{m-1} \leqslant x = x_1 + (-1)^m A_{k,m} \leqslant a_m,$$
$$a_{k-1} \leqslant t = (-1)^{k+m}t_1 + (-1)^{k+1}A_{k,m} \leqslant a_k.$$

Тогда

$$I_{k,m} = \int_{a_{m-1}+(-1)^{m+1}A_{k,m}}^{a_m+(-1)^{m+1}A_{k,m}} (-1)^{m+1}(-1)^{k+m}\int_{(-1)^{k+m}a_{k-1}+(-1)^m A_{k,m}}^{(-1)^{k+m}a_k+(-1)^m A_{k,m}}$$
$$f_k((-1)^{k+m}t + (-1)^{k+1}A_{k,m}){E_\alpha}^{\lambda,(-1)^{m+1}(x-t)}dt g_m(x + (-1)^m A_{k,m})dx.$$

Так как по лемме 3.1 2), 4) пределы интегрирования принадлежат отрезку $[0,1]$, а в силу (3.11) подинтегральное выражение равно нулю вне пределов интегрирования, то

$$I_{k,m} = \int_0^1 \int_0^1 f_k((-1)^{k+m}t + (-1)^{k+1}A_{k,m}) E_\alpha{}^{\lambda,(-1)^{m+1}(x-t)}\, dt \times \\ \times g_m(x + (-1)^m A_{k,m})\, dx.$$

По Лемме 3.2 2) получаем

$$I_{k,m} = \int_0^1 E_\alpha{}^{\lambda,(-1)^{m+1}t} F_{k,m}(t)\, dt + \int_0^1 E_\alpha{}^{\lambda,(-1)^m t} G_{k,m}(t)\, dt, \qquad (3.13)$$

где

$$F_{k,m}(t) := \int_t^1 f_k((-1)^{k+m}(x-t) + (-1)^{k+1}A_{k,m}) g_m(x + (-1)^m A_{k,m})\, dx, \qquad (3.14)$$

$$G_{k,m}(t) := \int_t^1 f_k((-1)^{k+m}(1-x+t) + (-1)^{k+1}A_{k,m}) \times \\ \times g_m(1 - x + (-1)^m A_{k,m})\, dx.$$

Для преобразования интегралов $F_{k,m}(t)$ и $G_{k,m}(t)$ рассмотрим отдельно два случая, когда выражение $k+m$ четно и нечетно.

ii1) $k+m$ - четно.

Рассмотрим $F_{k,m}(t)$. Сделаем в интеграле $F_{k,m}(t)$ замену переменных

$$t < x = x_1 + (-1)^k A_{k,m} + a_{k-1} = x_1 + (-1)^m A_{k,m} + a_{k-1} < 1.$$

Тогда

$$F_{k,m}(t) = \int_{t-(-1)^k A_{k,m} - a_{k-1}}^{1-(-1)^k A_{k,m} - a_{k-1}} f_k(x - t + a_{k-1}) g_m(x + 2(-1)^m A_{k,m} + a_{k-1}) dx.$$

По Лемме 3.1

$$-(-1)^k A_{k,m} - a_{k-1} = -(-1)^{k+m}(a_{k-1} + (-1)^m A_{k,m}) < 0.$$

Поэтому $g_m(x+2(-1)^m A_{k,m}+a_{k-1})=0$ при $1>x>1-(-1)^k A_{k,m}-$ $-a_{k-1}$, так как $x+2(-1)^m A_{k,m}+a_{k-1}>1+(-1)^m A_{k,m}>1$. Аналогично, $f_k(x-t+a_{k-1})=0$ при $x<t$, так как $x-t+a_{k-1}<a_{k-1}$. Следовательно,

$$F_{k,m}(t)=\int\limits_t^1 f_k(x-t+a_{k-1})g_m(x+2(-1)^m A_{k,m}+a_{k-1})dx. \qquad (3.15)$$

Рассмотрим $G_{k,m}(t)$. Сделаем в интеграле $G_{k,m}(t)$ замену переменных

$$t<x=x_1+1-(-1)^k A_{k,m}-a_k=x_1+1-(-1)^m A_{k,m}-a_k<1.$$

Тогда

$$G_{k,m}(t)=\int\limits_{t-1+(-1)^k A_{k,m}+a_k}^{(-1)^k A_{k,m}+a_k} f_k(t-x+a_k)g_m(-x+2(-1)^m A_{k,m}+a_k)\,dx.$$

По Лемме 3.1

$$(-1)^k A_{k,m}+a_k=(-1)^{k+m}a_k+(-1)^m A_{k,m}\in[0,1].$$

Поэтому $g_m(-x+2(-1)^m A_{k,m}+a_k)=0$ при $1>x>(-1)^k A_{k,m}+a_k$, так как $-x+2(-1)^m A_{k,m}+a_k<(-1)^m A_{k,m}=a_{m-1}+(-1)^m A_{k,m-1}<$ $<a_{m-1}$. Аналогично, $f_k(t-x+a_k)=0$ при $x<t$, так как $t-x+a_k>a_k$. Следовательно,

$$G_{k,m}(t)=\int\limits_t^1 f_k(t-x+a_k)g_m(-x+2(-1)^m A_{k,m}+a_k)dx \qquad (3.16)$$

ii2) $k+m$ — нечетно.

Рассмотрим $F_{k,m}(t)$. Сделаем в интеграле $F_{k,m}(t)$ замену переменных

$$t<x=x_1-(-1)^k A_{k,m}-a_k=x_1+(-1)^m A_{k,m}-a_k<1.$$

Тогда

$$F_{k,m}(t)=\int\limits_{t+(-1)^k A_{k,m}+a_k}^{1+(-1)^k A_{k,m}+a_k} f_k(t-x+a_k)g_m(x+2(-1)^m A_{k,m}-a_k)\,dx.$$

По лемме 3.1

$$(-1)^k A_{k,m} + a_k = (-1)^{k+m}((-1)^{k+m} a_k + (-1)^m A_{k,m}) < 0.$$

Поэтому $g_m(x+2(-1)^m A_{k,m} - a_k) = 0$ при $1 > x > 1 + (-1)^k A_{k,m} + a_k$, так как $x + 2(-1)^m A_{k,m} - a_k > 1 + (-1)^m A_{k,m} > 1$. Аналогично, $f_k(t - x + a_k) = 0$ при $x < t$, так как $x - t + a_k > a_k$. Следовательно,

$$F_{k,m}(t) = \int\limits_t^1 f_k(t - x + a_k) g_m(x + 2(-1)^m A_{k,m} - a_k)\, dx. \tag{3.17}$$

Рассмотрим $G_{k,m}(t)$. Сделаем в интеграле $G_{k,m}(t)$ замену переменных

$$t < x = x_1 + 1 + (-1)^k A_{k,m} + a_{k-1} = x_1 + 1 - (-1)^m A_{k,m} + a_{k-1} < 1.$$

Тогда

$$G_{k,m}(t) = \int\limits_{t-1-(-1)^k A_{k,m} - a_{k-1}}^{-(-1)^k A_{k,m} - a_{k-1}} f_k(x - t + a_{k-1}) g_m(-x + 2(-1)^m A_{k,m} - a_{k-1})\, dx.$$

По Лемме 3.1

$$-(-1)^k A_{k,m} - a_{k-1} = (-1)^{k+m} a_{k-1} + (-1)^m A_{k,m} \in [0,1].$$

Поэтому $g_m(-x + 2(-1)^m A_{k,m} - a_{k-1}) = 0$ при $1 > x > -(-1)^k A_{k,m} - a_{k-1}$, так как $-x + 2(-1)^m A_{k,m} - a_{k-1} < (-1)^m A_{k,m} = a_{m-1} + (-1)^m A_{k,m-1} < a_{m-1}$. Аналогично, $f_k(x - t + a_{k-1}) = 0$ при $x < t$, так как $x - t + a_{k-1} < a_{k-1}$. Следовательно,

$$G_{k,m}(t) = \int\limits_t^1 f_k(x - t + a_{k-1}) g_m(-x + 2(-1)^m A_{k,m} - a_{k-1})\, dx. \tag{3.18}$$

Сделаем в интегралах (3.15), (3.16), (3.17), (3.18) замену переменных $t < x = 1 - x_1 < 1$. Тогда, если $k + m$ четно, то

$$F_{k,m}(1-t) = \int\limits_0^t f_k(t - x + a_{k-1}) g_m(1 - x + 2(-1)^m A_{k,m} + a_{k-1})\, dx,$$

$$G_{k,m}(1-t) = \int\limits_0^t f_k(x - t + a_k) g_m(-1 + x + 2(-1)^m A_{k,m} + a_k)\, dx,$$

и если $k+m$ нечетно, то

$$F_{k,m}(1-t)=\int\limits_0^t f_k(x-t+a_k)g_m(1-x+2(-1)^m A_{k,m}-a_k)\,dx,$$

$$G_{k,m}(1-t)=\int\limits_0^t f_k(t-x+a_{k-1})g_m(-1+x+2(-1)^m A_{k,m}-a_{k-1})\,dx.$$

Заметим, что при $k=m$ обозначение (3.14) для функции $F_{k,m}$ совпадет с (3.12). Поэтому далее считаем, что функции $F_{k,m}$ заданы по формуле (3.14) для $k\leqslant m$. Тогда при $i\leqslant j$

$$F_{2i-1,2j-1}(1-t)=f_{2i-1}(a_{2i-2}+x)*g_{2j-1}(1-x-2A_{2i-1,2j-1}+a_{2i-2}),$$

$$F_{2i,2j}(1-t)=f_{2i}(a_{2i-1}+x)*g_{2j}(1-x+2A_{2i,2j}+a_{2i-1}),$$

$$F_{2i-1,2j}(1-t)=f_{2i-1}(a_{2i-1}-x)*g_{2j}(1-x+2A_{2i-1,2j}-a_{2i-1}),$$

$$F_{2i-2,2j-1}(1-t)=f_{2i-2}(a_{2i-2}-x)*g_{2j-1}(1-x-2A_{2i-1,2j-1}+a_{2i-2}),$$

$$G_{2i-1,2j+1}(1-t)=f_{2i-1}(a_{2i-1}-x)*g_{2j+1}(-1+x-2A_{2i-1,2j+1}+a_{2i-1}),$$

$$G_{2i-2,2j}(1-t)=f_{2i-2}(a_{2i-2}-x)*g_{2j}(-1+x+2A_{2i-1,2j}-a_{2i-2}),$$

$$G_{2i,2j+1}(1-t)=f_{2i}(a_{2i-1}+x)*g_{2j+1}(-1+x-2A_{2i,2j+1}-a_{2i-1}),$$

$$G_{2i-1,2j}(1-t)=f_{2i-1}(a_{2i-2}+x)*g_{2j}(-1+x+2A_{2i-1,2j}-a_{2i-2}).$$

Учитывая (3.13), перепишем уравнение $S_1=\sum\limits_{1\leqslant k\leqslant m\leqslant n} I_{k,m}=0$ в виде

$$S_1=\sum_{1\leqslant m\leqslant n} I_{m,m}+\sum_{1\leqslant k<m\leqslant n} I_{k,m}=$$
$$=\sum_{1\leqslant k\leqslant m\leqslant n}\int\limits_0^1 {E_\alpha}^{\lambda,(-1)^{m+1}t}F_{k,m}(t)\,dt+$$
$$+\sum_{1\leqslant k<m\leqslant n}\int\limits_0^1 {E_\alpha}^{\lambda,(-1)^m t}G_{k,m}(t)\,dt=$$

$$= \int\limits_0^1 {E_\alpha}^{\lambda,t} \left(\sum_{1\leqslant k\leqslant 2j-1\leqslant n} F_{k,2j-1}(t) + \sum_{1\leqslant k<2j\leqslant n} G_{k,2j}(t) \right) dt +$$

$$+ \int\limits_0^1 {E_\alpha}^{-\lambda,t} \left(\sum_{1\leqslant k\leqslant 2j\leqslant n} F_{k,2j}(t) + \sum_{1\leqslant k<2j-1\leqslant n} G_{k,2j-1}(t) \right) dt =:$$

$$=: \int\limits_0^1 {E_\alpha}^{\lambda,t} H_+(t)\, dt + \int\limits_0^1 {E_\alpha}^{\lambda,-t} H_-(t)\, dt = 0. \quad (3.19)$$

Выпишем подробные выражения для функций $H_+(t)$ и $H_-(t)$, учитывая, что $F_{0,2j-1} \equiv G_{0,2j} \equiv 0$ (так как $f_0 \equiv 0$).

$$H_+(t) := \sum_{1\leqslant k\leqslant 2j-1\leqslant n} F_{k,2j-1}(t) + \sum_{1\leqslant k<2j\leqslant n} G_{k,2j}(t) =$$

$$= \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n/2} (F_{2i-2,2j-1}(t) + F_{2i-1,2j-1}(t) + G_{2i-2,2j}(t) + G_{2i-1,2j}(t)) =$$

$$= \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n/2} \Big(f_{2i-2}(a_{2i-2} - x) * g_{2j-1}(1 - x - 2A_{2i-1,2j-1} + a_{2i-2}) +$$

$$+ f_{2i-1}(a_{2i-2} + x) * g_{2j-1}(1 - x - 2A_{2i-1,2j-1} + a_{2i-2}) +$$
$$+ f_{2i-2}(a_{2i-2} - x) * g_{2j}(-1 + x + 2A_{2i-1,2j} - a_{2i-2}) +$$
$$+ f_{2i-1}(a_{2i-2} + x) * g_{2j}(-1 + x + 2A_{2i-1,2j} - a_{2i-2}) \Big) =$$

$$= \sum_{1\leqslant i\leqslant n/2} \Big[(f_{2i-2}(a_{2i-2} - x) + f_{2i-1}(a_{2i-2} + x)) *$$

$$* \sum_{m\geqslant 2i-1} g_m((-1)^{m-1}(1 - x - 2A_{2i-1,m} + a_{2i-2})) \Big] =$$

$$= \sum_{1\leqslant i\leqslant n/2} \tilde{f}^{2i-2}(x) * G_{2i-1}(x),$$

$$H_-(t) := \sum_{1\leqslant k\leqslant 2j\leqslant n} F_{k,2j}(t) + \sum_{1\leqslant k<2j-1\leqslant n} G_{k,2j-1}(t) =$$

$$= \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n/2} (F_{2i-1,2j}(t) + F_{2i,2j}(t) + G_{2i-1,2j+1}(t) + G_{2i,2j+1}(t)) =$$

$$= \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n/2} \Big(f_{2i-1}(a_{2i-1} - x) * g_{2j}(1 - x + 2A_{2i-1,2j} - a_{2i-1}) +$$

$$+ f_{2i}(a_{2i-1} + x) * g_{2j}(1 - x + 2A_{2i,2j} + a_{2i-1}) +$$

$$+ f_{2i-1}(a_{2i-1}-x) * g_{2j+1}(-1+x-2A_{2i-1,2j+1}+a_{2i-1})+$$
$$+ f_{2i}(a_{2i-1}+x) * g_{2j+1}(-1+x-2A_{2i,2j+1}-a_{2i-1})\Big) =$$
$$= \sum_{1\leqslant i\leqslant n/2}\Big[(f_{2i-1}(a_{2i-1}-x)+f_{2i}(a_{2i-1}+x)) *$$
$$* \sum_{m\geqslant 2i} g_m((-1)^m(1-x+2A_{2i,m}+a_{2i-1}))\Big] =$$
$$= \sum_{1\leqslant i\leqslant n/2} \tilde{f}^{2i-1}(x) * G_{2i}(x).$$

Применение Леммы 3.2 1) к (3.19) завершает доказательство. □

Для формулировки дальнейших результатов нам потребуется следующее

Определение 3.1. ([12, 13, 15]) *Определитель функциональной матрицы $F(x) = (f_{ij}(x))_{i,j=1}^n$ ($f_{ij} \in L_p[0,1]$), подсчитаный по отношению к свертке*

$$(f*g)(x) = \int\limits_0^x f(x-t)g(t)\,dt = \int\limits_0^x g(x-t)f(t)\,dt = (g*f)(x),$$

называют $*$-определителем и обозначают $*\text{-}\det F(x)$. Подобным образом $*$-миноры $F(x)$ — это миноры подсчитаные по отношению к свертке. $*\text{-}\operatorname{rank} F(x)$ — это максимальный ранг $*$-миноров матрицы $F(x)$, удовлетворяющий ε-условию (1.2).

Лемма 3.3. *Пусть $F(x) = \{f_{ij}(x)\}_{i,j=1}^n$ — $n\times n$ матрица-функция с элементами $f_{ij} \in L_p[0,1]$ и $g(x) = \{g_1(x),\dots,g_n(x)\}$ — вектор функция с элементами $g_i \in L_{p'}[0,1]$. Тогда*

1) Если $*\text{-}\operatorname{rank} F(x) = n$, то уравнение $F(x)*g(x) = 0$ имеет только тривиальное решение $g(x) = \{0,\dots,0\}$.

2) Если $*\text{-}\operatorname{rank} F(x) < n$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует нетривиальное решение $g(x)$ уравнения $F(x)*g(x) = 0$ такое, что $\operatorname{supp} g_i \subset [1-\varepsilon, 1]$.

3) Пусть $A(x) = (a_{ij}(x))_{i,j=1}^k$, $B(x) = (b_{ij}(x))_{i,j=1}^k$ — функциональные матрицы, $a_{ij}, b_{ij} \in L_p[0,1]$ и $*\text{-}\operatorname{rank} A = k$. Тогда найдется $R > 1$ такое, что $*\text{-}\operatorname{rank}(A+\mu B) = k$ для $\mu \in [0,\frac{1}{R}] \cup [R,\infty)$.

Доказательство. 1) Пусть $\tilde{F}(x)$ — матрица $*$-присоединенная к $F(x)$. Тогда, если $F(x) * g(x) = 0$, то

$$\operatorname{diag}(*\text{-}\det F(x), \dots, *\text{-}\det F(x)) * (g_1(x), \dots, g_n(x)) = \\ = \tilde{F}(x) * F(x) * g(x) = (0, \dots, 0) \quad \text{для всех } x \in [0,1].$$

То есть $*\text{-}\det F(x) * g_i(x) = 0$ для всех $x \in [0,1]$. Так как $*\text{-}\operatorname{rank} F(x) = n$, то $*\text{-}\det F(x)$ удовлетворяет ε-условию (1.2) и, следовательно, по теореме Титчмарша $g_i(x) = 0$ для п.в. $x \in [0,1]$.

2)i) Пусть $*\text{-}\operatorname{rank} F(x) = r$, $0 < r \leqslant n-1$. Пусть $F^{N-r+1,\dots,N}_{1,2,\dots,\dots,r+1}(x)$ — $r \times (r+1)$ подматрица $F(x)$, стоящая влевом нижнем углу, то есть на пересечении $N, N-1, \dots, N-r+1$-ой строк и $1, 2, \dots, r+1$-го столбца. Пусть $F_i(x)(1 \leqslant i \leqslant r+1)$ — $r \times r$ матрица, полученная вычеркиванием i-го столбца из матрицы $F^{N-r+1,\dots N}_{1,2,\dots,\dots,r+1}(x)$. Не ограничивая общности можем считать, что $*\text{-}\operatorname{rank} F_1(x) = r$. Тогда для некоторого $\varepsilon_1 > 0$ вектор

$$\breve{g}(x) = (\breve{g}_1(x), \dots, \breve{g}_n(x)) := (*\text{-}\det F_1(x), \dots, *\text{-}\det F_{r+1}(x), 0, \dots, 0)$$

удовлетворяет уравнению

$$F(x) * \breve{g}(x) = 0, \qquad x \in [0, \varepsilon_1]. \tag{3.20}$$

Положим $\varepsilon_2 := \min(\varepsilon, \varepsilon_1)$. Тогда вектор

$$g(x) = (\chi_{[1-\varepsilon_2,1]}(x) * \breve{g}_1(x), \dots, \chi_{[1-\varepsilon_2,1]}(x) * \breve{g}_n(x))$$

удовлетворяет условиям

$$F(x) * g(x) = 0 \text{ для всех } x \in [0,1],$$

$$\operatorname{supp} g_i(x) \subset [1-\varepsilon_2, 1] \subset [1-\varepsilon, 1] \quad (i = 1, \dots, n),$$

$$g_1(x) \not\equiv 0.$$

Последнее условие выполнено, так как функция $\breve{g}_1(x) = *\text{-}\det F_1(x)$ удовлетворяет ε-условию (1.2) по предположению.

ii) Если $*\text{-}\operatorname{rank} F(x) = 0$, то положим $\breve{g}(x) := (1, 0, \dots, 0)$. Тогда выполнено (3.20), и дальнейшее доказательство совпадает с пунктом i).

3) Рассмотрим функцию $\Phi(\mu, x) := *\text{-}\det(A(x) + \mu B(x))$. Тогда

$$\Phi(\mu, x) = \mu^m \phi_m(x) + \mu^{m-1}\phi_{m-1}(x) + \dots \mu\phi_1(x) + \phi_0(x),$$

где $\phi_m(x) \not\equiv 0$ для некоторого $m \leqslant n$ и $\phi_0(x) = *\text{-}\det A$. Предположим, что существует $m+1$ чисел a_i и $m+1$ различных чисел μ_i

таких, что $\Phi(\mu_i, x) = 0$ при $x \in [0, a_i]$. Если окажется, что $\phi_0(a_i) = 0$, то, в силу условия $*$-rank $A = k$, можно выбрать $a_i' \in [0, a_i]$ такое, что $\phi_0(a_i') \neq 0$. Поэтому считаем, что $\phi_0(a_i) \neq 0$. Так как числа μ_i выбраны различными, то $\phi_m(x) = \dots = \phi_0(x) = 0$ для всех $x \in \bigcap [0, a_i]$, что противоречит условию $*$-rank $A = k$. Таким образом чисел μ удовлетворяющих условию $*$-rank $(A + \mu B) = k$ не более $m + 1$, откуда и следует утверждение 3). $\square$

Следующие две теоремы описывают циклические системы векторов оператора $V_{q,1}^{\alpha}$ для нечетного и четного α.

Теорема 3.1. *Пусть функция $q(x)$ эквивалентна функции $d_\pi(x)$ вида (2.9) и α — нечетно. Тогда*

1) $\mu_{V_{q,1}^{\alpha}} = [\frac{n-1}{2}] + 1$*;*

2) система $\{f_j\}_{j=1}^{N}$, векторов f_j, порождает циклическое подпространство в $L_p[0, 1]$ для оператора $V_{q,1}^{\alpha}$ тогда и только тогда, когда

a) $N \geqslant [\frac{n-1}{2}] + 1$*;*

b) матрицы

$$F_1(x) = \begin{pmatrix} \tilde f_1^0(x) & \tilde f_1^2(x) & \dots & \tilde f_1^{2i}(x) & \dots & \tilde f_1^{2[(n-1)/2]}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \tilde f_j^0(x) & \tilde f_j^2(x) & \dots & \tilde f_j^{2i}(x) & \dots & \tilde f_j^{2[(n-1)/2]}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \tilde f_N^0(x) & \tilde f_N^2(x) & \dots & \tilde f_N^{2i}(x) & \dots & \tilde f_N^{2[(n-1)/2]}(x) \end{pmatrix},$$

$$F_2(x) = \begin{pmatrix} \tilde f_1^1(x) & \tilde f_1^3(x) & \dots & \tilde f_1^{2i-1}(x) & \dots & \tilde f_1^{2[n/2]-1}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \tilde f_j^1(x) & \tilde f_j^3(x) & \dots & \tilde f_j^{2i-1}(x) & \dots & \tilde f_j^{2[n/2]-1}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \tilde f_N^1(x) & \tilde f_N^3(x) & \dots & \tilde f_N^{2i-1}(x) & \dots & \tilde f_N^{2[n/2]-1}(x) \end{pmatrix}$$

имеют максимальный $*$-ранг, то есть

$$*\text{-rank}\, F_1(x) + *\text{-rank}\, F_2(x) = n; \tag{3.21}$$

3) $\operatorname{disc} V_{q,1}^{\alpha} = [\frac{n-1}{2}] + 1.$

Доказательство. 1)–2) Из равенства $A_{2i,m} - A_{2i-1,m} = -a_{2i-1}$ и определений (3.9)–(3.10) функций G_m следует, что

$$G_{2i}(1 - x + a_{2i-1}) = g_{2i}(x) + \sum_{m \geqslant 2i+1} g_m((-1)^m (x + 2A_{2i,m})),$$

$$G_{2i+1}(1+x-a_{2i}) = \sum_{m\geqslant 2i+1} g_m((-1)^m(x+2A_{2i,m})),$$

$$G_{2i-1}(1-x+a_{2i-2}) = g_{2i-1}(x) + \sum_{m\geqslant 2i} g_m((-1)^{m-1}(x-2A_{2i-1,m})) =$$
$$= g_{2i-1}(x) + \sum_{m\geqslant 2i} g_m((-1)^{m-1}(x-2A_{2i,m}-2a_{2i-1})),$$

$$G_{2i}(1+x-a_{2i-1}) = \sum_{m\geqslant 2i} g_m((-1)^{m-1}(x-2A_{2i,m}-2a_{2i-1})).$$

Поэтому

$$g_{2i}(x) = G_{2i}(1-x+a_{2i-1}) - G_{2i+1}(1+x-a_{2i}), \tag{3.22}$$

$$g_{2i-1}(x) = G_{2i-1}(1-x+a_{2i-2}) - G_{2i}(1+x-a_{2i-1}). \tag{3.23}$$

Пусть

$$E_{V^\alpha_{q,1}}(f_1,\dots,f_N) := \operatorname{span}\{V^{\alpha n}_{q,1} f_i : 1\leqslant i\leqslant N, n\geqslant 0\}.$$

Тогда по предложению 3.1 $g(x){=}(g_1(x),\dots,g_n(x)){\in}E_{V^\alpha_{q,1}}(f_1,\dots,f_N)^\perp$ тогда и только тогда, когда

$$F_1(x) * \breve{G}_1(x) = 0 \text{ и } F_2(x) * \breve{G}_2(x) = 0, \tag{3.24}$$

где $\breve{G}_1(x) = (G_1(x),\dots,G_{2[(n-1)/2]+1}(x))$, $\breve{G}_2(x) = (G_2(x),\dots,G_{2[n/2]}(x))$ и функции G_m построены по g по формулам (3.9)–(3.10). Если выполнено условие (3.21), то по лемме 3.3 1) уравнения (3.24) имеют только тривиальные решения, $\breve{G}_1(x)$ и $\breve{G}_2(x)$, то есть $G_i\equiv 0$ $(i=1,\dots,n)$, и, следовательно, по (3.22)–(3.23) $g_i\equiv 0$ $(i=1,\dots,n)$, что и доказывает достаточность условия (3.21).

Обратно, если условие (3.21) не выполненно, то по Лемме 3.3 2) существуют функции $G_m(x)$ $(m=1,\dots,n)$ не равные одновременно тождественно нулю и удовлетворяющие условиям

$$\operatorname{supp} G_{2i+1} \subset [1+a_{2i-1}-a_{2i},1]\bigcap[1+a_{2i}-a_{2i+1},1],$$

$$\operatorname{supp} G_{2i} \subset [1+a_{2i-1}-a_{2i},1]\bigcap[1+a_{2i}-a_{2i+1},1].$$

Тогда функции $g_m(x)$ построенные по (3.22)–(3.23) таковы, что $\operatorname{supp} g_m(x)\subset[a_{m-1},a_m]$ и g_m не равны одновременно тождественно нулю. Следовательно, $g\not\equiv 0$ и $g(x) = +_{m=1}^n g_m(x)\in E_{V^\alpha_{q,1}}(f_1,\dots,f_N)^\perp$.

3) Рассмотрим случай четного n. Пусть $E=\operatorname{span}\{f_1,\dots,f_N\}$ — N-мерное подпространство циклическое для оператора $V^\alpha_{q,1}$. Покажем,

что в нем содержится $n/2$-мерное подпространство, которое также является циклическим для оператора $V_{q,1}^{\alpha}$. Так как $E \in \operatorname{Cyc} V_{q,1}^{\alpha}$, то найдуться квадратные $n/2 \times n/2$ подматрицы $A_1(x)$, $A_2(x)$ матриц $F_1(x)$ и $F_2(x)$ такие, что $*\text{-rank}\, A_1(x) = n/2$ и $*\text{-rank}\, A_2(x) = n/2$. Пусть матрицы $A_1(x)$, $A_2(x)$ посторoены по векторам $f_{i_1}, \ldots, f_{i_{n/2}}$ и $f_{j_1}, \ldots, f_{j_{n/2}}$ соответственно. Тогда, n-мерное подпространство $E_\varepsilon :=$ $:= \operatorname{span}\{f_{i_1} + \varepsilon f_{j_1}, \ldots, f_{i_{n/2}} + \varepsilon f_{j_{n/2}}\}$ будет циклическим при некотором $\varepsilon > 0$. Действительно, матрицы $F_1(x)$ и $F_2(x)$ построенные для системы векторов $f_{i_1} + \varepsilon f_{j_1}, \ldots, f_{i_{n/2}} + \varepsilon f_{j_{n/2}}$ будут иметь вид

$$F_{1\varepsilon}(x) = A_1(x) + \varepsilon B_1(x),$$

$$F_{2\varepsilon}(x) = \varepsilon A_2(x) + B_2(x) = \varepsilon(A_2(x) + 1/\varepsilon B_2(x)),$$

где $B_1(x),\ B_2(x)$ — некоторые матрицы. Следовательно, по лемме 3.3 3), $*\text{-rank}\, F_{1\varepsilon}(x) = n/2$ и $*\text{-rank}\, F_{2\varepsilon}(x) = n/2$ при некотором $\varepsilon > 0$, то есть подпространство E_ε является циклическим для оператора $V_{q,1}^{\alpha}$.

Случай нечетного n доказывается аналогично. $\square$

Следующая теорема доказывается также как и теорема 3.1.

Теорема 3.2. *Пусть функция $q(x)$ эквивалентна функции $d_\pi(x)$ вида (2.9) и α — четно. Тогда*

1) $\mu_{V_{q,1}^{\alpha}} = n$;

2) система $\{f_j\}_{j=1}^{N}$, векторов f_j, порождает циклическое подпространство в $L_p[0,1]$ для оператора $V_{q,1}^{\alpha}$ тогда и только тогда, когда

a) $N \geqslant n$;

b) матрица

$$F(x) = \begin{pmatrix} \tilde{f}_1^0(x) & \tilde{f}_1^1(x) & \ldots & \tilde{f}_1^i(x) & \ldots & \tilde{f}_1^{n-1}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \tilde{f}_j^0(x) & \tilde{f}_j^1(x) & \ldots & \tilde{f}_j^i(x) & \ldots & \tilde{f}_j^{n-1}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \tilde{f}_N^0(x) & \tilde{f}_N^1(x) & \ldots & \tilde{f}_N^i(x) & \ldots & \tilde{f}_N^{n-1}(x) \end{pmatrix}$$

имеет максимальный $*$-ранг, то есть $*\text{-rank}\, F(x) = n$;

3) $\operatorname{disc} V_{q,1}^{\alpha} = n$.

Следствие 3.1. *Пусть функция $q(x)$ эквивалентна функции $d_\pi(x)$ вида (2.9). Тогда оператор $V_{q,1}^{\alpha}$ циклический, тогда и только тогда, когда либо $n = 1$, либо $n = 2$ и α нечетно. При этом*

1) если $n = 1$, то $V_{q,1}^{\alpha} = J^{\alpha}$ и

$$f(x) \in \operatorname{Cyc} J^{\alpha} \Leftrightarrow 0 \in \operatorname{supp} f(x);$$

2) если $n = 2$, то $q(x) = \chi_{[0,a]}(x) - \chi_{[a,1]}(x)$, и для нечетных α

$$f(x) \in \operatorname{Cyc} V_{q,1}^{\alpha} \Leftrightarrow 0 \in \operatorname{supp} f(x) * (f(a-x) + f(a+x)).$$

Пример 3.1 Пусть $\pi = \{0 < a < b < 1\}$. Тогда $n = 3$ и $q(x) = 1 - 2\chi_{[a,b]}(x)$. Поэтому по Теоремам 3.1 и 3.2

$$\mu := \mu_{V_{q,1}^{\alpha}} = \begin{cases} [\frac{n-1}{2}] + 1 = 2, & \alpha - \text{ нечетно,} \\ n = 3, & \alpha - \text{ четно.} \end{cases}$$

Подпространство $E := \operatorname{span}\{f_1, \dots, f_\mu\}$ циклическое для оператора $V_{q,1}^{\alpha}$ тогда и только тогда, когда

1) в случае нечетного α выполнены условия

$$*\text{-rank} \begin{pmatrix} f_1(x) & f_1(b-x) + f_1(b+x) \\ f_2(x) & f_2(b-x) + f_2(b+x) \end{pmatrix} = 2,$$

$$*\text{-rank} \begin{pmatrix} f_1(a-x) + f_1(a+x) \\ f_2(a-x) + f_2(a+x) \end{pmatrix} = 1.$$

2) в случае четного α выполнено условие $*\text{-rank}\, F(x) = 3$, где

$$F(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) & f_1(a-x) + f_1(a+x) & f_1(b-x) + f_1(b+x) \\ f_2(x) & f_2(a-x) + f_2(a+x) & f_2(b-x) + f_2(b+x) \\ f_3(x) & f_3(a-x) + f_3(a+x) & f_3(b-x) + f_3(b+x) \end{pmatrix}.$$

Пример 3.2 Положим в предыдущем примере $f_1(x) := \chi_{[0,a]}(x)$, $f_2(x) := \chi_{[a,b]}(x)$ и $f_3(x) := \chi_{[b,1]}(x)$. Тогда для $x < \varepsilon := \min\{a, b-a, 1-b\}$ получаем, что

$$F(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поэтому $*\text{-det}\, F(x) = 1 * 1 * 1 = x^3/6$ для $x \in [0, \varepsilon]$ и, следовательно, $*\text{-rank}\, F(x) = 3$. Таким образом подпространство $E = \operatorname{span}\{f_1, f_2, f_3\}$ циклическое для оператора $V_{q,1}^{2}$.

Если функция $f(x)$ непрерывна в нуле $f(0) \neq 0$, то, очевидно, что $f(x)$ удовлетворяет ε-условию (1.2). Следовательно, такая функция $f(x)$ является циклической для оператора J^{α}. Аналогичный эффект имеет место и для оператора $V_{q,w}^{\alpha}$.

Следствие 3.2. *Пусть $N = \mu_{V_{q,1}^{\alpha}}$ и функции $f_i(x) \in L_p[0,1]$ $(i = 1, \dots, N)$ непрерывны в точках a_i $(i = 0, \dots, n-1)$. Для того,* *чтобы система* $\{f_i\}_{i=1}^N$, *векторов* f_i, *порождала циклическое подпространство в* $L_p[0,1]$ *для* $V_{q,1}^{\alpha}$ *достаточно выполнения условий*

$$\det\begin{pmatrix} f_1(0) & f_1(a_2) & \dots & f_1(a_{2[(n-1)/2]}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{[\frac{n-1}{2}]+1}(0) & f_{[\frac{n-1}{2}]+1}(a_2) & \dots & f_{[\frac{n-1}{2}]+1}(a_{2[(n-1)/2]}) \end{pmatrix} \neq 0, \tag{3.25}$$

$$\det\begin{pmatrix} f_1(a_1) & f_1(a_3) & \dots & f_1(a_{2[n/2]-1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{[\frac{n-1}{2}]+1}(a_1) & f_{[\frac{n-1}{2}]+1}(a_3) & \dots & f_{[\frac{n-1}{2}]+1}(a_{2[n/2]-1}) \end{pmatrix} \neq 0 \tag{3.26}$$

для нечетного α *и выполнения условия*

$$\det\begin{pmatrix} f_1(0) & f_1(a_1) & \dots & f_1(a_{n-1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_n(0) & f_n(a_1) & \dots & f_n(a_{n-1}) \end{pmatrix} \neq 0 \tag{3.27}$$

для четного α.

Доказательство. Рассмотрим случай четного α. Тогда $N = n$. Покажем, что если выполнено (3.27), то $*$-rank $F(x) = n$ и, следовательно, система $\{f_i\}_{i=1}^n$ порождает циклическое подпространство. Действительно, $*$-det $F(x) = \int_0^x \breve{F}(x,t)dt$. Так как функции f_i непрерывны в точках a_i $(i = 0,\dots,n-1)$, то $\breve{F}(x,t)$ непрерывна в окрестности нуля. Так как $\breve{F}(0,0) = \det F(0) \neq 0$, то $\breve{F}(x,t)$ не обращается в ноль в некоторой окрестности нуля и, следовательно, функция $*$-det $F(x) = \int_0^x \breve{F}(x,t)dt$ удовлетворяет ε-условию (1.2).

Случай нечетного α доказывается аналогично. $\square$

Замечание 3.2. *Не трудно видеть, что условия* (3.25)–(3.26) *не являются необходимыми даже в случае* $n = 1$.

В качестве следствия из Теорем 3.1, 3.2 вытекает следующий результат М. М. Маламуда ([12, 13]) о циклических подпространствах оператора $A = J \otimes B$ (в [12, 13] аналогичный результат доказан для более общих операторов вида $A = J^{\alpha} \otimes B,\ \alpha > 0$).

Предложение 3.2. (*см.* [12,13]) *Пусть* $B = \operatorname{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ — *диагональная матрица с числами* $\lambda_i > 0$ *и оператор* $A = J^{\alpha} \otimes B = \bigoplus_{i=1}^{n} \lambda_i J^{\alpha}$ *действует в пространстве* $L_p[0,1] \otimes \mathbb{C}^n$. *Тогда*

1)$\mu_A = n$;

2) система векторов

$$h^j = \{h^j_1, \dots, h^j_n\} \in L_p[0,1] \otimes \mathbb{C}^n \qquad (1 \le j \le N)$$

порождает циклическое подпространство для оператора A тогда и только тогда, когда

1. *$N \ge n$;*
2. *Матрица*

$$H(x) = \begin{pmatrix} h^1_1(\lambda_1^{-1/\alpha}x) & h^1_2(\lambda_2^{-1/\alpha}x) & \dots & h^1_n(\lambda_n^{-1/\alpha}x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h^N_1(\lambda_1^{-1/\alpha}x) & h^N_2(\lambda_2^{-1/\alpha}x) & \dots & h^N_n(\lambda_n^{-1/\alpha}x) \end{pmatrix},$$

имеет максимальный $*$-ранг, то есть

$$*\text{-rank}\, H(x) = n. \tag{3.28}$$

Доказательство. Приведем доказательство для случая $\alpha = 1$. Можем считать, что $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = \frac{1}{2}$. Тогда положим

$$a_{2i} := 2\sum_{l=1}^{i} \lambda_l,\ a_{2i-1} := a_{2i-2} + \lambda_i = a_{2i} - \lambda_i \qquad (i = 1, \dots, n).$$

Теперь по точкам a_i построим (см.(2.9)) функцию $q(x)$ и положим $q_i(x) := \chi_{[a_{2i-2},a_{2i}]}(x)q(x)$. Тогда

$$E_i := E_{V_{q,1}}(q_i) := \operatorname{span}\{(V^n_{q,1}q_i)(x) :\ n \geqslant 0\} \in \operatorname{Lat} V_{q,1}.$$

Так как $\operatorname{supp}(V^n_{q,1}q_i)(x) = [a_{2i-2}, a_{2i}]$, то $E_i \subset \chi_{[a_{2i-2},a_{2i}]}(x)L_p[0,1]$. Положим $E = \dot{+}E_i$. Пусть $f(x) = \bigoplus\limits_{k=1}^{2n} f_k(x) \in E$, где как и в (3.11)

$$f_k(x) = \chi_{[a_{k-1},a_k]}(x)f(x) \qquad (k = 1, \dots, 2n).$$

Тогда в силу построения пространства E

$$f_{2i-1}(a_{2i-2} + x) = -f_{2i}(a_{2i} - x) \qquad (i = 1, \dots, n).$$

Пусть оператор $P : E \to L_p[0,1] \otimes \mathbb{C}^n$, действует по правилу

$$(Pf)(x) = (P\bigoplus_{j=1}^{2n} f_j)(x) = (\bigoplus_{i=1}^{n} P(f_{2i-1} \bigoplus f_{2i}))(x) =$$

$$= \bigoplus_{i=1}^{n}(f_{2i-1}(a_{2i-2} + \lambda_i x) := (h_1(x), \dots, h_n(x)) := h(x),\ x \in [0,1].$$

Тогда оператор P ограничен вместе со своим обратным, и P^{-1} имеет вид

$$f(x) := (P^{-1}h)(x) = \begin{cases} h(\lambda_i^{-1}(x - a_{2i-2})), & x \in [a_{2i-2}, a_{2i-1}],\ 1 \leqslant i \leqslant n, \\ -h(\lambda_i^{-1}(a_{2i} - x)), & x \in [a_{2i-1}, a_{2i}], \quad 1 \leqslant i \leqslant n. \end{cases}$$

В частности,

$$f_{2i-1}(x) = \begin{cases} h(\lambda_i^{-1}(x - a_{2i-2})), & x \in [a_{2i-2}, a_{2i-1}], \\ 0, & x \notin [a_{2i-2}, a_{2i-1}]. \end{cases} \tag{3.29}$$

Так как $E_i \in \operatorname{Lat} V_{q,1}^{\alpha}$, то при всех $f \in E$ выполнены равенства

$$(PV_{q,1}f)(x) = \bigoplus_{i=1}^{n} q(a_{2i-2} + \lambda_i x) \int\limits_0^{a_{2i-2}+\lambda_i x} f_{2i-1}(t)\,dt =$$

$$= \bigoplus_{i=1}^{n} \int\limits_{a_{2i-2}}^{a_{2i-2}+\lambda_i x} f_{2i-1}(t)\,dt = \lambda_i \int\limits_0^x f_{2i-1}(a_{2i-2} + \lambda_i t)\,dt = (APf)(x).$$

То есть операторы $V_{q,1} \restriction_E$ и A подобны. Поэтому $H \in \operatorname{Cyc} \bigoplus\limits_1^n \lambda_i J$ тогда и только тогда, когда $P^{-1}H \in \operatorname{Cyc} V_{q,1} \restriction_E$. То есть система векторов $h^j = \{h_1^j, \dots, h_n^j\} \in L_p[0,1] \otimes \mathbb{C}^n$ $(1 \le j \le N)$ порождает циклическое подпространство для оператора A тогда и только тогда, когда система векторов $P^{-1}h^j = \{P_1^{-1}h_1^j, \dots, P_n^{-1}h_n^j\} := \{f_1^j, f_2^j \dots, f_{2n-1}^j, f_{2n}^j\} := f^j$ $(1 \le j \le N)$ порождает циклическое подпространство для оператора $V_{q,1} \restriction_E$. Положим

$$F = \operatorname{span}\{(V_{q,1}^n f^j)(x) : 1 \leqslant j \leqslant N, n \geqslant 0\}.$$

По предложению 3.2 $g = \{g_1, \dots, g_{2n}\} \in F^{\perp}$ тогда и только тогда, когда для любого $f \in H$ выполнены условия (3.7) и (3.8). Так как при $1 \le\ j \le N$, $1 \le\ i \le n$

$$f_{2i-1}^j(a_{2i-1} - x) + f_{2i}^j(a_{2i} + x) = 0, \tag{3.30}$$

$$g_{2i-1}(a_{2i-1} - x) + g_{2i}(a_{2i} + x) = 0,$$

$$G_{2i-1}(x) = g_{2i-1}(1 - x - 2A_{2i-1,2i-1} + a_{2i-2}) = g_{2i-1}(1 - x + a_{2i-2}),$$

$$G_{2i}(x) = 0,$$

то условия (3.7)–(3.8) примут вид

$$\sum_{i=1}^{n}(f_{2i-2}^{j}(a_{2i-2}-x)+f_{2i-1}^{j}(a_{2i-2}+x))*$$
$$*\, g_{2i-1}(1-x+a_{2i-2})=0 \qquad (j=1,\dots,N),$$
$$0=0$$

или, в силу (3.30),

$$f_1^j(x)*g_1(1-x)+\sum_{i=2}^{n}(f_{2i-3}^{j}(a_{2i-4}+x)+$$
$$+\, f_{2i-1}^{j}(a_{2i-2}+x))*g_{2i-1}(1-x+a_{2i-2})=0.$$

По лемме 3.3 $g(x)\equiv 0$ тогда и только тогда, когда $*\text{-rank}\,F(x)=n$, где

$$F(x)=\begin{pmatrix} f_1^1(x) & \dots & f_{2n-3}^1(a_{2n-4}+x)+f_{2n-1}^1(a_{2n-2}+x)\\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f_1^N(x) & \dots & f_{2n-3}^N(a_{2n-4}+x)+f_{2n-1}^N(a_{2n-2}+x)\end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что $*\text{-rank}\,F(x)=*\text{-rank}\,\breve{F}(x)$, где

$$\breve{F}(x)=\begin{pmatrix} f_1^1(x) & \dots & f_{2i-1}^1(a_{2i-2}+x) & f_{2n-1}^1(a_{2n-2}+x)\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_1^N(x) & \dots & f_{2i-1}^N(a_{2i-2}+x) & f_{2n-1}^N(a_{2n-2}+x)\end{pmatrix}.$$

В силу (3.29) $f_{2i-1}^j(a_{2i-2}+x)=h_i^j(\lambda_i^{-1}x)$, поэтому $\breve{F}(x)=H(x)$, что и завершает доказательство Предложения. □

4. Циклические подпространства. Случай II

В этом параграфе доказывается, что у оператора $V_{q,1}^{\alpha}$ не существует конечномерых циклических подпространств в том случае, когда функция q, принимает значения ± 1 и при этом не эквивалентна функциям $d_\pi(x)$ вида (2.9).

Пусть J_{ab} обозначает оператор интегрирования J, действующий в пространстве $L_p[a,b]$ (здесь a не обязательно меньше b), по правилу $(J_{ab}f)(x)=\int_a^x f(t)\,dt$. Таким образом, если, например, $p=2$, то $J_{01}=$ $=J$, а $J_{10}=-J^*$.

Лемма 4.1. *Операторы J_{ab} и $(b-a)J$ подобны.*

Доказательство. Рассмотрим оператор $T_{ab} : L_p[a,b] \to L_p[0,1]$, $(T_{ab}f)(x) = f(\frac{x-a}{b-a})$. Тогда

$$J_{ab}T_{ab} = \int\limits_a^x f(\frac{t-a}{b-a})\,dt = (b-a)\int\limits_0^{\frac{x-a}{b-a}} f(t)\,dt = T_{ab}(b-a)J.$$

Так как оператор T_{ab} обратим : $(T_{ab}^{-1}f)(x) = f(x(b-a)+a)$, то подобие операторов J_{ab} и $(b-a)J$ доказано. $\square$

Если $0 \in [a,b]$, то обозначим через J_{ab0} оператор, действующий в $L_p[a,b]$ (где a не обязательно меньше b), по правилу $(J_{ab0}f)(x) = \int_0^x f(t)\,dt$. Если $a = 0$ или $b = 0$, то $J_{ab0} = J_{ab}$. Оператор J_{ab0} распадается в прямую сумму $J_{ab0} = J_{0a} \oplus J_{0b}$, и по лемме 4.1 J_{ab0} подобен оператору $(a-0)J \oplus (b-0)J = aJ \oplus bJ$. Отметим, что в силу того, что $ab < 0$ из Леммы 3.2 будет следовать цикличность последнего оператора.

Лемма 4.2. *Пусть* $|q(x)| = 1$ *и*

$$Q(x) := \int\limits_0^x q(t)\,dt \quad \text{для п. в. } x \in [0,1].$$

Положим $m := \min\limits_{x\in[0,1]} Q(x)$, $M := \max\limits_{x\in[0,1]} Q(x)$ *и* $\lambda(x) := \mu\{t : Q(t) < x\}$, $x \in [m,M]$. *Тогда* $\lambda'(x) \geqslant 1$.

Доказательство. Пусть

$E_+ = \{t :$ существует $Q'(t)$ и $Q'(t) = 1\}$,

$E_- = \{t :$ существует $Q'(t)$ и $Q'(t) = -1\}$. Так как $Q \in AC[0,1]$, то $\mu\{E_+ \cup E_-\} = 1$ и $\mu\{Q(E_+ \cup E_-)\} = M - m$. Покажем, что для каждого $x \in Q(E_+ \cup E_-)$ найдется последовательность $\{\Delta x_i\}_{i=1}^{\infty}$ такая, что

$$\lim_{i\to\infty} \Delta x_i = 0, \qquad \lambda(x + \Delta x_i) - \lambda(x) > \Delta x_i.$$

Так как производная от $\lambda(x)$ существует почти всюду, то это и будет означать, что $\lambda'(x) \geqslant 1$.

(i) Пусть $x = Q(t)$, $t \in E_+$, тогда существует $\delta_1 > 0$ такое, что $Q(t+\Delta t) - Q(t) > 0$ для всех $\Delta t \in [0,\delta_1]$. Пусть t_1 — какая-нибудь точка максимума функции $Q(s)$ на отрезке $[t, t+\delta_1]$, то есть $Q(t_1) = \max\limits_{s\in[t,t+\delta_1]} Q(s)$. Положим $\Delta x_1 := Q(t_1) - Q(t) = \int_t^{t_1} q(s)\,ds$. Тогда

$$0 < \Delta x_1 < \int\limits_t^{t_1} |q(s)|\,ds = t_1 - t < \delta_1$$

и $Q(t_1) = Q(t) + \Delta x_1 = x + \Delta x_1$. Поэтому

$$\lambda(x + \Delta x_1) - \lambda(x) = \mu\{s : x < Q(s) < x + \Delta x_1\} = \\ \mu\{s : Q(t) < Q(s) < Q(t_1)\} > t_1 - t > \Delta x_1,$$

и при этом $\Delta x_1 < \delta_1$. Полагая $\delta_i := 1/2\delta_{i-1}$ $(i \geqslant 2)$ и проделывая тоже самое, получим, что $\lambda(x + \Delta x_i) - \lambda(x) > \Delta x_i$, где $\Delta x_i < \delta_i = (1/2)^{i-1}\delta_1 \to 0$.

(ii) Случай $x = Q(t)$, $t \in E_-$ рассматривается аналогично (i). $\square$

Предложение 4.1. *Пусть*

$$E_q := \operatorname{span}\{(V_{q,1}^n q)(x) : n \geqslant 1\} = \operatorname{span}\{\frac{Q(x)^n}{n!} q(x) : n \geqslant 1\}.$$

Тогда

1) $E_q \in \operatorname{Lat} V_{q,1}$*;*

2) Оператор $V_{q,1} \restriction_{E_q}$ *квазиподобен оператору* $(J_{mM0}f)(x) := \int_0^x f(t)dt$*, действующему в* $L_p[m, M]$*, где* $m := \min_{x\in[0,1]} Q(x) \leqslant 0 \leqslant M := \max_{x\in[0,1]} Q(x)$*.*

Доказательство. Пусть

$$(X_1 f)(x) = q(x) \int_0^{Q(x)} f(t)\, dt, \qquad X_1 \ : L_p[m, M] \to L_p[0, 1].$$

Тогда

$$\|X_1 f\|^p_{L_p[0,1]} = \int_0^1 |q(x)|^p \left| \int_0^{Q(x)} f(t)\, dt \right|^p dx \leq \\ \leq \int_0^1 \left(\int_m^M |f(t)|\, dt \right)^p dx \leq (M - m)^{\frac{p}{p'}} \|f\|^p$$

и, следовательно, оператор X_1 ограничен. Если $f \in ker X_1$, то $(X_1 f)(x) = \int_0^{Q(x)} f(t)dt = 0$ для п.в. $x \in [0, 1]$. Поэтому $\int_0^x f(t)dt = 0$ для п.в. $x \in [m, M]$, и, следовательно, $ker X_1 = \{0\}$.

Так как

$$\overline{\Re(X_1)} = \operatorname{span}\{X_1 \frac{x^n}{n!} : n \geqslant 0\} = \operatorname{span}\{q(x) \frac{Q(x)^n}{n!} : n \geqslant 1\} = E_q,$$

то оператор $X := X_1 \ : L_p[m,M] \to E_q$ — деформация. Соотношение $XJ_{mM0} = V_1 X$ верно на множестве полиномов :

$$XJ_{mM0}\frac{x^n}{n!} = q(x)\int\limits_0^{Q(x)}\int\limits_0^t \frac{s^n}{n!}\,ds\,dt = q(x)\int\limits_0^{Q(x)} \frac{s^{n+1}}{(n+1)!}\,ds =$$

$$= q(x)\frac{Q(x)^{n+2}}{(n+2)!} = q(x)\int\limits_0^x \frac{Q(t)^{n+1}}{(n+1)!}\,dQ(t) =$$

$$= q(x)\int\limits_0^x q(t)\int\limits_0^{Q(t)} \frac{s^n}{n!}\,ds\,dt = V_1 X\frac{x^n}{n!}.$$

Поэтому $XJ_{mM0}f = V_1 Xf$ для любой функции $f \in L_p[m,M]$.

Теперь рассмотрим оператор $Y : E_q \to L_p[m,M]$, заданный на плотном в E_q множестве $E_{q,0}$ полиномов от $Q(x)$ равных нулю в нуле:

$$E_{q,0} = \{q(x)P_n(Q(x)) : P_n(0) = 0\} = X\{P_n(x) : P_n(0) = 0\}$$

соотношением $Y(q(x)P_n(Q(x)) = P_n(x)$. Тогда

$$\int\limits_0^1 |q(x)P_n(Q(x))|^p\,dx = \int\limits_0^1 |P_n(Q(x))|^p\,dx = \int\limits_m^M |P_n(x)|^p\,d\lambda(x),$$

где $\lambda(x) := mes\{t : Q(t) < x\}$, $x \in [m,M]$. По Лемме 4.2

$$\int\limits_m^M |P_n(x)|^p\,d\lambda(x) \geq \int\limits_m^M |P_n(x)|^p\,dx.$$

Следовательно, оператор Y ограничен на всюду плотном множестве, и его можно продолжить до ограниченного оператора на все E_q. Далее, $XY = V_{q,1}\restriction_{E_q}$ на плотном в E_q множестве $E_{q,0}$ и, следовательно, на всем E_q. Поэтому $\ker Y = 0$. Так как

$$\Re(Y) \supset \mathrm{span}\{Y(q(x)\frac{Q(x)^n}{n!}) : n \geqslant 1\} = \mathrm{span}\{x^n : n \geqslant 1\} = L_p[0,1],$$

то оператор Y — деформация. Операторы $YV_{q,1}\restriction_{E_q}$ и $J_{mM0}Y$ опять совпадают на множестве $E_{q,0}$ и, следовательно, на всем E_q. Поэтому операторы $V_{q,1}\restriction_{E_q}$ и J_{mM0} квазиподобны. □

Следствие 4.1. *Пусть числа* $a, b \in [0,1]$ *такие, что* $\int_a^b q(s)\,ds = 0$. *Пусть также* $\breve{q} := \chi_{[a,b]}(x)q(x)$ *и* $E_{\breve{q}} := \operatorname{span}\{(V_{q,1}^n\breve{q})(x) : n \geqslant 1\}$. *Тогда*

1) $E_{\breve{q}} \in \operatorname{Lat} V_{q,1} \bigcap \chi_{[a,b]}L_p[0,1]$*;*

2) Оператор $V_{q,1}\restriction_{E_{\breve{q}}}$ *квазиподобен оператору* $(J_{mM0}f)(x) := \int_0^x f(t)dt$*, действующему в* $L_p[m,M]$*, где*

$$m := \min_{x\in[a,b]} \int\limits_a^x q(s)\,ds \leqslant 0 \leqslant M := \max_{x\in[a,b]} \int\limits_a^x q(s)\,ds.$$

Доказательство. 1) $E_{\breve{q}} \in \operatorname{Lat}V_{q,1}$ — очевидно. Докажем $E_{\breve{q}} \subset \chi_{[a,b]}L_p[0,1]$.

$$(V_{q,1}^{n+1}\breve{q})(x) = \begin{cases} 0, & 0<t<a,\\ q(x)\int\limits_a^x q(t)(\int\limits_t^x q(s)\,ds)^n/n!\,dt, & a<t<b,\\ q(x)\int\limits_a^b q(t)(\int\limits_t^b q(s)\,ds)^n/n!\,dt, & b<t<1 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 0, & 0<t<a,\\ -q(x)\left[\left(\int\limits_t^x q(s)\,ds\right)^{n+1}/(n+1)!\right]\Bigg|_a^x, & a<t<b,\\ -q(x)\left[\left(\int\limits_t^b q(s)\,ds\right)^{n+1}/(n+1)!\right]\Bigg|_a^b & ,b<t<1 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 0, & t\in[0,1]\backslash[a,b],\\ q(x)\left(\int\limits_a^x q(s)\,ds\right)^{n+1}/(n+1)!, & a<t<b. \end{cases}$$

2) Покажем, что можно считать $a = 0$, $b = 1$. Для этого положим

$$q_1(x) = \breve{q}((b-a)x+a) \in L_p[0,1], \quad E_1 := \operatorname{span}\{(V_{q_1,1}^n q_1)(x) : n \geqslant 1\}$$

и покажем, что операторы $V_{q,1}\restriction_{E_{\breve{q}}}$ и $(b-a)V_{q_1,1}\restriction_{E_1}$ подобны. После этого применение предложения 4.3 завершит доказательство.

Пусть $(Tf)(x) = f((b-a)x+a)$ — оператор из E на TE. Так как при $n \geqslant 1$

$$(TV_{q,1}^n \breve{q})(x) = \frac{\breve{q}((b-a)x+a)}{n!}\Bigg(\int\limits_a^{(b-a)x+a} \breve{q}(s)\,ds\Bigg)^n =$$
$$= \frac{q_1(x)}{n!}\Bigg((b-a)\int\limits_0^x \breve{q}((b-a)s+a)\,ds\Bigg)^n =$$
$$= (b-a)^n (V_{q_1,1}^n q_1)(x) = (b-a)^n (V_{q_1,1}^n T\breve{q})(x),$$

то $TE = E_1$. Последнее равенство может быть также переписано в виде

$$TV_{q,1}(V_{q,1}^{n-1}\breve{q}) = (b-a)V_{q_1,1}(b-a)^{n-1}V_{q_1,1}^{n-1}T\breve{q} = (b-a)V_{q_1,1}T(V_{q,1}^{n-1}\breve{q}),\quad n \geqslant 2.$$

Таким образом операторы $TV_{q,1}$ и $(b-a)V_{q_1,1}T$ совпадают на множестве всюду плотном в E_q и, следовательно, $TV_{q,1} = (b-a)V_{q_1,1}T$. Так как оператор T^{-1} определенный на всем E_1 равенством $(T^{-1}f)(x) = f(\frac{x-a}{b-a})$ ограничен, то операторы $V_{q,1} \restriction_E$ и $(b-a)V_{q,1} \restriction_{E_1}$ подобны. Поэтому можем считать, что в условиях Следствия $a = 0$, $b = 1$, $\breve{q} = q$, $E_{\breve{q}} = E_q$, $m = \min\limits_{x\in[0,1]} \int_0^x q(s)\,ds \leqslant 0 \leqslant M = \max\limits_{x\in[0,1]} \int_0^x q(s)\,ds.$ $\square$

Следствие 4.2. *Пусть*

$$0 \leqslant a_1 < b_1 < \cdots < a_n < b_n \leqslant 1 \quad \text{и} \quad \int\limits_{a_i}^{b_i} q(s)\,ds = 0, \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Пусть также

$$q_i := \chi_{[a_i,b_i]}(x)q(x), \quad E_{q_i} := \operatorname{span}\{(V_{q,1}^k q_i)(x) : k \geqslant 1\} \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Тогда

1) $E := \bigoplus\limits_{i=1}^n E_{q_i} \in \operatorname{Lat} V_{q,1}$;

2) оператор $V_{q,1} \restriction_E$ *квазиподобен оператору* $\bigoplus\limits_{i=1}^n J_{m_i M_i 0}$, *где*

$$m_i := \min_{x\in[a_i,b_i]} \int\limits_{a_i}^x q(s)\,ds \leqslant 0 \leq M_i := \max_{x\in[a_i,b_i]} \int\limits_{a_i}^x q(s)\,ds \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Доказательство. 1), 2) Следует из 1), 2) Следствия 4.1. □

Предложение 4.2. *Пусть* $|q(x)| \equiv 1$ *и функция* $q(x)$ *не эквивалентна функции* $d_\pi(x)$ *(или* $-d_\pi(x)$ *) вида* (2.9) *ни при каком конечном разбиениии* π *вида* (2.8). *Тогда* $\mu_{V_{q,1}} = \infty$ *и, следовательно,* $\mu_{V_{q,1}^\alpha} = \infty$.

Доказательство. Пусть $V_{q,1,r,s}$ обозначает оператор, действующий из L_r в L_s по тому же правилу, что и оператор $V_{q,1}$. Тогда очевидно, что оператор $V_{q,1,r,s}$ — деформация и

$$V_{q,1}V_{q,1,2,p} = V_{q,1,2,p}V_{q,1,2,2}, \qquad V_{q,1,2,2}V_{q,1,p,2} = V_{q,1,p,2}V_{q,1}.$$

Это означает, что операторы $V_{q,1}(= V_{q,1,p,p})$ и $V_{q,1,2,2}$ квазиподобны и, следовательно, имеют равные спектральные кратности. Поэтому доказательство достаточно привести для $p = 2$.

Так как функция $q(x)$ не эквивалентна функции $d_\pi(x)$ (или $-d_\pi(x)$) вида (2.9) ни при каком конечном разбиениии π вида (2.8), то тоже самое верно и для функции $q(1-x)$. Поэтому по Следствию 4.2, для любого $n \in \mathbb{N}$ найдется подпространство $E_n \in \mathrm{Lat}V_{q(1-x),1}$ такое, что оператор $V_{q(1-x),1} \restriction_{E_n}$ квазиподобен оператору $R := \bigoplus_{i=1}^{n} J_{m_iM_i0} = \bigoplus_{i=1}^{n} J_{m_i0} \oplus J_{0M_i}$, действующему в пространстве $\bigoplus_{i=1}^{n}(L_p[m_i,0] \oplus L_p[0,M_i])$. По Лемме 4.1 оператор R квазиподобен оператору $V_- \oplus V_+ := (\bigoplus_{i=1}^{n} m_iJ) \oplus (\bigoplus_{i=1}^{n} M_iJ)$, действующему в пространстве $\bigoplus_{i=1}^{n} L_p[m_i,0] \bigoplus_{i=1}^{n} L_p[0,M_i]$. Так как числа m_i и M_i не могут быть равны нулю одновременно, то найдется либо $[n/2]$ ненулевых чисел $m_i < 0$, либо $[n/2]$ ненулевых чисел $M_i > 0$. Поэтому по Предложению 3.2 либо $\mu_{V_-} \geqslant [n/2]$, либо $\mu_{V_+} \geqslant [n/2]$ и, следовательно, $\mu_R = \mu_{V_-\oplus V_+} \geq \max(\mu_{V_-}, \mu_{V_+}) \geqslant [n/2]$. Пусть

$$K, L : L_2[0,1] \to L_2[0,1],$$

$$(Kf)(x) = q(1-x)f(1-x), \qquad (Lf)(x) = f(1-x).$$

Тогда $K^{-1}V_{q,1}K = V^*_{q(1-x),1}$ и $L^{-1}JL = J^*$ и, следовательно, $\mu_{V_{q,1}} = \mu_{V^*_{q(1-x),1}}$ и $\mu_{R^*} = \mu_R$. Так как оператор R^* изоморфен фактор-оператору индуцируемому оператором $V^*_{q(1-x),1}$ на E_n, то $\mu_{V^*_{q(1-x),1}} \geqslant \mu_{R^*}$ и, следовательно,

$$\mu_{V_{q,1}} = \mu_{V^*_{q(1-x),1}} \geqslant \mu_{R^*} = \mu_R \geqslant [n/2].$$

Поскольку n может быть выбрано как угодно большим, то $\mu_{V_{q,1}} = \infty$. □

Комбинируя следствие 3.1 и предложение 4.2 получаем критерий цикличности оператора $V^\alpha_{q,1}$ для произвольной функции $q(x)$ ($|q(x)| \equiv \equiv 1$).

Следствие 4.3. *Пусть* $|q(x)| \equiv 1$. *Тогда оператор* $V^\alpha_{q,1}$ *циклический в точности тогда, когда либо* $q \equiv 1$, *либо* $q(x) = \chi_{[0,a]}(x) - \chi_{[a,1]}(x)$ *для некоторого* $a \in [0,1]$ *и* α *нечетно.*

Пример 4.1 1) Пусть

$$c = \left(\int\limits_0^1 |\sin\frac{1}{t}|\,dt\right)^{-1}, \quad q(x) = c\sin\frac{1}{x}, \quad R(x) := \int\limits_0^x |q(t)|\,dt$$

$$\text{и} \quad r(x) := \operatorname{sign}(q(R^{-1}(x))).$$

Тогда по теореме 2.1 операторы $V_{q,1}$ и $V_{r,1}$ квазиподобны и, следовательно, имеют одинаковые спектральные кратности. Так как функция $sign(q(x))$ не эквивалентна функции $d_\pi(x)$ (или $-d_\pi(x)$) вида (2.9) ни при каком конечном разбиениии π вида (2.8), то тоже самое верно и для функции $r(x)$. Поэтому оператор $V_{r,1}$ а, следовательно и оператор $V_{q,1}$ не имеет конечномерных циклических подпространств.

2) Пусть $q(x) = c|\sin\frac{1}{x}|$. Тогда $r(x) := \operatorname{sign}(q(R^{-1}(x))) = 1$ п.в. $x \in [0,1]$. Поэтому операторы $V_{q,1}$ и J квазиподобны и оператор $V_{q,1}$ — циклический.

5. Критерий одноклеточности оператора $V^\alpha_{q,w}$

Следующее предложение является частным случаем одного из результатов работ [12, 13]. Для полноты изложения мы приводим элементарное доказательство для случая $p = 2$.

Предложение 5.1. *Пусть* $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ *и* $(b-a)^\alpha(d-c)^\alpha\lambda_1\lambda_2 < 0$. *Тогда уравнения*

$$\lambda_1 J^\alpha_{ab} X = X\lambda_2 J^\alpha_{cd}, \qquad X : L_p[c,d] \to L_p[a,b] \tag{5.1}$$

$$Y\lambda_1 J^\alpha_{ab} = \lambda_2 J^\alpha_{cd} Y, \qquad Y : L_p[a,b] \to L_p[c,d] \tag{5.2}$$

имеют только тривиальные решения X *и* Y.

Доказательство. Докажем (5.1). По лемме 4.1

$$J^\alpha_{ab} = T^{-1}_{ab}(b-a)^\alpha J^\alpha T_{ab}, \qquad J^\alpha_{cd} = T^{-1}_{cd}(d-c)^\alpha J^\alpha T_{cd}.$$

Поэтому (5.1) перепишется в виде

$$\lambda_1 T_{ab}^{-1}(b-a)^\alpha J^\alpha T_{ab} X = X \lambda_2 T_{cd}^{-1}(d-c)^\alpha J^\alpha T_{cd}$$

или $\lambda_1(b-a)^\alpha J^\alpha T_{ab} X T_{cd}^{-1} = T_{ab} X T_{cd}^{-1} \lambda_2 (d-c)^\alpha J^\alpha$. Следовательно, для доказательства (5.1) достаточно ограничиться случаем $\lambda_1\lambda_2 < 0$, $a = c = 0$, $b = d = 1$, то есть

$$\lambda_1 J^\alpha X = X \lambda_2 J^\alpha, \qquad J, X : L_p[0,1] \to L_p[0,1]. \tag{5.3}$$

Пусть для простоты $p = 2$. Покажем, что $X = 0$. Из (5.3) следует, что $(\mathbb{I} - \lambda\lambda_1 J^\alpha)^{-1} X = X(\mathbb{I} - \lambda\lambda_2 J^\alpha)^{-1}$. Поэтому для произвольных векторов $f \in L_2[0,1]$ и $g \in L_2[0,1]$ верно равенство

$$\begin{aligned} 0 = \int_0^1 \lambda_1 \int_0^x {E_\alpha}^{\lambda\lambda_1(x-t)} (Xf)(t)\,dt\, g(x)\,dx - \\ - \int_0^1 \lambda_2 \int_0^x {E_\alpha}^{\lambda\lambda_2(x-t)} f(t)\,dt\,(X^*g)(x)\,dx = \\ = \int_0^1 {E_\alpha}^{\lambda\lambda_1 t} \int_t^1 \lambda_1 (Xf)(x-t) g(x)\,dx\,dt - \\ - \int_0^1 {E_\alpha}^{\lambda\lambda_2 t} \int_t^1 \lambda_2 f(x-t)(X^*g)(x)\,dx\,dt. \end{aligned}$$

По лемме 3.2 $\int_t^1 \lambda_1(Xf)(x-t)g(x)\,dx\,dt = 0$ для п.в. $t \in [0,1]$. Полагая $g(x) = 1$ для п.в. $x \in [0,1]$ получаем, что $(Xf)(x) = 0$ для п.в. $x \in [0,1]$. В силу произвольности вектора f получаем, что $X = \mathbb{O}$.

Доказательство (5.2) проводится аналогично. □

Определение 5.1. *Оператор $T \in [X]$ называется одноклеточным, если его решетка инвариантных подпространств $\operatorname{Lat} T$ линейно упорядочнена по вложению, т.е. если $E_1, E_2 \in \operatorname{Lat} T$, то либо $E_1 \subset E_2$, либо $E_2 \subset E_1$.*

Теорема 5.1. *Следующие условия эквивалентны*

1a. $\operatorname{Lat} V_{q,w}^\alpha = \operatorname{Lat} J^\alpha = \{\chi_{[a,1]} L_p[0,1] : 0 \leqslant a \leqslant 1\}$;

1b. $\operatorname{Cyc} V_{q,w}^\alpha = \operatorname{Cyc} J^\alpha$;

2. Оператор $V_{q,w}^\alpha$ одноклеточный;

3a. Функция $q(x)w(x)$ почти всюду не меняет знак $x \in [0,1]$;

3b. Функция $Q(x) := \int_0^x q(t)w(t)\,dt$ строго монотонная;

3c. $E_q := \operatorname{span}\{q(x)Q(x)^n : n \geqslant 1\} = L_p[0,1]$;

4. Оператор $V_{q,w}^\alpha$ квазиподобен cJ^α, $c = \overline{c} \neq 0$.

Доказательство. Так как для любых двух ограниченных операторов A и B включение $\operatorname{Lat} A \subset \operatorname{Lat} B$ влечет включение $\operatorname{Cyc} B \subset \operatorname{Cyc} A$, то верна импликация 1a $\Rightarrow$ 1b. Обратно, если выполнено 1b, то по следствию 3.1 и следствию 4.3 выполнено 1a. Эквивалентности $3a \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 3b \Leftrightarrow 3c$ и $1 \Leftrightarrow 2$ - очевидны. По следствию 3.1 3a $\Leftrightarrow$ 1b, а по теореме 2.1 3a $\Rightarrow$ 4. Докажем 4) $\Rightarrow 3a$. Так как оператор J^α циклический, а оператор $V^\alpha_{q,w}$ квазиподобен оператору J^α, то оператор $V^\alpha_{q,w}$ также циклический. По теореме 2.1 можно ограничиться случаем $|q(x)| = 1$, $w(x) \equiv 1$. Тогда по следствию 4.3 в случае четного α $q(x) \equiv 1$ и, следовательно, теорема доказана. Если α — нечетно, то существует точка $a \in (0,1)$ такая, что $\pm q(x) = \chi_{[0,a]}(x) - \chi_{[a,1]}(x)$. Очевидно, что достаточно рассмотреть случай $q(x) = \chi_{[0,a]}(x) - \chi_{[a,1]}(x)$. Пусть X и Y — деформации, которые сплетают операторы cJ^α и $V^\alpha_{q,1}$, то есть $J^\alpha Y = = Y V^\alpha_{q,1}$, $XcJ^\alpha = V^\alpha_{q,1} X$. Рассмотрим блочно-матричное представление операторов Y, J^α и $V^\alpha_{q,1}$, записанное по отношению к разложению пространства $L_p[0,1]$ в прямую сумму $L_p[0,1] = L_p[0,a] \dot{+} L_p[a,1]$

$$Y = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix}, \qquad J^\alpha = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{pmatrix}, \qquad V^\alpha_{q,w} = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix},$$

где $J_{11} = cJ_{0a}$, $J_{22} = cJ_{a1}$, $V_{11} = J_{0a}$, $V_{22} = -J_{a1}$.

Так как $L_p[a,1] \in \operatorname{Lat} V^\alpha_{q,1} \bigcap \operatorname{Lat} J$, то $J_{12} = V_{12} = \mathbb{O}$.

Так как $JY = YV^\alpha_{q,w}$ и $XcJ = V^\alpha_{q,w} X$, то

$$J_{11}Y_{12} = Y_{12}V_{22}, \qquad J_{21}Y_{12} + J_{22}Y_{22} = Y_{22}V_{22}$$

$$X_{12}J_{22} = V_{11}X_{12}, \qquad X_{11}J_{11} + X_{12}J_{21} = V_{11}X_{11}$$

или

$$J_{0a}Y_{12} = -Y_{12}J_{a1}, \qquad J_{21}Y_{12} + cJ_{a1}Y_{22} = -Y_{22}J_{a1},$$

$$X_{12}cJ_{a1} = J_{0a}X_{12}, \qquad X_{11}cJa1 + X_{12}J_{21} = J_{a1}X_{11}.$$

Если $c > 0$, то по предложению 5.1 $Y_{12} = \mathbb{O}$ и $Y_{22} = \mathbb{O}$, то есть оператор Y имеет непустое ядро. Если $c < 0$, то по предложению 5.1 $X_{12} = \mathbb{O}$ и $X_{11} = \mathbb{O}$, то есть оператор X имеет неплотный образ. Таким образом для квазиподобия операторов cJ и $V^\alpha_{q,w}$ необходимо, чтобы функция q не меняла знак. $\square$

Литература

[1] Бродский М. С. *Треугольные и жордановы представления линейных операторов.* М.: Наука, 1969, 287 с.

[2] Berezin F. A., Shubin M. A. *Shredinger's equations.* M.: press of Moscow un-ty (in Russian), 1983, 392 p.

[3] Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. *Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения.* М.: Наука, 1967.

[4] Губреев Г. М. *Об одном классе безусловных базисов гильбертовых пространств и о проблеме подобия диссипативных вольтерровых операторов* // Мат. Сборник. **183** (1992), No 9, 105–146.

[5] Доманов И. Ю. *Спектральный анализ степеней оператора* $(Vf)(x) = \int_0^x f(t)w(t)dt$ // Математические заметки. **73** (2003), вып. 3, 444–448.

[6] Доманов И. Ю. *О циклических подпространствах оператора* $(V_{q,w}f)(x) = \int_0^x f(t)w(t)dt$ // Усп. Матем. Наук. **58** (2003), No 1, 183–184.

[7] Забрейко П. П., Кошелев А. И., Красносельский М. А., Михлин С. Г., Раковщик Л. С., Стеценко В. Я. *Интегральные операторы.* М.: Наука, 1968, 448 с.

[8] Kang Joo Ho *On the Unicellularity of Volterra-Type Integral Operators* // Kyungpook Mathematical Journal. **30** (1990), 1–6.

[9] Karabash I. M. *On differential operators of the first order nonsimilar to selfadjoint ones.* // Spectral and evolutionary problems. **10** (2000), 22–25.

[10] Lifshits M. A., Linde W. *Approximation and Entropy Numbers of Volterra operators with Application to Brownian Motion* // Mem. Amer. Math. Soc. **157** (2002), No 745, 87 p.

[11] Маламуд М. М. *Замечания о спектре одномерных возмущений вольтерровых операторов* // Математ. Физика. **32** (1982), 99–105.

[12] Маламуд М. М. *О воспроизводящих подпространствах вольтерровых операторов* // Докл. Акад. Наук. **351** (1996), 4, 143–146.

[13] Malamud M. M. *Invariant and hyperinvariant subspaces of direct sums of simple Volterra operators* // Operator theory : Advances and Applicanions. (1997) vol. Integral and Differential Operators, 137–161.

[14] Malamud M. M. *Similarity of Volterra operators and related questions of the theory of differential equations of fractional order* // Trans. Moscow Math. Soc. **55** (1994), 57–122.

[15] Nikol'skii M. S. *On Systems of Linear Integral Equations of Volterra Type in Convolutions* // Proc. of the Steklov Inst. of Math. **220** (1988), 210–216.

[16] Васюнин В. И. , Никольский Н. К. *Управляющие подпространства минимальной размерности. Элементарное введение. Discotheca* // Зап. Науч. Семин. ЛОМИ. **113** (1981), 41–75.

[17] Никольский Н. К. *Лекции об операторе сдвига.* М.: Наука. 1980, 383 с.

[18] Халмош П., Сандер В. *Ограниченные интегральные операторы в пространствах* L_2. М.: Наука. 1985, 160 с.

Сведения об авторах

И. Ю. Доманов

Институт прикладной математики
и механики НАН Украины,
ул. Р. Люксембург 74,
83114, Донецк Украина
E-Mail: `domanovi@yahoo.com`,
`domanov@tcc-online.com`